Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 2

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ О ДИФФУЗИИ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

УДК 536.75

В. В. Денисенко

Вычислительный центр СО РАН, 660036 Красноярск

Формулировка задачи. Задачи о диффузии некоторой субстанции в движущейся среде возникают в самых различных областях естествознания, например при математическом моделировании динамики ионосферных неоднородностей или процессов распространения загрязняющих примесей в атмосфере.

В соответствии с [1] уравнение диффузии при малых концентрациях примеси имеет вид

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} C) - \operatorname{div}(\rho D \operatorname{grad} C) = Q, \tag{1}$$

где C — массовая доля примеси; ρ — плотность смеси; $\mathbf{u} = (u, v)$ — вектор скорости смеси; D — коэффициент диффузии; Q — плотность источника примеси. Используются декартовы координаты x, y.

Рассматривается скалярный коэффициент диффузии, но все результаты справедливы для симметричного положительно определенного тензора D.

Уравнение (1) выполняется в двумерной области Ω с границей Γ. Неизвестной является только функция $C(x, y)$.

Если за границей находится вещество, идеально поглощающее примесь, концентрация последней равна нулю на границе. Это условие запишем в более общем неоднородном варианте:

$$C\Big|_{\Gamma} = C_0(l) \tag{2}$$

(l — координата, равная длине граничной кривой Γ).

Плотность и скорость в стационарном случае удовлетворяют уравнению неразрывности:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \tag{3}$$

Коэффициент диффузии из термодинамических соображений строго положителен, поэтому уравнение (1) эллиптическое. Оператор краевой задачи (1), (2) несимметричен, и для него несправедлив принцип минимума квадратичного функционала энергии, который для задач с симметричными операторами позволяет использовать наиболее эффективные методы приближенного и численного решения [2]. Для таких задач не формулируются принципы термодинамики неравновесных процессов о минимальности производства энтропии и т. п. [3].

Цель настоящей работы — постановка исходной задачи как задачи с симметричным положительно определенным оператором и обоснование энергетических принципов.

Аналогичные результаты для задач электропроводности, в которых несимметрия обусловлена эффектом Холла, получены в работах [4–6]. Энергетические принципы позволили создать экономичные методы численного решения задач и решить некоторые задачи физики ионосферы, которые традиционными методами не решались [7].

Описание переноса гиротропией диффузии. В силу (3) для течения можно построить функцию тока $\beta(x, y)$:

$$\rho\mathbf{u} = -\operatorname{rot}\beta \tag{4}$$

(β — z-компонента вектора $(0, 0, \beta)$, rot имеет x- и y-компоненты). Поскольку по заданному распределению $\rho\mathbf{u}$ функцию β несложно построить, будем именно ее считать заданной.

Тогда уравнению (1) можно придать форму

$$-\operatorname{div}\left(\begin{pmatrix} \rho D & -\beta \\ \beta & \rho D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial C/\partial x \\ \partial C/\partial y \end{pmatrix}\right) = Q. \tag{5}$$

Это уравнение имеет тот же вид, что и закон сохранения заряда, если C — электрический потенциал, ρD и β — педерсеновская и холловская проводимость, Q — плотность источника тока.

Тензор коэффициентов обозначим через σ. Он симметричен только при $\beta = 0$, когда все вещество покоится. Симметричная часть σ положительно определена.

Вектор

$$\mathbf{j} = -\sigma \operatorname{grad} C \tag{6}$$

в уравнении (5) аналогичен плотности электрического тока, но он не совпадает с истинным потоком примеси, дивергенция которого задана уравнением (1). Поток примеси равен $\mathbf{j} - \operatorname{rot}(\beta C)$. Разница имеет нулевую дивергенцию, и именно поэтому закон сохранения массы примеси (1) удалось записать как закон сохранения для некоторого вспомогательного процесса переноса, происходящего по закону (6).

Тензор σ, как видно из его покомпонентной записи в (5), инвариантен относительно поворота вокруг оси z, так как сам задает поворот вокруг этой оси и изотропное растяжение. Поэтому (6) — закон диффузии в гиротропной среде.

По аналогии с задачами электропроводности обозначим

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} C. \tag{7}$$

Поскольку rot от grad тождественно равен нулю, вектор $\mathbf{E}$ удовлетворяет уравнению $\operatorname{rot}_z \mathbf{E} = 0$.

Построение $\mathbf{E}$ эквивалентно отысканию $C(x, y)$, если дополнительно задать среднее значение C по Ω или по Γ. Поэтому исходную задачу (1), (2) можно заменить следующей задачей:

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = Q, \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{E} = G, \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}, \quad E_l\Big|_\Gamma = g(l). \tag{8}$$

Здесь второе уравнение для общности неоднородное, хотя обычно $G \equiv 0$. Граничное условие получено дифференцированием (2) вдоль границы. Исчезающее при этом среднее значение функции $C_0(l)$, как уже отмечалось, понадобится для построения $C(x, y)$ после решения задачи (8).

Проинтегрировав второе из уравнений (8) по всей области и граничное условие по всей границе, получим условие, необходимое для разрешимости задачи (8):

$$\iint G\,dx\,dy = \oint g\,dl. \tag{9}$$

При $G = 0$ и построенной функции g это условие выполнено автоматически. В общем случае предполагаем, что заданные функции G и g ему удовлетворяют и интегралы квадратов заданных функций Q, G, g конечны. Последнее условие можно заменить более слабым условием дивергенции [2], которое допускает наличие источников, сосредоточенных на линиях.

Задачи гиротропной диффузии вида (8) или задачи с иными граничными условиями могут возникать и безотносительно к задаче (1), (2). Выделенное для σ направление вращения вокруг оси z может быть связано с ориентированным по z вектором напряженности магнитного поля, если диффундирующие частицы имеют заряд, или с вектором угловой скорости вращения среды.

Энергетический принцип. Как и оператор исходной задачи (1), (2), оператор краевой задачи (8) несимметричен. Однако для таких задач в [4] предложена симметричная формулировка. Поскольку метод симметризации с необходимыми доказательствами подробно изложен в [6], приведем лишь формулировку результатов.

Введем две новые неизвестные функции: F, P, через которые старые неизвестные $\mathbf{j}$, $\mathbf{E}$ выражаются по формуле

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} = -\frac{1}{\sigma_0}\sigma S\sigma^{\mathrm{T}}\mathrm{grad}\, F + \sigma S \,\mathrm{rot}\, P, \tag{10}$$

где P — z-компонента вектора $(0,0,P)$; S — произвольный симметричный и равномерно положительно определенный тензор с ограниченными коэффициентами; σ_0 — обезразмеривающая константа; т означает транспонирование.

Лучшие оценки удалось получить при

$$S^{-1} = (\sigma + \sigma^{\mathrm{T}})/(2\sigma_0), \qquad \sigma_0 = \sqrt{\xi_1\xi_2}. \tag{11}$$

Здесь константы ξ_1, ξ_2 таковы, что равномерно в области Ω выполнены условия $0 < \xi_1 \leqslant \rho D$, $\rho D + \beta^2/(\rho D) \leqslant \xi_2$.

Рассматривается множество пар функций F, P, удовлетворяющих следующим условиям:

$$F\Big|_{\Gamma} = 0, \qquad \iint\limits_{\Omega} P\,dxdy = 0. \tag{12}$$

Введем энергетическое скалярное произведение

$$\left[\begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F' \\ P' \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \iint \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, F \\ \mathrm{rot}\, P \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} (1/\sigma_0^2)\sigma S\sigma^{\mathrm{T}} & -(1/\sigma_0)\sigma S \\ -(1/\sigma_0)S\sigma^{\mathrm{T}} & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\, F' \\ \mathrm{rot}\, P' \end{pmatrix} dxdy. \tag{13}$$

Энергетическим пространством задачи называется множество пар функций, удовлетворяющих условиям (12) и имеющих ограниченную энергетическую норму.

Определим функционал энергии в виде

$$W(F,P) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}\right] - \iint (FQ/\sigma_0 + PG)\,dxdy + \oint Pg(l)\,dl. \tag{14}$$

Доказано, что функционал энергии имеет единственный минимум на функциях из энергетического пространства. Такая пара функций, доставляющая функционалу энергии минимальное значение, является обобщенным решением следующей задачи:

$$\mathrm{div}\Big(-\frac{1}{\sigma_0^2}\sigma S\sigma^{\mathrm{T}}\mathrm{grad}\, F + \frac{1}{\sigma_0}\sigma S\,\mathrm{rot}\, P\Big) = Q/\sigma_0, \quad \mathrm{rot}_z\Big(-\frac{1}{\sigma_0}S\sigma^{\mathrm{T}}\mathrm{grad}\, F + S\,\mathrm{rot}\, P\Big) = G; \tag{15}$$

$$\Big(-\frac{1}{\sigma_0}S\sigma^{\mathrm{T}}\mathrm{grad}\, F + S\,\mathrm{rot}\, P\Big)_{l}\Big|_{\Gamma} = g(l). \tag{16}$$

Эти уравнения есть условия минимальности $W(F,P)$. Краевое условие (16) называется естественным, поскольку выполняется как следствие минимизации в отличие от главных краевых условий (12), которые выделяют множество допустимых функций F, P.

Таким образом, доказано существование обобщенного решения задачи (8), которое в случае гладкости является классическим решением. Единственность классического решения (8) также доказана в [6].

Формула (7) позволяет по решению задачи (8) построить функцию C с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Произвол возник из-за дифференцирования граничного условия (2) при переходе к (8). Чтобы построенная функция C была решением задачи (1), (2), следует определить эту постоянную из условия равенства средних значений правой и левой частей (2).

Проведенную симметризацию задачи можно рассматривать просто как умножение исходного оператора на сопряженный оператор справа, как это фактически и делается при введении различных потенциалов для неизвестных (обычно векторных) функций.

Непроницаемая граница. Для системы (8) возможны два основных краевых условия: задана касательная компонента $\mathbf{E}$, как в (8), или нормальная компонента $\mathbf{j}$:

$$j_n\Big|_\Gamma = q(l). \tag{17}$$

Для гиротропной диффузии эти условия отвечают основным физически реализуемым типам границ, соответствующим идеально поглощающему или непроницаемому веществу.

Для исходного уравнения диффузии в движущейся среде (1) первое условие, как уже показано, имеет тот же смысл и отвечает условию (2). Условие (17) можно записать в исходных обозначениях:

$$\left(-\rho D\,\frac{\partial C}{\partial n} + \beta\,\frac{\partial C}{\partial l}\right)\Big|_\Gamma = q(l). \tag{18}$$

Если граница непроницаемая не только для примеси, но и для основного вещества, то она является линией тока, и, значит, на ней в силу (4) функция тока постоянна, и ее можно положить равной нулю.

Тогда условие (18) принимает вид

$$-\rho D\,\frac{\partial C}{\partial n}\Big|_\Gamma = q(l).$$

Таким образом, непроницаемая граница в задаче о диффузии примеси в движущейся среде описывается граничным условием (17) в задаче о гиротропной диффузии.

В задаче (15), (16) для функций F, P при этом естественное краевое условие (16) заменяется на

$$\left(-\frac{1}{\sigma_0^2}\,\sigma S \sigma^{\mathrm{T}} \operatorname{grad} F + \frac{1}{\sigma_0}\,\sigma S \operatorname{rot} P\right)_{\boldsymbol{n}}\Big|_\Gamma = q(l),$$

а главные краевые условия (12) — на

$$P\Big|_\Gamma = 0, \qquad \iint\limits_\Omega F\,dxdy = 0.$$

Необходимым для разрешимости задачи вместо (9) становится условие

$$\iint Q\,dxdy = \oint q\,dl.$$

Смешанная краевая задача. Если граница области состоит из чередующихся участков непроницаемых и поглощающих примесь веществ, причем все непроницаемые участки лежат на одной линии тока, то исходная задача может быть сведена к смешанной краевой задаче для функций F, P.

Приведем формулировки только для случая, когда таких участков четыре, и вся неоднородность задачи определяется единственным числом ε, которое задает разность между концентрациями на двух участках границы. Общий случай смешанной краевой задачи исследован в [6].

Пусть из четырех участков $(\Gamma_1, \gamma_1, \Gamma_2, \gamma_2)$, образующих в этом порядке замкнутую границу Γ, участки Γ_1 и Γ_2 непроницаемые, а γ_1 и γ_2 поглощающие.

Даже при нулевых функциях $Q, G, q_{1,2}, q_{1,2}$ решение не будет тождественно нулевым из-за неоднородности в последнем условии:

$$C\Big|_{\gamma_2} = 0, \qquad C\Big|_{\gamma_1} = \varepsilon. \tag{19}$$

Как показано в [6], при переходе к функциям F, P в этом случае целесообразно минимизировать функционал энергии при

$$F\Big|_{\gamma_1} = \varepsilon, \quad F\Big|_{\gamma_2} = 0, \quad P\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad P\Big|_{\Gamma_2} = 0. \tag{20}$$

Для такой задачи функционал энергии состоит только из энергетического скалярного произведения.

Если минимизировать тот же функционал энергии на другом множестве функций F_1, P_1, выделяемых главными краевыми условиями

$$F_1\Big|_{\gamma_1} = 0, \quad F_1\Big|_{\gamma_2} = 0, \quad P_1\Big|_{\Gamma_1} = -\nu/\sigma_0, \quad P_1\Big|_{\Gamma_2} = 0, \tag{21}$$

то будет решена задача, в которой задана не разность между концентрациями на участках границы, как при условиях (20), а полный поток через границу γ_2:

$$\int\limits_{\gamma_2} j_n \, dl = \nu. \tag{22}$$

В силу однородности первого из уравнений (8) и непроницаемости участков границы $\Gamma_{1,2}$ этот же поток входит в область через участок γ_1.

Функции $\mathbf{E}, \mathbf{j}$, являющиеся решением задачи с условием (22), будут отличаться от решения задачи с условием (19) только общим множителем. Его несложно найти, определив поток через γ_2 в решении с заданной концентрацией (19) или разность между концентрациями на участках γ_1 и γ_2 в решении с заданным потоком (22). Поэтому достаточно решить одну из задач.

Можно вычислить отношение

$$\alpha = \Big(\int\limits_{\gamma_2} j_n \, dl\Big) \Big/ \Big(\int\limits_{\Gamma_2} E_l \, dl\Big). \tag{23}$$

Параметр α не зависит от самих значений ε или ν, поскольку $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ им пропорциональны, характеризует полную проницаемость области Ω и аналогичен проводимости тела как целого в задачах электропроводности или емкости пары тел в задачах электростатики.

Симметризация позволяет строить двусторонние оценки α [6] аналогично тому, как двусторонние оценки емкости даются принципами Дирихле и Томсона [8]. При произвольных парах функций F, P и F_1, P_1, удовлетворяющих соответственно (20) при $\varepsilon = 1$ и (21) при $-\gamma/\sigma_0 = 1$, справедливы неравенства

$$\left(\frac{1}{\sigma_0}\left[\begin{pmatrix} F_1 \\ P_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_1 \\ P_1 \end{pmatrix}\right]\right)^{-1} \leqslant \alpha \leqslant \sigma_0 \left[\begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}\right]. \tag{24}$$

Оценки тем более точны, чем лучше функции F, P и F_1, P_1 минимизируют функционал энергии.

Условие (22) сохраняет смысл для исходной задачи (1), только если участки $\gamma_{1,2}$ лежат на той же самой линии тока, что и $\Gamma_{1,2}$. В этом случае, когда основное вещество движется, нигде не пересекая границу области, для диффузии в движущейся среде сохраняются определение (23) полной проницаемости α и способ построения ее двусторонних оценок на основе (24).

Термодинамика. Энергетическое скалярное произведение (13) при совпадении элементов $(F, P) = (F', P')$ превращается в квадратичную форму и может быть записано в терминах задачи (8). Можно задать тензор S в более общем по сравнению с (11) виде: $S^{-1} = (\Theta\sigma + \sigma^{\text{т}}\Theta)/(2\sigma_0)$. Здесь Θ — произвольный симметричный тензор такой, что тензор S остается равномерно положительно определенным. В случае гиротропии σ необходима и достаточна равномерная положительная определенность Θ. Тогда

$$\left[\begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F \\ P \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sigma_0}\iint \mathbf{E}^{\text{т}}\Theta\mathbf{j}\, dxdy. \tag{25}$$

Решения задачи (8), построенные при различных Θ, совпадут в силу доказанной единственности ее решения, хотя функции F, P будут различаться.

В частности, можно задать Θ в виде произведения единичного тензора на скалярную функцию θ. Тогда интеграл (25) имеет вид

$$\frac{1}{\sigma_0}\iint (\operatorname{grad} C)^{\text{т}} \rho D \theta \operatorname{grad} C\, dxdy. \tag{26}$$

Антисимметричная часть σ в квадратичную форму не вошла. Интегралу (26) можно придать вид скорости производства энтропии

$$\frac{1}{\sigma_0}\iint (\operatorname{grad} C)^{\text{т}}\, \frac{\rho D}{T}\frac{\partial\mu}{\partial C} \operatorname{grad} C\, dxdy,$$

если задать $\theta = T^{-1}\partial\mu\,/\,\partial C$ (T — температура, μ — химический потенциал [1]). При $\theta = \partial\mu\,/\,\partial C$ этот интеграл равен скорости производства тепловой энергии в результате диффузии. Этим, кстати, объясняется слово *энергетическое* в названии скалярного произведения (13) и функционала (14).

Термодинамическая функция $\theta = \partial\mu\,/\,\partial C$ зависит от концентрации примеси, которая является решением задачи, а коэффициент в подынтегральной квадратичной форме должен быть задан до решения. Задание такой функции θ возможно, поскольку в исходную задачу для концентрации примеси функция θ не входит. Решим задачу, задав, например, $\theta = 1$. По найденным F, P построим $\mathbf{E}$ и C. Поскольку $\partial\mu\,/\,\partial C$ — известная функция C, T, теперь можно задать $\theta = \partial\mu\,/\,\partial C$. После этого будем снова решать задачу, минимизируя функционал энергии. Функционал изменился, поскольку $\theta \neq 1$. Поэтому получатся другие функции F, P, но $\mathbf{E}$ и C те же. Такое двукратное решение вряд ли целесообразно на практике, но позволяет сделать квадратичную часть функционала энергии равной скорости производства энтропии при заданном распределении температуры.

Как отмечалось в предыдущем пункте, для смешанной краевой задачи в области, ограниченной единой линией тока, функционал энергии содержит только квадратичную часть. В этом случае обоснованный энергетический принцип можно трактовать как минимальность полной скорости производства энтропии. Минимальность условная — достигается среди всевозможных распределений концентрации, представимых в соответствующем формуле (10) виде:

$$-\mathrm{grad}\, C = -\frac{1}{\sigma_0} S\sigma^{\mathrm{T}} \mathrm{grad}\, F + S\ \mathrm{rot}\, P$$

(F, P — функции, удовлетворяющие условиям (12)).

Отметим, что принцип минимальности производства энтропии для диффузии в движущейся среде не может быть справедлив в безусловной форме, так как производство энтропии не зависит от движения среды. Введение потенциалов F, P обеспечило функциям C целесообразную свободу аналогично тому, как в электростатике переход от поля к потенциалу позволил сформулировать принцип минимальности энергии поля без оговорки «среди безвихревых полей». В нашем случае само наличие функции C обеспечивает безвихревой характер $\mathrm{grad}\, C$, но оказалось, что для формулировки энергетического принципа нужно не это условие, а другое, определяемое формулой (10).

В вырожденном случае диффузии в покоящейся среде, когда тензор σ симметричен, можно взять $S = \sigma^{-1}$. Тогда задачи для F и P расщепляются, а сами F и P приобретают смысл потенциала и функции тока для диффундирующего вещества. Для задачи (1), (2) при $G = 0$ получается просто $F = C$, $P = 0$.

Обоснованный энергетический принцип можно рассматривать как обобщение принципа минимума скорости полного производства энтропии на процессы диффузии в движущейся среде, поскольку в функционал энергии дополнительно вошли только младшие члены. Однако этому принципу можно дать термодинамическую интерпретацию и в полном виде.

Принцип минимума флуктуаций. Совокупность младших членов функционала энергии (14) как всякий ограниченный линейный функционал в силу теоремы Ф. Риса может быть представлена в виде скалярного произведения на некоторый фиксированный элемент энергетического пространства F', P'.

Поэтому функционал энергии может быть преобразован к виду

$$W(F, P) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} F - F' \\ P - P' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F - F' \\ P - P' \end{pmatrix}\right] - \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} F' \\ P' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F' \\ P' \end{pmatrix}\right],$$

где сразу выделена квадратичная часть, зависящая только от разности функций.

Поскольку второй член от F и P не зависит, можно минимизировать только первый. Эта квадратичная форма может быть записана в терминах исходной задачи аналогично (26):

$$\frac{1}{\sigma_0} \iint (\mathrm{grad}\,(C - C'))^{\mathrm{T}} \rho D\theta \mathrm{grad}\,(C - C')\, dx dy + \mathrm{const}. \qquad (27)$$

Здесь C' — точное решение.

Разность $C - C'$, т. е. отличие достаточно произвольного распределения концентрации от точного решения, можно назвать флуктуацией концентрации. Полная скорость производства энтропии является мерой интенсивности флуктуаций. Неоднозначность определения энтропии, соответствующая произволу распределения температуры, должна быть устранена до минимизации. Исходя из удобства численного или приближенного решения задачи, следует задать тензор Θ равным единичному тензору, если нет особых требований к точности решения в некоторой части области [6].

Таким образом, доказанный принцип минимума функционала энергии можно трактовать как термодинамический принцип минимума флуктуаций. В пространстве потенциалов F, P минимум безусловный, а в пространстве распределений концентрации примеси — условный.

На первый взгляд этот принцип тривиален: при совпадении функций любая мера разности обращается в нуль. Если бы заранее знали функцию C', поиск точного решения по этому принципу был бы тривиальным: $C = C'$. Но функция C' не известна. Поэтому ни разность $C - C'$, ни выписанный в (27) интеграл вычислить нельзя. Зато можно минимизировать $W(F, P)$, что, как уже доказано, эквивалентно.

Заключение. Для задач о диффузии примеси в движущейся среде сформулированы имеющие такое же решение задачи о диффузии в покоящейся, но гиротропной среде. Это позволило применить созданный ранее аппарат симметризации.

Обоснован принцип минимума квадратичного функционала, который интерпретируется с точки зрения термодинамики как принцип минимума флуктуаций. Мерой интенсивности флуктуаций является производимая ими энтропия. Минимум условен в пространстве распределений концентрации и безусловен в пространстве введенных потенциалов. Предложен метод построения оценок интегральной характеристики диффузии в области, ограниченной линией тока.

Результатом симметризации является также формулировка новых краевых задач, которые в отличие от исходных обладают симметричными положительно определенными операторами, что позволяет применять наиболее эффективные методы приближенного и численного решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-05-14192). Представленные исследования стали возможными отчасти благодаря гранту RKN300, выделенному совместно Международным научным фондом и Правительством России.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
2. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехтеоретиздат, 1957.
3. **Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш.** Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977.
4. **Денисенко В. В.** Симметричная форма эллиптических уравнений, описывающих процессы переноса в гиротропных средах. М., 1980. Деп. в ВИНИТИ 05.11.80, № 4696-80.
5. **Денисенко В. В.** Вариационные методы для эллиптических краевых задач, описывающих процессы переноса с несимметричными тензорными коэффициентами // ПМТФ. 1989. № 3. С. 69–75.
6. **Денисенко В. В.** Энергетические методы для эллиптических уравнений с несимметричными коэффициентами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1995.
7. **Denisenko V. V., Zamay S. S.** Electric field in the equatorial ionosphere // Planet. and Space Sci. 1992. V. 40, N 7. P. 941–952.
8. **Золотов О. А., Казанцев В. П.** Метод вариационных неравенств в электростатике и магнитостатике // Изв. вузов. Электромеханика. 1987. № 11. С. 40–44.

Поступила в редакцию 11/IX 1995 г.,
в окончательном варианте — 23/XI 1995 г.