ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 2

УДК 539.3; 539.4

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ *

Р. А. Азаматов[1], *Э. С. Сибгатуллин*[2], *И. Г. Терегулов*[3]

[1] *АО Камский автомобильный завод, 423810 Набережные Челны*
[2] *Камский политехнический институт, 423810 Набережные Челны*
[3] *Казанский инженерно-строительный институт, 420015 Казань*

Задача прогнозирования прочности слоистого композиционного материала на основе свойств отдельных слоев и структуры композита решена для общего случая в работе [1], где были получены параметрические уравнения предельной поверхности для композита произвольной структуры. Однако применение этих уравнений в расчетной практике связано с необходимостью использования ЭВМ.

В настоящей работе предлагается методика, позволяющая решать рассматриваемую задачу более простым способом для композита структуры, где присутствуют одинаковые слои с углами ориентации $(+\varphi_j)$ и $(-\varphi_j)$, $j = \overline{1, n}$, n — число слоев. Других ограничений на структуру композита нет. Выведено уравнение поверхности прочности композита структуры $[\pm\varphi]_c$ с использованием гипотезы об однородности поля скоростей деформаций по толщине пакета слоев. Теоретические результаты сопоставлены с соответствующими экспериментальными результатами других авторов. Для прогнозирования прочности композита произвольной структуры применялась модель Фойгта [2] в теории смесей. В качестве примера решена задача о несущей способности композитной трубы карданного вала автомобиля.

1. Предельная поверхность в пространстве напряжений σ_{ij} для ортотропного монослоя во многих практически важных случаях может быть описана уравнением второй степени [3, 4 и др.]:

$$a\sigma_{xx}^2 + 2b\sigma_{xx}\sigma_{yy} + c\sigma_{yy}^2 + 2d\sigma_{xx} + 2e\sigma_{yy} + l\sigma_{xy}^2 + m\sigma_{xz}^2 + n\sigma_{yz}^2 = 1. \tag{1.1}$$

Здесь xyz — система координат, оси которой совпадают с осями ортотропии монослоя (ось z ортогональна плоскости слоя). Коэффициенты $a, \ldots, n$ уравнения (1.1) определяются через прочностные характеристики монослоя.

Введем систему координат $\xi_1\xi_2z$, связанную с элементом конструкции. Рассмотрим два совместно работающих одинаковых монослоя, прочностные свойства которых определяются уравнением (1.1). Один из слоев образует угол $(+\varphi)$ с осью ξ_1, другой слой — угол $(-\varphi)$ с той же осью. В системе $\xi_1\xi_2z$ уравнение (1.1) для слоя с углом ориентации $(+\varphi)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi^+ \equiv A(\sigma_{11}^+)^2 + 2B\sigma_{11}^+\sigma_{22}^+ + C(\sigma_{22}^+)^2 + 2D\sigma_{11}^+ + 2E\sigma_{22}^+ + L(\sigma_{12}^+)^2 + \\ + 2P\sigma_{11}^+\sigma_{12}^+ + 2R\sigma_{22}^+\sigma_{12}^+ + 2Q\sigma_{12}^+ + \\ + K(\sigma_{31}^+)^2 + 2M\sigma_{31}^+\sigma_{32}^+ + N(\sigma_{32}^+)^2 = 1,\end{aligned} \tag{1.2}$$

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-16747).

а для слоя с углом ориентации $(-\varphi)$ — вид

$$\Phi^- \equiv A(\sigma_{11}^-)^2 + 2B\sigma_{11}^-\sigma_{22}^- + C(\sigma_{22}^-)^2 + 2D\sigma_{11}^- + 2E\sigma_{22}^- + L(\sigma_{12}^-)^2 - $$
$$- 2P\sigma_{11}^-\sigma_{12}^- - 2R\sigma_{22}^-\sigma_{12}^- - 2Q\sigma_{12}^- +$$
$$+ K(\sigma_{31}^-)^2 - 2M\sigma_{31}^-\sigma_{32}^- + N(\sigma_{32}^-)^2 = 1, \quad (1.3)$$

где коэффициенты $A, \ldots, N$ линейно зависят от коэффициентов $a, \ldots, n$ уравнения (1.1) и являются функциями угла φ.

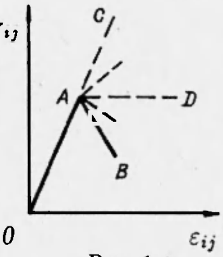

Рис. 1

На рис. 1 приведена условная диаграмма связи напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} (ломаная линия OAB). Участок OA соответствует устойчивому, а участок AB — неустойчивому состоянию материала. Считаем, что переход от устойчивого состояния в неустойчивое происходит непрерывным образом за промежуток времени Δt. Материал за это время испытывает целый спектр состояний. Виртуальной диаграммой $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$ будем считать такую, которая имела бы место, если бы удалось стабилизировать свойства материала, которые он имеет в рассматриваемый момент времени. Виртуальные диаграммы $\sigma_{ij} - \varepsilon_{ij}$ располагаются в пределах угла CAB (рис. 1, штриховые линии).

Среди виртуальных диаграмм есть и такая, которая параллельна оси ε_{ij} (линия AD). Состояние материала, соответствующее диаграмме AD, примем за предельное. В предельном состоянии материал устойчив (для него справедлив постулат Друккера [5]), т. е. $\delta\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \geq 0$. Здесь $\delta\sigma_{ij}$ — бесконечно малые приращения напряжений, $\delta\varepsilon_{ij}$ — бесконечно малые приращения деформаций. В качестве поверхности нагружения в предельном состоянии примем поверхность прочности для рассматриваемого материала, описываемую уравнением $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$. «Вектор» приращений $\delta\sigma_{ij}$ направлен по касательной к поверхности нагружения. Иными словами, в процессе разрушения материал проходит через такое состояние, для которого справедливы соотношения ассоциированного закона деформирования

$$\delta\varepsilon_{ij} = \delta\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}} \quad (1.4)$$

при условии, что за поверхность нагружения $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$ в этом состоянии принята поверхность прочности для материала. В (1.4) $\delta\lambda = \delta\lambda(\delta\varepsilon_{ij})$ — скалярная функция. Разделив обе части (1.4) на dt, можно перейти к скоростям деформаций. Полагаем, что в предельном состоянии деформации малы.

Рассмотрим случай плоского напряженно-деформированного состояния двух совместно работающих слоев ориентации $(\pm\varphi)$:

$$\dot\varepsilon_{11}^+ = \dot\varepsilon_{11}^-, \qquad \dot\varepsilon_{22}^+ = \dot\varepsilon_{22}^-, \qquad \dot\varepsilon_{12}^+ = \dot\varepsilon_{12}^-,$$
$$\sigma_{11} = 0{,}5(\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-),\ \sigma_{22} = 0{,}5(\sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^-),\ \sigma_{12} = 0{,}5(\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-). \quad (1.5)$$

Используя (1.2)–(1.4), распишем кинематические соотношения из (1.5):

$$\dot\lambda^+(A\sigma_{11}^+ + B\sigma_{22}^+ + P\sigma_{12}^+ + D) = \dot\lambda^-(A\sigma_{11}^- + B\sigma_{22}^- - P\sigma_{12}^- + D),$$
$$\dot\lambda^+(B\sigma_{11}^+ + C\sigma_{22}^+ + R\sigma_{12}^+ + E) = \dot\lambda^-(B\sigma_{11}^- + C\sigma_{22}^- - R\sigma_{12}^- + E), \quad (1.6)$$
$$\dot\lambda^+(P\sigma_{11}^+ + R\sigma_{22}^+ + L\sigma_{12}^+ + Q) = \dot\lambda^-(-P\sigma_{11}^- - R\sigma_{22}^- + L\sigma_{12}^- - Q).$$

Применяя результаты [1], для плоского напряженно-деформированного состояния слоев можно записать

$$\dot\lambda^2 = \delta_{11}\dot\varepsilon_{11}^2 + \delta_{22}\dot\varepsilon_{22}^2 + \delta_{33}\dot\varepsilon_{12}^2 + 2(\delta_{12}\dot\varepsilon_{11}\dot\varepsilon_{22} + \delta_{23}\dot\varepsilon_{22}\dot\varepsilon_{12} + \delta_{31}\dot\varepsilon_{12}\dot\varepsilon_{11}). \qquad (1.7)$$

Здесь δ_{ik} $(i, k = \overline{1,3})$ — алгебраическое дополнение (i, k)-го элемента определителя Δ [1]; на основе уравнений (1.2) и (1.3) получим

$$\Delta^+ = \begin{vmatrix} A & B & P \\ B & C & R \\ P & R & L \end{vmatrix}, \qquad \Delta^- = \begin{vmatrix} A & B & -P \\ B & C & -R \\ -P & -R & L \end{vmatrix}. \qquad (1.8)$$

Из (1.5), (1.7), (1.8) следует, что для рассматриваемого случая напряженно-деформированного состояния композита структуры $[\pm\varphi]$ имеет место равенство $\dot\lambda^+ = \dot\lambda^-$. Тогда, используя (1.6) и соотношения статики из (1.5), находим

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^+ &= \sigma_{11} + [(BR - CP)/(AC - B^2)]\sigma_{12}, \\ \sigma_{22}^+ &= \sigma_{22} + [(BP - AR)/(AC - B^2)]\sigma_{12}, \\ \sigma_{12}^+ &= \sigma_{12} - (P\sigma_{11} + R\sigma_{22} + Q)/L. \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Рассмотрим случай чистого поперечного сдвига двух совместно работающих слоев ориентации $(\pm\varphi)$:

$$\begin{aligned} &\dot\varepsilon_{31}^+ = \dot\varepsilon_{31}^-, \qquad \dot\varepsilon_{32}^+ = \dot\varepsilon_{32}^-, \\ &\sigma_{31} = 0{,}5(\sigma_{31}^+ + \sigma_{31}^-), \qquad \sigma_{32} = 0{,}5(\sigma_{32}^+ + \sigma_{32}^-). \end{aligned} \qquad (1.10)$$

Для состояния материала, определяемого соотношениями (1.10), следует, что $\dot\lambda^+ = \dot\lambda^-$. С учетом этого равенства, используя соотношения (1.2)–(1.4), (1.10), получим

$$\sigma_{31}^+ = \sigma_{31} - \frac{M}{K}\sigma_{32}, \qquad \sigma_{32}^+ = \sigma_{32} - \frac{M}{N}\sigma_{31}. \qquad (1.11)$$

Примем, что в предельном состоянии в общем случае напряженно-деформированного состояния совместно работающих двух слоев ориентации $(\pm\varphi)$ имеет место комбинация соотношений (1.5) и (1.10); тогда, подставляя (1.9) и (1.11) в (1.2), находим

$$\begin{aligned} &\frac{AL - P^2}{L}\sigma_{11}^2 + 2\frac{BL - PR}{L}\sigma_{11}\sigma_{22} + \frac{CL - R^2}{L}\sigma_{22}^2 + 2\frac{DL - PQ}{L}\sigma_{11} + \\ &\quad + 2\frac{EL - RQ}{L}\sigma_{22} + \Big(L + \frac{2BPR - CP^2 - AR^2}{AC - B^2}\Big)\sigma_{12}^2 + \\ &\quad + \Big(1 - \frac{M^2}{KN}\Big)(K\sigma_{31}^2 + 2M\sigma_{31}\sigma_{32} + N\sigma_{32}^2) - \frac{Q^2}{L} = 1. \end{aligned} \qquad (1.12)$$

Уравнение (1.12) является уравнением предельной поверхности в системе $\xi_1\xi_2 z$ для композита структуры $[+\varphi/-\varphi]_c$ (обоснование этого утверждения можно найти, например, в [6]). Следует отметить, что, выражая σ_{11}^-, σ_{22}^-, σ_{12}^-, σ_{31}^-, σ_{32}^- через σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, σ_{31}, σ_{32} и подставляя эти выражения в (1.3), опять получаем уравнение (1.12).

Запишем (1.12) в виде

$$\begin{aligned} &A_1\sigma_{11}^2 + 2B_1\sigma_{11}\sigma_{22} + C_1\sigma_{22}^2 + 2D_1\sigma_{11} + 2E_1\sigma_{22} + \\ &\quad + L_1\sigma_{12}^2 + K_1\sigma_{31}^2 + 2M_1\sigma_{31}\sigma_{32} + N_1\sigma_{32}^2 = 1, \end{aligned} \qquad (1.13)$$

где

$$A_1 = \frac{AL - P^2}{L + Q^2}, \ldots ; \qquad N_1 = \frac{L(KN - M^2)}{K(L + Q^2)}.$$

Определяя точки пересечения поверхности (1.13) с осями σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}, σ_{31}, σ_{32}, находим соответствующие прочности композита структуры $[+\varphi/-\varphi]_c$:

$$\sigma_{11}^{ut} = \frac{-D_1 + \sqrt{D_1^2 + A_1}}{A_1},$$

$$\sigma_{11}^{uc} = \frac{-D_1 - \sqrt{D_1^2 + A_1}}{A_1}, \ \ldots \ , \sigma_{32}^{u} = \pm\frac{1}{\sqrt{N_1}}. \qquad (1.14)$$

Здесь индекс u означает предельное значение соответствующего напряжения; индекс t относится к растягивающим, а индекс c — к сжимающим напряжениям.

На рис. 2 приведены результаты сравнений значений коэффициентов уравнения (1.13), определенных по вышеизложенной методике (сплошные линии) с отвечающими экспериментальными значениями из [7] (светлые и темные треугольники). Как видно, качественное соответствие результатов хорошее. Количественные расхождения связаны прежде всего с принятым в эксперименте признаком разрушения и с отклонениями от геометрических гипотез, принятых при выводе уравнения (1.12).

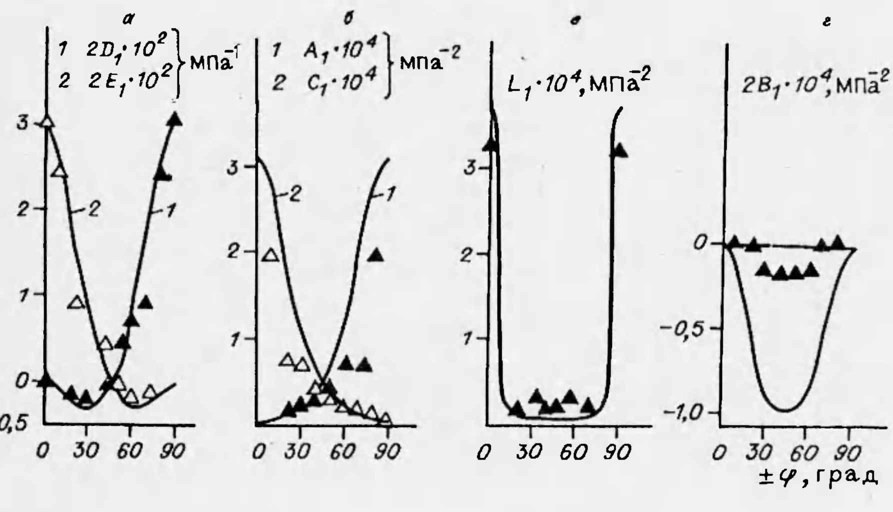

Рис. 2

Полученные результаты могут быть использованы для прогнозирования прочности гибридных композитов при наличии некоторых оговорок. При плоской деформации таких композитов, приводя внутренние элементарные силы к некоторой поверхности S_0, получим в общем случае кроме внутренних сил и внутренние моменты. Предположим, что напряжения от моментов несущественно влияют на прочностные характеристики гибридного композита на растяжение, сжатие и сдвиг в достаточно широком диапазоне изменения этих моментов. Тогда прочностные свойства композита можно прогнозировать на основе правила смесей

$$\sigma_{ij}^{u} = \sum_{k=1}^{n} \bar{h}_k \sigma_{ij}^{u(k)},$$

где σ_{ij}^{u} — прочностная характеристика композита; $\sigma_{ij}^{u(k)}$ — соответствующая прочность двух совместно работающих одинаковых монослоев с углами укладки $\pm\varphi_k$, определенная согласно (1.14); $\bar{h}_k = h_k/h$ — относительная толщина двух таких слоев; h — толщина пакета слоев.

2. Рассмотрим задачу определения предельного крутящего момента для композитной трубы карданного вала автомобиля. Расчет на прочность при статическом воздействии внешнего крутящего момента является одним из необходимых элементов полного расчета при проектировании таких валов. Один из возможных вариантов формирования структуры карданного вала показан на рис. 3, где *1* — два внутренних спирально-перекрестных слоя из стеклопластика с углами ориентации волокон ±45°, *2* — слои из стеклопластика с углами ориентации волокон ±10°, *3* — слои из высокопрочного углепластика с углами ориентации волокон $\pm\varphi_3$, *4* — защитный слой из стеклопластика с углом ориентации волокон 90° (угол ориентации волокон отсчитывается от образующей цилиндра). Композитная труба аналогичной структуры успешно применена в карданных валах легких грузовых автомобилей [8].

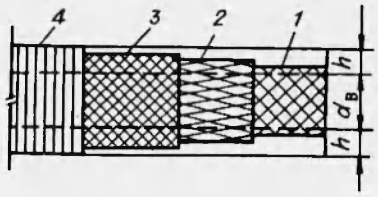

Рис. 3

Как правило, габаритные размеры вала ограничены конструктивными требованиями. Ниже в качестве примера исследована зависимость несущей способности композитной трубы от значений углов ориентации $\pm\varphi_3$ углепластиковых слоев для двух вариантов ее внутреннего диаметра и толщины стенки. На рис. 4 предельная кривая *1* соответствует следующим геометрическим параметрам трубы и композита: $d_в$ = 120 мм (внутренний диаметр трубы), h = 8 мм (толщина стенки), h_1 = 1,2 мм, h_2 = 3,6 мм, h_3 – 2,6 мм, h_4 = 0,6 мм (толщины слоев), а кривая *2* — параметрам: $d_в$ = 94 мм, h = 4 мм, h_1 = 1,4 мм, h_2 = 0, h_3 = 2,4 мм, h_4 = 0,4 мм. Прочностные характеристики стеклопластикового монослоя взяты из [9], а углепластикового монослоя — из [10].

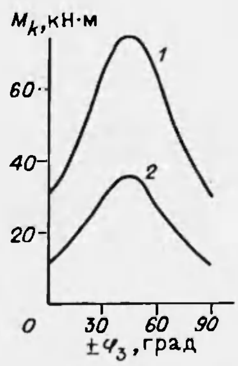

Рис. 4

Имея в своем распоряжении набор кривых, аналогичных кривым *1*, *2* на рис. 4, конструктор может легко осуществить подбор ориентировочного конструктивного варианта при проектировании карданного вала, который может быть использован как базовый для других видов расчета при проектировании. При этом необходимо стремиться к уменьшению общей массы вала и относительного объема более дорогостоящего углепластика в составе композита, одновременно удовлетворяя условиям прочности, жесткости, долговечности и другим требованиям, накладываемым условиями эксплуатации изделия.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Терегулов И. Г., Сибгатуллин Э. С.** Критерий разрушения для многослойных композитных пластин и оболочек // Механика композит. материалов. 1990. № 1.
2. **Болотин В. В., Новичков Ю. Н.** Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980.
3. **Захаров К. В.** Критерий прочности для слоистых масс // Пласт. массы. 1961. № 8.
4. **Малмейстер А. К.** Геометрия теорий прочности // Механика полимеров. 1966. № 4.
5. **Друккер Д.** О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды // Механика. 1964. № 3.
6. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
7. **Нарусберг В. Л., Тетерс Г. А.** Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. Рига: Зинатне, 1988.
8. **Цыплаков О. Г.** Конструирование изделий из композиционно-волокнистых материалов. Л.: Машиностроение, 1984.
9. **Тетерс Г. А., Упитис З. Т., Удрис А. О.** Механолюминесценция ранних и предельных стадий разрушения стеклопластика // Механика композит. материалов. 1987. № 3.
10. **Конструкционные** материалы: Справочник / Под ред. Б. Н. Арзамасова. М.: Машиностроение, 1990.

Поступила в редакцию 10/XII 1993 г.,
в окончательном варианте — 16/III 1994 г.