

УДК 622.245.44

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПЛОТНЯЮЩИХ РЕЗИНОВЫХ МЕМБРАН ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В. Т. Мамедов, Г. А. Мамедов, Дж. Н. Асланов

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,  
1010 Баку, Азербайджан  
E-mails: qasim11\_5858@mail.ru, tribologiya72@gmail.com

Исследовано напряженное состояние мембран переменной толщины при больших деформациях, а именно деформация круглых сплошных анизотропной и изотропной мембран с начальной переменной толщиной, которые находятся под действием равномерно распределенной нагрузки. Предполагается, что материалы мембраны упругие, для описания их поведения используется обобщенный закон Гука. Для решения поставленной задачи использовано уравнение равновесия элемента мембраны. Истинные главные деформации выражаются через безразмерные радиальное, кольцевое и нормальное напряжения. Получены уравнение, описывающее форму мембраны после деформации, и соответствующие граничные условия. Определены безразмерные напряжения и форма мембраны после деформации. Проведены численные расчеты при различных параметрах задачи.

**Ключевые слова:** анизотропный материал, круглая сплошная мембрана переменной толщины, равномерно распределенная нагрузка.

DOI: 10.15372/PMTF20200215

Резиновые мембраны широко применяются в качестве герметизирующего элемента [1]. Герметизирующим элементом мембраны является ее фланец [2], который может быть выполнен с утолщением (переменной толщины), называемым буртом мембраны. Бурт предназначен для более надежной герметизации соединения [3, 4], которая обеспечивается за счет деформации сжатия фланца в осевом направлении при установке его в специальное гнездо.

В работах [5–8] предложены различные способы обеспечения герметичности на основе анализа деформированного состояния рабочей поверхности круглой мембраны, а также изучены зависимости деформации от температурной нагрузки при различных значениях радиуса мембраны.

В данной работе исследуется деформация круглых анизотропной и изотропной мембран (из резиновых материалов) с начальной переменной толщиной под действием равномерно распределенной нагрузки. Толщина мембранного уплотнительного элемента после деформации считается переменной. Для изотропного материала мембраны имеет место нелинейная зависимость между напряжениями и степенными деформациями [5–7, 9], а для анизотропного — линейная зависимость в виде обобщенного закона Гука [10, 11].

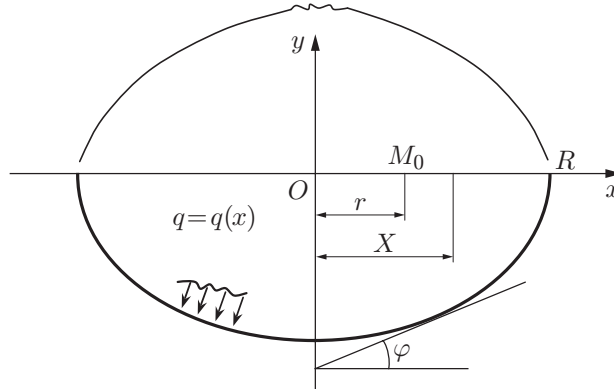


Рис. 1. Схема нагружения мембраны

Введем систему координат  $xOy$ . Начало координат находится в центре мембраны, ось  $y$  совпадает с осью симметрии, ось  $x$  перпендикулярна ей. Пусть  $R$  — радиус мембраны,  $H_1, H$  — толщина мембраны до и после деформирования,  $q$  — интенсивность симметрично распределенной нагрузки,  $\varphi$  — угол между касательной к меридиану деформированной мембраны и осью  $x$ ,  $r, X$  — начальное и текущее значения координаты материальной точки (рис. 1),  $e_1, e_2, e_3$  — условные главные деформации,  $E_1, E_2, E_3$  — истинные главные деформации. В соответствии с [12] имеем

$$e_1 = \frac{dX}{dr} \frac{1}{\cos \varphi} - 1, \quad e_2 = \frac{X}{r} - 1, \quad e_3 = \frac{H}{H_1} - 1. \quad (1)$$

Введем безразмерные величины

$$x = \frac{X}{R}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad y = \frac{Y}{R}. \quad (2)$$

Так как  $E_i = \ln(1 + e_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то для истинных главных деформаций с учетом (1), (2) получаем

$$E_1 = \frac{dx}{d\xi} \frac{1}{\cos \varphi}, \quad E_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \quad E_3 = \ln \frac{H}{H_1}. \quad (3)$$

Уравнения равновесия элемента мембраны имеют вид

$$\frac{d}{dX} (X\sigma \sin \varphi) = q(X), \quad \frac{d}{dX} (X\sigma_1) = \sigma_2. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_1, \sigma_2$  — радиальное и кольцевое нормальные напряжения.

При  $q = \text{const}$  с использованием (2) из (4) получаем

$$\sigma_1 \sin \varphi = \frac{qR}{2} x, \quad \frac{d}{dx} (x\sigma_1) = \sigma_2. \quad (5)$$

Для мембраны круглой формы имеем

$$E_1 = \frac{1}{E_{y1}} \sigma_1 - \frac{\nu_{21}}{E_{y2}} \sigma_2 - \frac{\nu_{31}}{E_{y3}} \sigma_3, \quad E_2 = -\frac{\nu_{12}}{E_{y1}} \sigma_1 + \frac{1}{E_{y2}} \sigma_2 - \frac{\nu_{32}}{E_{y3}} \sigma_3, \quad (6)$$

$$E_3 = -\frac{\nu_{13}}{E_{y1}} \sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_{y2}} \sigma_2 - \frac{1}{E_{y3}} \sigma_3.$$

Здесь  $E_{y1}, E_{y2}, E_{y3}$  — модули упругости в радиальном, кольцевом направлениях и в направлении, перпендикулярном к ним;  $\nu_{ij}$  — коэффициент поперечной деформации, являющийся отношением истинной деформации в  $j$ -м направлении к деформации в  $i$ -м направлении при условии, что сила действует в  $i$ -м направлении.

Предположим, что при больших деформациях также имеет место зависимость между постоянными  $\nu$  и  $E$

$$E_i = E_j \nu_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Полагая  $\sigma_3 = 0$ , с учетом (7) из (3), (5), (6) получаем

$$\begin{aligned} \ln \frac{dx}{d\xi \cos \varphi} = P_1 - \nu_{21} P_2, \quad P_1 \sin \varphi = Qx, \quad \ln \frac{x}{\xi} = -\nu_{12} P_1 + P_2, \\ \frac{d}{dx} (xP_1) = \frac{\nu_{21}}{\nu_{12}} P_2, \quad \ln h = \nu_{13} P_1 + \nu_{23} P_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$P_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}, \quad P_2 = \frac{\sigma_2}{E_2}, \quad Q = \frac{qR}{2HE}, \quad h = \frac{H_1(x)}{H}.$$

Форма мембраны после деформирования определяется из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (9)$$

Из системы (8) и уравнения (9) получаем

$$P_1 = \frac{\ln h - \nu_{23} \ln(x/\xi)}{\nu_{12}\nu + \nu_{13}}, \quad P_2 = \frac{\nu_{12} \ln h - \nu_{13} \ln(x/\xi)}{\nu_{12}\nu + \nu_{13}}; \quad (10)$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \left( \frac{Q(\nu_{12}\nu_{23} + \nu_{13})x}{\ln h - \nu_{23} \ln(x/\xi)} \right)^2}, \quad \frac{dx}{d\xi} = h^m \left( \frac{x}{\xi} \right)^{-n} \cos \varphi, \quad (11)$$

$$\frac{dh}{d\xi} = \frac{h}{\xi} \left[ \left( a \ln \frac{x}{\xi} - b \ln h + c \right) h^m \left( \frac{x}{\xi} \right)^{-(n+1)} \cos \varphi - c \right];$$

$$\frac{dy}{d\xi} = h^m \left( \frac{x}{\xi} \right)^{-n} \sin \varphi, \quad (12)$$

где

$$a = \frac{\nu_{21}}{\nu_{12}} \nu_{13} + \nu_{23}, \quad b = 1 - \nu_{21}, \quad m = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\nu_{12}\nu_{23} + \nu_{13}}, \quad n = \frac{\nu_{21}\nu_{13} + \nu_{23}}{\nu_{12}\nu_{23} + \nu_{13}}, \quad c = \nu_{23}.$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \xi = 0: \quad x = \xi = 0, \quad h = h_0, \quad y = y_0, \\ \xi = 1: \quad x = \xi = 1, \quad h = h_1, \quad y = 0, \quad \varphi = \varphi_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Решая систему уравнений (11) с граничными условиями (13), определяем  $x$ ,  $h$ ,  $\varphi$  как функции  $\xi$ , затем из (10), (12) определяются безразмерные напряжения  $P_1$ ,  $P_2$  и форма мембраны после деформирования. Задача решается численно. Для этого задаются коэффициенты Пуассона, параметр нагрузки  $Q$  и выбирается значение  $h_1$  при  $\xi = 1$ , удовлетворяющее условию

$$Q(\nu_{12} + \nu_{23} + \nu_{13}) < \ln h_1.$$

Система интегрируется от точки  $x = \xi = 1$  в направлении к центру мембраны. В центре мембраны проверяется выполнение условия  $x = \xi = 0$ . Если это условие не выполняется с требуемой точностью, то выбирается другое значение  $h_1$ . Процесс повторяется до тех пор, пока не будет найдено значение  $h_1$ , удовлетворяющее граничным условиям с достаточной точностью.

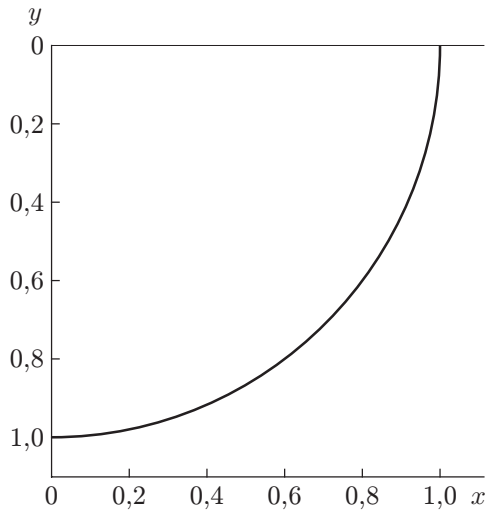


Рис. 2

Рис. 2. Форма мембраны после деформирования

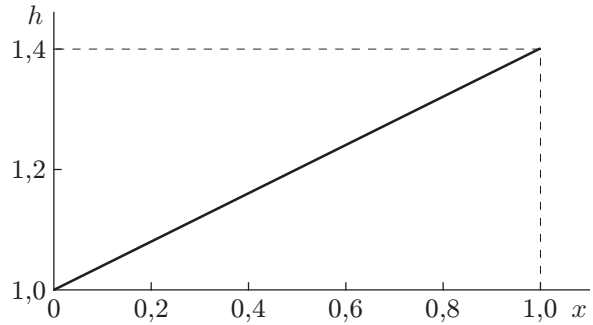


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость безразмерной начальной толщины от координаты  $x$

Рассмотрим случай, когда жесткость мембраны в окружном направлении во много раз больше, чем в меридиональном, т. е. можно считать  $E_2 = \infty$ . Тогда из системы (10)–(12) с учетом (7) получаем

$$\begin{aligned} P_1 &= \nu_{13}^{-1} \ln h, & P_2 &= 0, & \cos \varphi &= h^{-1/\nu_{13}}, \\ \frac{1}{\nu_{13}} \sqrt{1 - \frac{1}{h^{2/\nu_{13}}} \ln h} &= Qx, & y &= \frac{1}{Q} \frac{h^{2/\nu_{13}} - \nu_{13}^{-1} \ln h}{h^{1/\nu_{13}}} + c. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом граничные условия имеют вид

$$x = 0: \quad h = 1, \quad y = y_0, \quad x = 1: \quad h = h_1, \quad y = 0.$$

Решив последние два уравнения системы (14) совместно, определяем толщину и форму мембраны после деформирования при заданном значении параметра нагрузки.

На рис. 2, 3 показана форма мембраны после деформирования, а также изменение безразмерной начальной толщины ( $h = 1$ ) в результате деформирования при  $Q = 0,5788$ ,  $\nu_{13} = 0,5$ .

Рассмотрим случай мембраны из изотропного материала. Полагая  $\sigma_3 = 0$ , соотношения между главными напряжениями и истинными деформациями запишем в следующем виде [2, 4, 9]:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} &= \frac{E_1 - E_3}{E_2 - E_3}, \\ G_1 \geq G_2 \geq 0: \quad E_1 - E_3 &= \left(\frac{G_1}{2k}\right)^m, & G_2 \geq G_1 \geq 0: \quad E_2 - E_3 &= \left(\frac{\sigma_2}{2k}\right)^m. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $m, k$  — постоянные параметры.

Считая материал мембраны несжимаемым, имеем

$$E_1 + E_2 + E_3 = 0. \quad (16)$$

Уравнения равновесия элемента мембраны имеют вид

$$P_1 \sin \varphi = Qx, \quad \frac{d}{dx} (xP_1) = P_2,$$

где

$$P_1 = \frac{\sigma_1}{2k}, \quad P_2 = \frac{\sigma_2}{2k}, \quad Q = \frac{Rq}{4kH}. \quad (17)$$

Используя (3), при  $P_1 \geq P_2 \geq 0$  из уравнений (15)–(17) получаем

$$P_1 = \ln^{1/m} \frac{\xi h^2}{x}, \quad P_2 = \ln \frac{xh}{\xi} \ln \frac{\xi h^2}{x}, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{Qx}{Pn^{1/m}\xi h^2/x}}, \quad (18)$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\xi h \cos \varphi}{x}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi h \sin \varphi}{x}, \quad \frac{dh}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{h}{\xi} \left( \left( m \ln \frac{x^2}{\xi^2 h} - 1 \right) \frac{\xi^2 h}{x^2} \cos \varphi - 1 \right),$$

при  $P_2 \geq P_1 \geq 0$  —

$$P_1 = \ln \frac{\xi h^2}{x} \ln^{1/m-1} \frac{xh}{\xi}, \quad P_2 = \ln^{1/m} \frac{xh}{\xi}, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \left( \frac{Qx}{\ln(\xi h^2/x) \ln^{1/m-1}(xh/\xi)} \right)^2},$$

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{\xi h \cos \varphi}{x}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi h \sin \varphi}{x} < \varphi, \quad (19)$$

$$\frac{dh}{d\xi} = \frac{h}{\xi} \frac{(\ln(x^2/(\xi^2 h)) + 1) \ln(xh/\xi) - (1/m - 1) \ln(\xi h^2/x)}{2 \ln(xh/\xi) + (1/m - 1) \ln(\xi h^2/x)} \times$$

$$\times \frac{(\xi^2 h/x^2) \cos \varphi + [(1/m - 1) \ln(\xi h^2/x) - xh/\xi]}{2 \ln(xh/\xi) + (1/m - 1) \ln(\xi h^2/x)}.$$

Последние уравнения систем (18), (19) определяют форму мембраны после деформирования.

С учетом граничных условий (13) из (18), (19) получаем

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{\ln(\xi h^2/x)}{\ln(xh/\xi)}.$$

Введем обозначение

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \left( \frac{x}{\xi} \right) = \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \left( \frac{dx}{d\xi} \right) = \left( \frac{x}{\xi} \right)_0 = \left( \frac{dx}{d\xi} \right)_0. \quad (20)$$

Используя (20), из четвертого уравнения системы (18) или (19) получаем

$$\left( \frac{x}{\xi} \right)_0 = \left( \frac{dx}{d\xi} \right)_0 = h^{1/2};$$

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0}} \left( \frac{P_1}{P_2} \right) = \left( \frac{P_1}{P_2} \right)_0 = 1 > 0. \quad (21)$$

Учитывая условие (21) и равенство  $P_1/P_2 = 2$  при  $\xi = 1$ , можно считать, что  $P_1 > P_2$  при всех значениях  $\xi$ . Следовательно, для того чтобы решить задачу, нужно решить систему (18) при граничных условиях (13). Эта задача решается тем же способом, что и задача для случая мембраны из анизотропного материала. Приближенное решение можно получить, считая  $x = \xi$ . Тогда из (18) находим

$$P_1 = 2^{1/m} \ln^{1/m} h, \quad P_2 = 2^{1/(m-1)} \ln h,$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{h}, \quad Qx = \sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} \sqrt[m]{2 \ln h}, \quad \frac{dy}{dh} = \frac{2^{1/m}}{mQ} \frac{mh^4 \ln h + h^2 - 1}{h^2 \ln h}. \quad (22)$$

Решая совместно четвертое и пятое уравнения системы (22), определяем форму мембраны после деформирования.

Таким образом, изучены условия деформации круглой анизотропной и изотропной мембран (из резиновых материалов) с начальной переменной толщиной под действием равномерно распределенной нагрузки.

Предложены методы расчета, позволяющие определить толщину и форму анизотропной и изотропной мембран после деформирования при заданном значении параметра нагрузки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Аврущенко Б. Х.** Резиновые уплотнители. Л.: Химия. Ленингр. отд-ние, 1978.
2. **Водяник В. И.** Эластичные мембраны. М.: Машиностроение, 1974.
3. **Aslanov J. N., Sultanova A. B., Habibov I. A.** Model design for predicting the efficiency of improved valve constructions during statistical data based exploitation // Proc. of the 19th IFAC conf. on technology, culture and international stability, Sozopol (Bulgaria), 26–28 Sept. 2019. S. 1., 2019. P. 547–550. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896319325248>.
4. **Грин А. С.** Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. С. Грин, Дж. Адкинс. М.: Мир, 1965.
5. **Суворова Ю. В., Мосин А. В.** Моделирование напряженно-деформированного состояния при изгибе круглой мембраны из упругонаследственного материала // Пробл. машиностроения и автоматизации. 2006. № 1. С. 81–84.
6. **Зубов Л. М., Фам Т. Х.** Осесимметричный изгиб нелинейно-упругой кольцевой пластинки с распределенными дисклинациями // Эколог. вестн. науч. центров Черномор. эконом. сотрудничества. 2010. № 4. С. 36–43.
7. **Ганеева М. С., Моисеева В. Е., Скворцова З. В.** Нелинейный изгиб и устойчивость тонкостенных элементов конструкций, взаимодействующих с жидкостью // Пробл. энергетики. 2012. № 11/12. С. 93–102.
8. **Ганеева М. С., Ильгамов М. А., Моисеева В. Е.** Нелинейный изгиб плоских предохранительных мембран под действием давления жидкости и температуры // Изв. Уфим. науч. центра РАН. 2014. № 2. С. 41–47.
9. **Григорьев А. С.** Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, № 6. С. 827–832.
10. **Мамедов В. Т., Мустафаев Ф. Ф.** Влияние геометрии уплотнительных элементов скважинного пакера на их характеристику // Оборудование и технологии для нефтегазового комплекса. 2017. № 2. С. 13–15.
11. **Мамедов В. Т., Сулейманова А. Д.** Исследование динамического эффекта сжатия ударом резинового пакерирующего элемента при нелинейной деформации // Стр-во нефтяных и газовых скважин на суше и на море. 2017. № 3. С. 34–37.
12. **Sacks Z. S., Kinglands D. M., Lee J. F.** A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1995. V. 43, N 12. P. 1460–1463.

*Поступила в редакцию 11/II 2019 г.,  
после доработки — 31/VIII 2019 г.  
Принята к публикации 30/IX 2019 г.*