

**РАСЧЕТ ДЕЙСТВИЯ ВЗРЫВА В ХРУПКОЙ ГОРНОЙ ПОРОДЕ
(РАЗРУШЕНИЕ РАЗДАВЛИВАНИЕМ, ОБРАЗОВАНИЕМ ТРЕЩИН
СКОЛА И ОТРЫВА)**

А. Б. Багдасарян

(Ереван)

Приводится алгоритм для расчета динамики развития взрыва в твердых хрупко разрушающихся горных породах. Подробно рассматриваются стадии явления, возникающие и чередующиеся в том или ином порядке в зависимости от механических свойств породы и мощности взрыва.

1. Пусть в пространстве, заполненном изотропной хрупкой породой, имеется сферическая полость радиуса r_0 . Среда находится в покое и сжата гидростатическим давлением P_h . Полость заполнена зарядом взрывчатого вещества (ВВ), которое после детонации превращается в газ с начальным давлением P_0 . Требуется определить характер разрушения, объем разрушенной породы, параметры излучаемых очагом взрыва волн и т. д. в зависимости от свойств породы, ВВ и начального гидростатического давления.

Общий подход к решению такого рода задач изложен в работе [1]. Одним из свойств непористых хрупких твердых пород является то, что при достижении условия прочности разрушение может быть двух типов; разрушение с образованием многочисленных трещин нормального отрыва, ориентированных нормально к фронту разрушений, и разрушение с образованием большого количества трещин скола, разбивающих породу на мелкие блоки. В пористых породах разрушение может происходить и при всестороннем сжатии за счет разрушения хрупкого пористого скелета.

Рассмотрим области породы, вовлеченные в движение; первоначально будем предполагать материал неразрушенным, а затем в разрушенном состоянии после действия различного механизма разрушения.

Неразрушенная область. Считается, что неразрушенный материал описывается линейно-упругой моделью. Решение основных уравнений для этой области в случае центральной симметрии дается формулами [1]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\rho c_0^2 \left\{ \frac{f''(\zeta)}{x} + \frac{2(1-2\sigma)}{1-\sigma} \left[\frac{f'(\zeta)}{x^2} + \frac{f(\zeta)}{x^3} \right] \right\} - P_h & (1.1) \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta &= -\rho c_0^2 \left\{ \frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{f''(\zeta)}{x} - \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \left[\frac{f'(\zeta)}{x^2} + \frac{f(\zeta)}{x^3} \right] \right\} - P_h \\ V &= c_0 \left[\frac{f''(\zeta)}{x} + \frac{f'(\zeta)}{x^2} \right], \quad u = r_0 \left[\frac{f'(\zeta)}{x} + \frac{f(\zeta)}{x^2} \right] \\ \zeta &= \tau - x, \quad x = r/r_0, \quad \tau = c_0 t / r_0 \end{aligned}$$

Здесь x , τ — безразмерные координаты, c_0 — скорость продольных упругих волн в неразрушенной области, t — время, r — лагранжева координата, ρ — начальная плотность среды, σ_r , σ_θ , σ_φ — напряжения на координатных площадках, V — скорость частиц в радиальном направлении, u — радиальное смещение, σ — коэффициент Пуассона.

Область разрушения путем отрыва. Считается, что материал разбит на упругие конические стержни, которые выдерживают только радиальное напряжение, а кольцевое напряжение во всей области равно нулю [1]. При этом

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\rho c_0^2 \lambda^2 \left[\frac{f_1'(\xi) + f_2'(\eta)}{x} + \frac{f_1(\xi) + f_2(\eta)}{x^2} \right], \\ \lambda &= \frac{c_1}{c_0} \left(\frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{1-\sigma} \right)^{1/2} \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi &= 0, \quad V = \frac{c_0 \lambda}{x} [f_0'(\xi) + f_2'(\eta)], \quad c_1 = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} \\ u &= \frac{r_0}{x} \left[f_1(\xi) + f_2(\eta) + \frac{1-\sigma}{4+\sigma} P_h x^2 \right], \quad P_h \equiv \frac{P_h}{\rho c_0^2} \begin{cases} \xi = \lambda\tau - x \\ \eta = \lambda\tau + x \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь c_1 — скорость упругих волн в материале, разрушенном радиальными трещинами, E — модуль Юнга.

Область разрушения путем скола. Считается, что материал, разбитый трещинами скола, описывается законом Гука для объемной деформации

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_\theta) &= \rho c_0^2 q^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} \right) - P_h \\ q &= \frac{c_2}{c_0} - \left(\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \right)^{1/2}, \quad c_2 = \left(\frac{E}{3\rho(1-2\sigma)} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

и условием пластичности

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -2\tau_{*1} \quad (1.4)$$

Здесь c_2 — скорость звука в материале, разрушенном трещинами скола, τ_{*1} характеризует трение по поверхности трещин скола. Решение дается формулами

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\rho c_0^2 \frac{q^2}{x} [F_1''(\xi_1) + F_2''(\eta_1)] - 4\tau_{*1} \ln x + P_h, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + 2\tau_{*1} \\ V &= c_0 q \left[\frac{F_1'(\xi_1) - F_2'(\eta_1)}{x} + \frac{F_1(\xi_1) + F_2(\eta_1)}{x} \right] \\ u &= r_0 \left[\frac{F_1'(\xi_1) - F_2'(\eta_1)}{x} + \frac{F_1(\xi_1) + F_2(\eta_1)}{x^2} + \frac{4(1-\sigma)}{4+\sigma} T_{*1} x \ln x \right] \\ T_{*1} &\equiv \frac{\tau_{*1}}{\rho c_0^2}, \quad \xi_1 = q\tau - x, \quad \eta_1 = q\tau + x \end{aligned} \quad (1.5)$$

Область разрушения раздавливанием. Считается, что раздавленный материал, находящийся в пластическом течении, описывается уравнениями сплошной среды; уравнением движения

$$\rho_* \frac{dV}{dt} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (1.6)$$

уравнением неразрывности, которое с учетом принимаемого здесь условия несжимаемости среды допускает общее решение вида

$$V = c(t) / r^2 \quad (1.7)$$

где $c(t)$ — произвольная функция, и условием пластичности, принимаемым по аналогии со случаем мягких грунтов [2] в виде

$$\sigma_\theta = a\sigma_r + b \quad (1.8)$$

Здесь ρ_* — плотность раздавленного материала. Далее для упрощения математической процедуры¹ примем, что при раздавливании материал приобретает максимальную плотность, определяемую формулой

$$\rho_* = k\rho, \quad k = \text{const} \quad (1.9)$$

В формулах (1.8), (1.9) a и b — параметры, зависящие от среды и от гидростатического давления (P_h), а k — коэффициент максимального уплотнения [3].

Переходя в уравнениях (1.6) и (1.7) к безразмерным переменным x , τ и используя (1.8) и (1.9), получаем выражения для напряжений и массовых скоростей

$$\sigma_r = \rho c_0^2 \left[\frac{k}{1-2a} \frac{c(\tau)}{x} + \frac{k}{1+a} \frac{c^2(\tau)}{x^4} + c_1(\tau)x^{2(a-1)} + \frac{B}{1-a} \right] \sigma_0 = a\sigma_r + b, \quad V = c_0 \frac{c(\tau)}{x^2}, \quad B \equiv \frac{b}{\rho c_0^2} \quad (1.10)$$

где $c_1(\tau)$ — новая произвольная функция.

Неизвестные функции, входящие в выражения (1.1), (1.2), (1.5) и (1.10), должны быть найдены из граничных условий, которые будут сформулированы для каждой из стадий последовательного развития явления отдельно для пористых и непористых твердых горных пород.

2. Рассмотрим случай, когда прочность и давление в полости достаточно велики и порода непориста, т. е. когда разрушение происходит путем образования трещин скола и отрыва.

Данная задача для случая, когда разрушение происходит только путем отрыва, решена в работе [4].

Начальные данные, при которых происходит разрушение путем скола, можно определить из решения задачи по линейно-упругой модели с учетом условия разрушения [1]

$$\sigma_r - \sigma_0 = -2\tau_* \quad (2.1)$$

достигающегося на каверне в момент $\tau = \tau_1$. Эти данные должны удовлетворять условию [4]

$$P_0 \geq 2\tau_* - \sigma_* \quad (2.2)$$

где τ_* — критическое значение касательных напряжений, σ_* — критическое значение растягивающих напряжений.

Распространение взрывных волн при выполнении условия (2.2) в общем случае происходит следующими стадиями.

1. С поверхности каверны в течение времени $0 \leq \tau \leq \tau_1$ излучается упругая волна.

2. От поверхности каверны в момент $\tau = \tau_1$ начинает отходить в глубь среды сферический фронт разрушения путем скола $x = x_2(\tau)$, излучающий упругие волны: разрушение продолжается до момента $\tau = \tau_2$, когда на поверхности разрушения $x = x_2(\tau)$ со стороны неразрушенной области достигается условие разрушения путем отрыва

$$\sigma_0 = \sigma_* \quad (2.3)$$

¹ Отметим, что учет переменности уплотнения материала на фронте ударной волны принципиальных затруднений не вызывает, но уравнения и формулы окончательной математической задачи становятся громоздкими [2].

3. В момент $\tau = \tau_2$ фронт разрушения раздваивается. По неразрушенной среде распространяется упругая волна, за ней — фронт разрушения радиальными трещинами ($x = x_1(\tau)$), за ним — фронт раздавливания ($x = x_2(\tau)$).

4. В моменты $\tau = \tau_3$ и $\tau = \tau_4$ скорости фронтов $x = x_2(\tau)$ и $x = x_1(\tau)$ обращаются в нуль и разрушение прекращается. Излучение упругих волн продолжается до тех пор, пока вокруг полости не наступит равновесие.

Ниже приводим уравнения окончательных математических задач, возникающих для указанных стадий разрушения.

Решение задачи на первой стадии описывается формулами (1.1), а функция $f(\xi)$ определяется формулой

$$f(\xi) = \frac{1 - \sigma_1}{2(1 - 2\sigma)} (p_0 - p_h) \left\{ 1 - \sqrt{2(1 - \sigma)} \exp \left[\frac{2\sigma - 1}{1 - \sigma} (\xi + 1) \right] \sin \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\sqrt{1 - 2\sigma}}{1 - \sigma} (\xi + 1) + \arcsin \frac{1}{2\sqrt{1 - \sigma}} \right] \right\}, \quad p_0 = \frac{P_0}{\rho c_0^2} \quad (2.4)$$

Момент τ_1 определяется из условия (2.1), если подставить в него значения σ_r и σ_0 на каверне, используя (1.1) и (2.4). Вторая стадия описывается уравнениями (1.1) и (1.5), а неизвестные функции $f(\xi)$, $F_1(\xi_1)$, $F_2(\eta_1)$ определяются из граничных условий, которые состоят из условий на каверне и условий сопряжения на фронте разрушения, закон движения которого $x = x_2(\tau)$ также подлежит определению.

Условие на каверне получается из предположения об адиабатическом квазистационарном изменении давления продуктов взрыва при изменении объема полости [1].

Условия сопряжения на фронте $x = x_2(\tau)$ состоят из условия разрушения (2.1), выполняющегося на внешней стороне фронта, и из соотношений на поверхности сильного разрыва.

Учитывая все это, уравнения, описывающие распространение взрывных волн и разрушение скальной среды на второй стадии, получаем в виде

$$\frac{f''(\xi)}{x_2(\tau)} - 3 \left[\frac{f'(\xi)}{x_2^2(\tau)} + \frac{f(\xi)}{x_2^3(\tau)} \right] = \frac{2(1 - \sigma)}{1 - 2\sigma} T_* \quad (2.5)$$

$$F_1'(\xi) - F_2'(\eta) + \frac{F_1(\xi) + F_2(\eta)}{x_2(\tau)} + \frac{4(1 - \sigma)}{1 + \sigma} T_* x_2^2(\tau) \ln x_2(\tau) = \\ = f'(\xi) + \frac{f(\xi)}{x_2(\tau)}$$

$$f''(\xi) + \frac{2(1 - 2\sigma)}{1 - \sigma} \left[\frac{f'(\xi)}{x_2(\tau)} + \frac{f(\xi)}{x_2^2(\tau)} \right] - q^2 [F_1''(\xi) + F_2''(\eta)] - \\ - 4T_* x_2(\tau) \ln x_2(\tau) = x_2(\tau) \left\{ f''(\xi) + \frac{f'(\xi)}{x_2(\tau)} - q \left[F_1''(\xi) - F_2''(\eta) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{F_1'(\xi) + F_2'(\eta)}{x_2(\tau)} \right] \right\}$$

$$q^2 [F_1''(\xi^0) + F_2''(\eta^0)] + p_h = p_0 [1 + F_1'(\xi^0) - F_2'(\eta^0) + \\ + F_1(\xi^0) + F_2(\eta^0)]^{-3\gamma} T_* = \frac{\tau_*}{\rho c_0^2}$$

$$\xi = \tau - x_2(\tau), \quad \xi = q\tau - x_2(\tau), \quad \eta = q\tau + x_2(\tau) \\ \xi^0 = q\tau - 1, \quad \eta^0 = q\tau + 1, \quad T_* = \tau_* / \rho c_0^2$$

Здесь следовало снабдить величины ξ , ξ , η индексами, чтобы отличать их в выражениях (1.1), (1.2), (1.5), но для удобства записи индексов не ставим.

Показатель адиабаты продуктов взрыва γ берется равным 3 для больших давлений и 1,25 для умеренных и малых.

Условием, устанавливающим, что за фронтом сдвиг всюду пластический, является положительность некоторого выражения Λ , которое в рассматриваемом случае сводится к неравенству (2.6)

$$\Lambda = 2q\tau_{*1} \left\{ \frac{F_1'''(\xi) + F_2'''(\eta)}{x} + 3 \left[\frac{F_1''(\xi) - F_2''(\eta)}{x^2} + \frac{F_1'(\xi) + F_2'(\eta)}{x^3} \right] \right\} \geq 0$$

При построении решения нужно следить за знаком Λ , и из точки, где впервые $\Lambda = 0$, следует строить волну разгрузки, за которой сдвиг будет упругим.

Будем рассматривать случай, когда выполняется условие (2.6). Из решения для первой стадии можно получить условие для начальных данных

$$P_0 \geq P_h + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} \tau_* \quad (2.7)$$

при выполнении которого вторая стадия возникает непосредственно в начальный момент времени (первая стадия отсутствует), а при его невыполнении имеется и первая стадия.

Система дифференциальных уравнений (2.5) интегрируется до момента $\tau = \tau_2$, при котором на фронте $x = x_2(\tau)$ со стороны неразрушенного материала достигается условие разрушения путем отрыва (2.3).

Третья стадия описывается уравнениями (1.4), (1.2), (1.5), где неизвестные функции $f(\xi)$, $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$, $F_1(\xi_1)$, $F_2(\eta_1)$ определяются из граничных условий, которые формируются на каверне и на фронтах разрушения, законы движения $x = x_1(\tau)$ и $x = x_2(\tau)$ также подлежат определению.

С учетом (1.4), (1.2), (1.5) и указанных граничных условий получаем следующую систему функционально-дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций третьей стадии:

$$q^2 [F_1''(\xi^0) + F_2''(\eta^0)] + p_h = p_0 [1 + F_1'(\xi^0) - F_2'(\eta^0) + F_1(\xi^0) + F_2(\eta^0)]^{-3\gamma} \\ f_1'(\xi_1) - f_2'(\eta_1) + \frac{f_1(\xi_1) + f_2(\eta_1)}{x_2(\tau)} = \frac{2T_*}{\lambda^2} x_2(\tau) \quad (2.8)$$

$$F_1'(\xi_2) - F_2'(\eta_2) + \frac{F_1(\xi_2) + F_2(\eta_2)}{x_2(\tau)} + \frac{4(1-\sigma)}{1+\sigma} T_{*1} x_2^2(\tau) \ln x_2(\tau) = \\ = f_1(\xi_1) + f_2(\eta_1) + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} p_h x_2^2(\tau)$$

$$2T_* x_2(\tau) - q^2 [F_1''(\xi_2) + F_2''(\eta_2)] + 4T_{*1} x_2(\tau) \ln x_2(\tau) - \\ - p_h x_2(\tau) = x_2(\tau) \left\{ \lambda [f_1'(\xi_1) + f_2'(\eta_1)] - q \left[F_1''(\xi_2) - F_2''(\eta_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{F_1'(\xi_2) + F_2'(\eta_2)}{x_2(\tau)} \right] \right\}$$

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{f''(\xi)}{x_1(\tau)} - \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \left[\frac{f'(\xi)}{x_1^2(\tau)} + \frac{f(\xi)}{x_1^3(\tau)} \right] = - \sum_* - p_h$$

$$f'(\xi) + \frac{f(\xi)}{x_1(\tau)} = f_1(\xi) + f_2(\eta) + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} p_h x_1^2(\tau), \quad \sum_* \equiv \frac{\sigma_*}{\rho c_0^2}$$

$$\lambda^2 \left[f_1'(\xi) - f_2'(\eta) + \frac{f_1(\xi) + f_2(\eta)}{x_1(\tau)} \right] - f''(\xi) - \frac{2(1-2\sigma)}{1-\sigma} \left[\frac{f'(\xi)}{x_1(\tau)} + \right. \\ \left. + \frac{f(\xi)}{x_1^2(\tau)} \right] - p_h x_1(\tau) = x_1(\tau) \left\{ \lambda [f_1'(\xi) + f_2'(\eta)] - f''(\xi) - \frac{f'(\xi)}{x_1(\tau)} \right\}$$

где

$$\begin{aligned} \zeta &= \tau - x_1(\tau), & \xi^0 &= q\tau - 1, & \xi &= \lambda\tau - x_1(\tau) \\ \xi_1 &= \lambda\tau - x_2(\tau), & \xi_2 &= q\tau - x_2(\tau), & \eta^0 &= q\tau + 1 \\ \eta &= \lambda\tau + x_1(\tau), & \eta_1 &= \lambda\tau + x_2(\tau), & \eta_2 &= q\tau + x_2(\tau) \end{aligned}$$

Четвертая стадия возникает, если при интегрировании системы (2.5) и (2.8) в какой-то момент времени ($\tau = \tau_3$) скорость одного из фронтов обратится в нуль. После этого момента нужно условие разрушения на соответствующем фронте (первое уравнение системы (2.5) или второе и пятое уравнения системы (2.8)) заменить уравнением, соответствующим условию остановки фронта

$$x_1(\tau) = \text{const} \quad \text{или} \quad x_2(\tau) = \text{const} \quad (2.9)$$

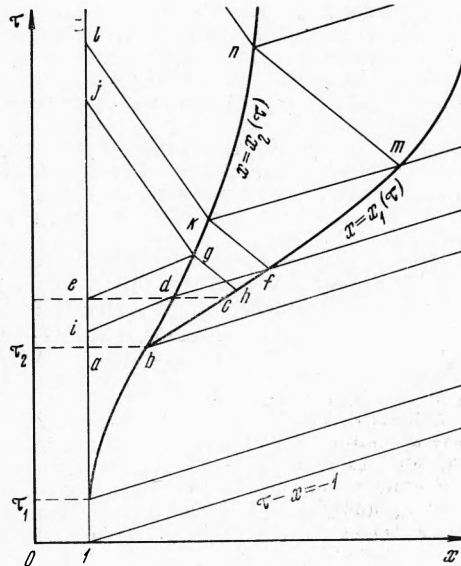
По истощении фронта $x = x_2(\tau)$ его возвратное движение невозможно, т. е. $x_2'(\tau) \geq 0$, а при истощении фронта $x = x_1(\tau)$ условие $x_1'(\tau) = 0$ нужно сохранять вплоть до $\tau = \infty$, если σ_0 на фронте $x = x_1(\tau)$ со стороны неразрушенной области сохраняется в пределах $0 < \sigma_0 < \sigma_*$.

Если же в моменте $\tau = \tau_4$ напряжение σ_0 обратится в нуль, то фронт $x = x_1(\tau)$ начнет перемещаться в область разрушения радиальными трещинами, смыкая трещины. С момента τ_4 решение описывается системой (2.8), если в ней правую часть седьмого уравнения приравнять нулю и положить $\Sigma_* = 0$.

Если фронт $x = x_1(\tau)$, совершая колебания, выйдет на истинную границу между разрушенной и неразрушенной областями, то решение нужно продолжать с учетом разрушения (третья стадия). В случае, когда в точке (x, τ) величина Λ в соотношении (2.6) обратится в нуль, то решение нужно продолжать с учетом упругой разгрузки. Уравнения для этого случая легко получить из соображений, изложенных в работе [1]. Как показали конкретные расчеты, во всех рассчитанных вариантах этой задачи условие (2.6) удовлетворяется, поэтому уравнения, описывающие упругую разгрузку, здесь не будем приводить.

Перейдем к описанию численного метода решения описанной выше задачи. Как уже отмечено, если условие (2.7) не удовлетворяется, решение нужно строить по формулам (1.1) и (2.4), а если условие (2.7) удовлетворяется, то уже с начального момента его нужно строить при помощи уравнений (2.5). В интервале $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ решение системы (2.5) строится аналогично тому, как это описано в работах [1, 4], т. е. строится асимптотическое решение системы (2.5) вблизи точки $(\tau = \tau_1, x = 1)$, система (2.5) разбивается на две части (первые три уравнения — первая часть и четвертое уравнение — вторая), для каждой из этих частей ставится задача Коши, а затем уравнения интегрируются последовательно. В первой части известной функцией из предыдущего решения (или из асимптотического решения) является $F_1(\xi)$, а во второй — функция $F_2(\eta)$.

Решение системы (2.5) вычисляется до момента $\tau = \tau_2$, после чего нужно строить решение системы (2.8). При переходе в момент $\tau = \tau_2$ к построению решения системы (2.8) нужно иметь асимптотическое решение системы (2.8) вблизи точки $\tau = \tau_2, x =$



Фиг. 1

$= x_2(\tau_2)$. Процедуру продолжения решения поясним при помощи графической схемы (фиг. 1). Пусть по схеме, описанной в работах [1, 4], построено решение в области $0 \leq \tau \leq \tau_2$, а асимптотическими формулами — в малой области $abcde$, где bc и bd — начальные участки кривых $x = x_1(\tau)$ и $x = x_2(\tau)$, а ae — достаточно малый интервал. Из точки d проводим характеристику $\xi = \lambda\tau - x = \lambda\tau_d - x_2(\tau_d)$. Она пересекает кривую $x = x_1(\tau)$ в некоторой точке f . Из этой точки проводим характеристику $\zeta = \tau - x = \tau_f - x_1(\tau_f)$. Так как решение известно в области $abcde$, то $f_1(\zeta)$ будет известно в интервале $[\xi_c, \xi_f]$.

В пятом, шестом и седьмом уравнениях системы (2.8), принимая $f_1(\xi)$ известным, получим отдельную систему для определения трех функций $f(\zeta)$, $f_2(\eta)$ и $x_2(\tau)$. Рассматривая последние как функции от $\zeta = \tau - x_1(\tau)$ и переходя в этих уравнениях от дифференцирования по ξ , η , τ к дифференцированию по переменной ζ , сводим пятое, шестое и седьмое уравнения системы (2.8) к отдельной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой ставится задача Коши.

Начальные данные определяются из асимптотического решения в точке c . Решая эту задачу численно, найдем отрезок кривой cf линии $x = x_1(\tau)$, функции $f(\zeta)$ в интервале $[\xi_c, \xi_f]$, а $f_2(\eta)$ при этом будет известна в интервале $[\eta_c, \eta_f]$. Проводим через точку e характеристику $\xi_1 = q\tau - x = q\tau_e - 1$; она пересечет линию $x = x_2(\tau)$ в точке g . Проводим затем характеристику $\eta = \lambda\tau - x = \lambda\tau_g - x_1(\tau_g)$ из точки g ; она пересечется с линией $x = x_1(\tau)$ в точке h . На отрезке dg линии $x = x_2(\tau)$ функция $f_2(\eta)$ известна из решения первой системы; там будет известна и функция $F_1(\xi_2)$, так как она известна на отрезке ie (из асимптотического решения и из решения системы (2.5)).

Из второго, третьего и четвертого уравнений системы (2.8) получаем вторую систему уравнений для определения $F_2(\eta_2)$, $f_1(\xi_1)$, $x_2(\tau)$. Рассматривая их как функции τ и переходя от дифференцирования по ξ_1 , ξ_2 , η_1 , η_2 к дифференцированию по τ , эти уравнения сводим к задаче Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными данными в точке d . Решив эту (вторую) систему численно, найдем отрезок dg линии $x = x_2(\tau)$ и функции $F_1(\xi_1)$ и $F_2(\eta_2)$ соответственно в интервалах $[\xi_{1d}, \xi_{1g}]$ и $[\eta_{1d}, \eta_{1g}]$.

Проводим теперь из точки g характеристику $\eta_1 = q\tau + x = q\tau_g + x_2(\tau_g)$; она пересечет линию $x = 1$ в точке j . В интервале $[\eta_{1a}, \eta_{1j}]$ (на отрезке aj) функция F_2 известна из начальной асимптотики и из решения второй системы. С учетом этого первое уравнение системы (2.8) при переходе к переменной $\eta^0 = q\tau + 1$ сводим к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения $F_1(\xi_2)$, для которого тоже ставится задача Коши с начальными данными в точке e .

Решив эту задачу, определим функцию F_1 в интервале $[\xi_{1e}, \xi_{1j}]$. Теперь проводим из точки f характеристику $\eta = \lambda\tau + x = \lambda\tau_f + x_2(\tau_f)$; она пересечется с линией $x = x_2(\tau)$ в точке k . Из точки k проводим характеристику $\xi_1 = q\tau - x = q\tau_k - x_2(\tau_k)$; она пересечется с линией $x = 1$ в точке l . Для интервала gk решается опять вторая система, причем $f_2(\eta_1)$ в интервале $[\eta_g, \eta_k]$ и $F_1(\xi_2)$ в интервале $[\xi_g, \xi_k]$ известны из предыдущих решений, а данные Коши берутся для точки g . На этом кончается первый цикл. Далее решение продолжается в аналогичном порядке, т. е. проводя через точку k характеристику $\eta = \text{const}$, которая пересечется с линией $x = x_1(\tau)$ в точке m , определяем область, где нужно интегрировать первую систему. Затем интегрируется вторая система на отрезке kn кривой $x = x_2(\tau)$, после чего — уравнение для $F_1(\xi_2)$ и т. д. Построение решения для поздних моментов производится по данной схеме, только в уравнениях (2.8) нужно учесть те изменения, которые описаны для четвертой стадии.

Перейдем к построению асимптотических решений вблизи моментов τ_1 и τ_2 . При решении данной задачи нужно иметь асимптотическое решение системы (2.5) вблизи точки $\tau = 0$, $x = 1$, если выполняется условие (2.7), и вблизи точки $\tau = \tau_1$, $x = 1$, если условие (2.7) не выполняется. Нужно еще иметь асимптотическое решение системы (2.8) вблизи точки $\tau = \tau_2$, $x = x_2(\tau_2)$.

В случае, когда выполнено условие (2.7), решение системы (2.5) вблизи точки $\tau = 0$, $x = 1$ разлагается в ряд Тейлора, т. е. построение асимптотического решения сводится к определению значений искомых функций и их производных в точке $(0, 1)$. Из начального условия в этом случае $u(x, 0) = 0$ имеем

$$f_0 = f_0' = 0, \quad f_0'' = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} T_* \quad (2.10)$$

т. е. в начальный момент напряжения и массовые скорости в неразрушенной области зависят только от параметров среды. Здесь и в дальнейшем

индексы 0 — значения функций и их производных в точках, соответствующих началу разрушения (точки $(0,1)$, $(\tau_1, 1)$, $(\tau_2, x_2(\tau_2))$).

Из системы (2.5) для начальной скорости фронта получаем

$$x_{20} \dot{=} \left[\frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{1-\sigma} \frac{2(1-\sigma)T_* - p_0 - p_h}{2(1+\sigma)T_* + (1-2\sigma)(4T_{*1} - 3p_0 - 3p_h)} \right]^{1/2} \quad (2.11)$$

Отсюда, в частности, следует, что при $p_0 - p_h \rightarrow \infty$, $x_{20} \dot{\rightarrow} q$, т. е. скорость распространения фронта разрушения ограничена, что и следует из условия термодинамической корректности задачи, полученного в работе [1].

Для построения асимптотического решения нужны не все значения функций и их производных, а лишь следующие комбинации, входящие в выражения (1.5):

$$F_1 \dot{-} F_2 + F_1 + F_2, \quad \bar{F}_1 \ddot{+} F_2 \ddot{+}, \quad F_1 \ddot{-} F_2 \ddot{-} + F_1 \dot{+} F_2 \dot{+} \quad (2.12)$$

В силу имеющегося произвола примем

$$F_{10} = F_{20} = F_{10} \dot{=} F_{20} \dot{=} 0 \quad (2.13)$$

Из системы (2.5) для точки $\tau = 0$, $x = 1$ легко находим

$$F_{n0} \ddot{=} = \frac{p_0 - p_h}{2q^2} - (-1)^n a_1$$

$$F_{n0} \ddot{=} = -1.5 \gamma q^2 p_0 a_1 - (-1)^n \frac{x_{20} \ddot{=} a_3 - a_2}{q^2 - x_{20} \ddot{=}^2} \quad (n = 1, 2)$$

$$f_0 \ddot{=} = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} \frac{4x_{20} \dot{-} - 3}{1-x_{20} \dot{-}} T_*$$

$$x_{20} \ddot{=} = \frac{(1-2\sigma)[q^2(a_4 - 2a_2 x_{20} \dot{-}) - a_4 x_{20} \dot{-}^2]}{[2(1-\sigma)T_* - q(1-2\sigma)a_1](q^2 - x_{20} \dot{-}^2) - 2qa_3(1-2\sigma)x_{20} \dot{-}} \quad (2.14)$$

Здесь

$$a_1 = \frac{1}{2q} \left\{ \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} T_* - \left[\frac{2(1-2\sigma)}{1-2\sigma} - p_0 - \bar{F}_h \right]^{1/2} \left[\frac{4(1-\sigma)}{1+\sigma} T_{*1} - \frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma} (p_0 - p_h) + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} \right]^{1/2} \right\}$$

$$a_2 = \frac{6p_0}{q} \gamma a_1 x_{20} \dot{-} - (q - x_{20} \dot{-})^2 F_{10} \ddot{=} + (q + x_{20} \dot{-})^2 F_{20} \ddot{=} + \frac{12(1-\sigma)}{1+\sigma} T_* x_{20} \dot{-}^2 - (1 - x_{20} \dot{-})^2 (f_0 \ddot{=} - f_0 \ddot{=})$$

$$a_3 = \frac{1}{q^2} (p_0 - p_h) - \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} T_* - \frac{4(1-\sigma)}{1+\sigma} T_{*1} \quad (2.15)$$

$$a_4 = (1 - x_{20} \dot{-}) (f_0 \ddot{=} + T_*) + 3\gamma p_0 q a_1 + 4T_{*1} x_{20} \dot{-} - q - x_{20} \dot{-} \left\{ (1 - x_{20} \dot{-}) (f_0 \ddot{=} + f_0 \ddot{=}) - \frac{3\gamma}{q} p_0 x_{20} \dot{-} - q [(q - x_{20} \dot{-}) F_{10} \ddot{=} + (q + x_{20} \dot{-}) F_{20} \ddot{=}] \right\}$$

Надобности в определении производных более высокого порядка нет, так как задачу необходимо решить численно, и нужную точность можно достичь путем выбора начального участка достаточно малым.

В случае, когда не выполняется условие (2.7), асимптотическое решение системы (2.5) вблизи точки $(\tau_1, 1)$ содержат особенность и строятся аналогично тому, как это сделано в работе [4]. Из решения для первой стадии известны f_0 и $f_0 \dot{}$.

С учетом этого и имеющегося произвола (2.12) из системы (2.5) для точки $(\tau_1, 1)$ легко определить $f_0^{\cdot\cdot}, f_0^{\cdot\cdot\cdot}, F_{10}, F_{10}^{\cdot}, F_{20}, F_{20}^{\cdot}$, а соотношение $x_{20} = 0$ следует из непрерывности σ_r на характеристике $\xi = \tau_1 - 1$ и из условия непрерывности импульса, так как $[du/dr] \neq 0$.

Функции $x_2^{\cdot\cdot}(\tau), F_1^{\cdot\cdot}(\xi), F_2^{\cdot\cdot}(\eta)$ и $f^{(IV)}(\zeta)$ имеют особенности порядка

$$x_2^{\cdot\cdot} \sim (\tau - \tau_1)^{-1/2}, \quad F_1^{\cdot\cdot} \sim (\xi - \xi_0)^{-1/2}, \quad F_2^{\cdot\cdot} \sim (\eta - \eta_0)^{-1/2}, \quad f^{(IV)} \sim (\zeta - \zeta_0)^{-1/2} \quad (2.16)$$

С учетом сказанного асимптотическое решение системы (2.5) вблизи точки $\tau = \tau_1, x = 1$ получаем в виде

$$\begin{aligned} x_2(\tau) &= 1 + b_0(\tau - \tau_1)^{3/2} + \dots & (2.17) \\ F_1(\xi_1) &= b_1 + b_2q(\tau - \tau_1) - b_0b_2(\tau - \tau_1)^{3/2} + 0.5b_3q(\tau - \tau_1)^2 + q(0.53q^2b_4 - \\ &\quad - b_0b_3)(\tau - \tau_1)^{5/2} - 0.5b_0(2.83q^2b_4 - b_0 - b_3)(\tau - \tau_1)^3 + \dots \\ F_2(\eta_1) &= b_2q(\tau - \tau_1) + b_0[b_2 - 0.4qb_5(q - b_0)](\tau - \tau_1)^{3/2} - [0.5q^2 - 0.45b_0b_5(q - \\ &\quad - b_0)](\tau - \tau_1)^2 - q[0.53q^2b_4 - b_0b_3 - 0.33qb_5(q - b_0)](\tau - \tau_1)^{5/2} - \\ &\quad - [1.42b_0b_4q^2 - 0.5b_0^2b_3 - 0.16b_5(q - b_0)](\tau - \tau_1)^3 + \dots \\ f(\zeta) &= f_0 + f_0^{\cdot}(\tau - \tau_1) - b_0f_0^{\cdot\cdot}(\tau - \tau_1)^{3/2} + 0.5f_0^{\cdot\cdot\cdot}(\tau - \tau_1)^2 + b_0(0.4 + 0.6f_0^{\cdot\cdot\cdot}) \\ &\quad (\tau - \tau_1)^{5/2} + (0.16f_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + 0.5b_0^2)(\tau - \tau_1)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= \left[\frac{8}{3} \frac{(b_5q^3 - f_0^{\cdot\cdot\cdot})(1 - \sigma) - 4qb_2(1 - 2\sigma)}{(2b_3 - f_0^{\cdot\cdot\cdot})(1 + \sigma) - 4T_{*1}(1 - \sigma)} \right]^{1/2} \\ b_1 &= f_0 + f_0^{\cdot}, \quad b_2 = \frac{1}{2q}(f_0^{\cdot} + f_0^{\cdot\cdot}), \quad b_3 = \frac{1}{2q^2}[(p_0 + b_1)^{-3\gamma} - p_h] \\ b_4 &= 0.75b_3 - \frac{3(1 - \sigma)}{4q^2} \left(\frac{2}{1 + \sigma} T_{*1} + \frac{1}{1 - 2\sigma} T_* \right), \quad f_0^{\cdot\cdot\cdot} = -3(f_0^{\cdot} + f_0^{\cdot\cdot}) \\ b_5 &= \frac{6\gamma}{q^2} b_0 p_0 (1 + b_1), \quad f_0^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{2(1 - \sigma)}{1 - 2\sigma} T_* - 3b_1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Решение системы (2.8) вблизи точки $\tau = \tau_2, x = x_2(\tau_2)$ разлагается в ряд Тейлора, т. е. задача сводится к определению значений искомых функций и их производных в этой точке. На характеристиках $\xi = \tau - x = \tau_2 - x_2(\tau_2)$ и $\xi_2 = q\tau - x = q\tau_2 - x_2(\tau_2)$ смещение и напряжения непрерывны, т. е. $f_0, f_0^{\cdot}, f_0^{\cdot\cdot}, F_{10}, F_{10}^{\cdot}, F_{10}^{\cdot\cdot}, F_{20}, F_{20}^{\cdot}, F_{20}^{\cdot\cdot}, x_{10} = x_{20}$ известны из предыдущего решения.

Из системы (2.8) легко определить величины

$$\begin{aligned} f_{10} &= f_0 + \frac{f_0^{\cdot}}{x_{20}} - \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} p_h x_{20}^2, \quad f_{20} = 0 \\ f_{n0} &= \frac{1}{2\lambda} [d_0 - \sqrt{d_1 d_2}] - (-1)^n \left(\frac{x_{20}}{\lambda^2} T_* - \frac{f_{10}}{x_{20}} \right) \quad (n = 1, 2) \\ x_{20}^{\cdot} &= \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^{1/2}, \quad x_{10}^{\cdot} = \frac{d_3}{(f_{10}^{\cdot} + f_{20}^{\cdot} - f_0^{\cdot\cdot}) x_{20} - f_0^{\cdot}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{q}{x_{20}} [(F_{10}^{\cdot\cdot} - F_{20}^{\cdot\cdot}) x_{20} + F_{10}^{\cdot} + F_{20}^{\cdot}] \\ d_1 &= F_{10}^{\cdot\cdot} + F_{20}^{\cdot\cdot} + \frac{1}{x_{20}} (F_{10}^{\cdot} - F_{20}^{\cdot}) - \frac{1}{x_{20}^2} (F_{10} + F_{20}) + \\ &\quad + \frac{4(1 - \sigma)}{1 + \sigma} T_{*1} x_{20} (1 + 2 \ln x_{20}) - \frac{2x_{20}}{\lambda} T_* - \frac{f_{20}}{x_{20}} - \frac{2(1 - \sigma)}{1 + \sigma} p_h x_{20} \\ d_2 &= q^2 (F_{10}^{\cdot\cdot} + F_{20}^{\cdot\cdot}) + 2x_{20} T_* - 4x_{20} T_{*1} \ln x_{20} + p_0 x_{20} \\ d_3 &= \lambda^2 \left(f_{10}^{\cdot} - f_{20}^{\cdot} + \frac{f_{10}}{x_{20}} \right) - f_0^{\cdot\cdot} - \frac{2(1 - 2\sigma)}{1 - \sigma} \left(\frac{f_0^{\cdot}}{x_{20}} + \frac{f_0^{\cdot\cdot}}{x_{20}^2} \right) - p_h x_{20} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Выражения производных более высоких порядков легко получить, если продифференцировать уравнения (2.8) и устроить τ к τ_2 .

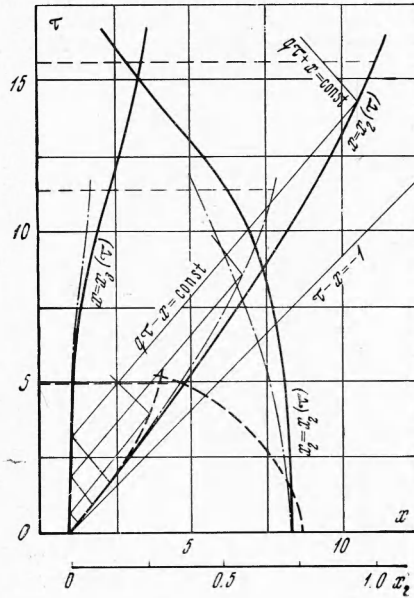
На вычислительной машине «Стрела-4» по описанному выше алгоритму была рассчитана задача о действии взрыва в разных средах с начальными давлениями в полости $P_0 = 2 \cdot 10^3 - 10^5 \text{ ат}$, до момента образования области радиальных трещин. Некоторые вспомогательные вычисления проводились на машине «Наири».

На фиг. 2 в плоскости $x\tau$ изображены результаты вычислений для случая, когда выполнено условие (2.7). Показаны закон расширения полости $x = x_3(\tau)$, закон движения фронта разрушения $x = x_2(\tau)$ и изменение скорости фронта $x_2'(\tau)$ со временем в интервале $0 \leq \tau \leq \tau_2$.

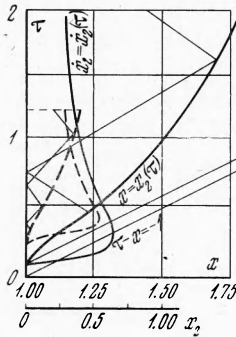
Результаты относятся к глинистому сланцу — сплошные линии ($\sigma = 0.26$, $E = 1.9 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_* = 38 \text{ кг/см}^2$, $\tau_* = 250 \text{ кг/см}^2$, $\tau_{*1} = 100 \text{ кг/см}^2$), известняку — штрих-пунктирные линии ($\sigma = 0.25$, $E = 7 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_* = 25.5 \text{ кг/см}^2$, $\tau_* = 400 \text{ кг/см}^2$, $\tau_{*1} = 150 \text{ кг/см}^2$), граниту — пунктирные линии ($\sigma = 0.3$, $E = 2.22 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_* = 45 \text{ кг/см}^2$, $\tau_* = 750 \text{ кг/см}^2$, $\tau_{*1} = 400 \text{ кг/см}^2$) [3] при взрыве с параметрами $P_0 = 10^4 \text{ ат}$, $P_h = 10 \text{ ат}$.

На фиг. 3 приведены аналогичные данные для случая, когда не выполняется условие (2.7), для взрыва в граните с параметрами $P_0 = 2000 \text{ ат}$, $P_h = 300 \text{ ат}$ (пунктирные линии) и $P_0 = 2500 \text{ ат}$, $P_h = 300 \text{ ат}$ (сплошные линии). Как и на фиг. 2, расчет выполнен только для интервала $0 \leq \tau \leq \tau_2$ с той разницей, что здесь $\tau_1 > 0$. График расширения полости на фиг. 3 не показан, так как это расширение в данном случае ничтожно мало.

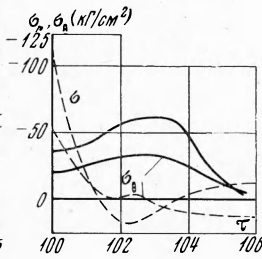
Здесь, как и в случае образования только области разрушения радиальными трещинами [4], имеют место соотношения $x_2'(\tau_1) = 0$, $x_2''(\tau_1) = \infty$, т. е. фронт разрушения начинает движение от поверхности каверны с нулевой скоростью и в короткий промежуток времени набирает максимальную скорость (при этом, конечно, выполняется ограничение на скорость фронта разрушения, полученное из требований термодинамической корректности поставленной задачи и единственности ее решения [1]), после чего $x_2'' < 0$ — скорость фронта медленно убывает.



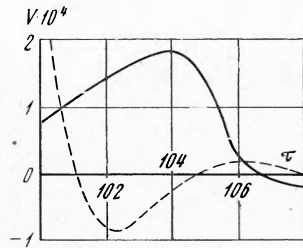
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

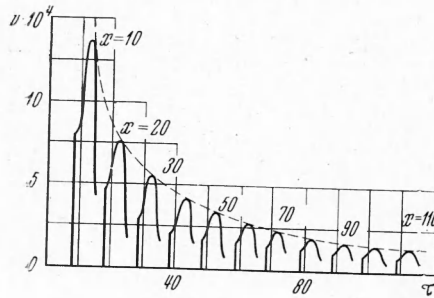


Фиг. 5

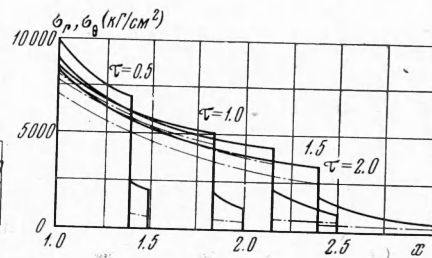
Как видно из фиг. 2 и по результатам расчетов многочисленных других вариантов, при достаточно больших начальных давлениях скорость фронта разрушения вначале убывает очень медленно по сравнению с поздними моментами. После того как скорость фронта начинает интенсивно падать, на фронте разрушения, прежде чем скорость фронта обратится в нуль, достигается условие (2.3).

На фиг. 4 и 5 изображены законы изменения напряжений и массовых скоростей во времени на расстоянии $x = 100$ при взрыве с параметрами $P_0 = 10^4 \text{ ат}$, $P_h = 10 \text{ ат}$ в граните, а также соответствующие данные для решения задачи в чисто упругой постановке.

Видно, что построенное решение существенно отличается от решения задачи в чисто упругой постановке как по форме упругой волны, так и по ее амплитуде и длительности, т. е., несмотря на то что область разрушения путем скола ($r \sim 5r_0$) мала по сравнению с рассматриваемым расстоянием ($r = 100r_0$), влияние процессов в разрушенной области на характер излучаемых упругих волн существенно. Правда, в рассматриваемом случае эффекты уменьшения амплитуды и увеличения длительности упругой волны по сравнению со случаем чисто упругого решения не столь велики, как в случаях, рассмотренных в п. 3 данной работы и в [5].



Фиг. 6



Фиг. 7

На фиг. 6 приведены графики изменения массовых скоростей во времени на различных расстояниях от центра взрыва в граните при параметрах взрыва $P_0 = 10^4 \text{ ат}$, $P_h = 10 \text{ ат}$.

На фиг. 7 приведены профили радиальных и кольцевых (штрих-пунктирные линии) напряжений в ближней зоне при взрыве с параметрами $P_0 = 10^4 \text{ ат}$, $P_h = 10 \text{ ат}$ в граните для различных моментов времени, отмеченных на фигуре.

Первый скачок напряжений соответствует приходу переднего фронта излучаемой упругой волны, а второй — прохождению фронта разрушения.

Отметим, что из анализа результатов вычислений для разных вариантов, в которых варьировались τ_* и τ_{*1} , следует, что при прочих равных условиях размеры области разрушенной породы увеличиваются с уменьшением разницы между τ_* и τ_{*1} . Если же $\tau_{*1} \rightarrow \tau_*$, то скорость фронта разрушений стремится к постоянной величине, равной c_2 . Этот случай с учетом еще условия $\sigma_* = 0$ соответствует трещиноватым горным породам. В работе [6] для этого специального случая получены некоторые точные решения.

3. Рассмотрим задачу о действии взрыва в пористых хрупких горных породах. Пористые материалы разрушаются, когда напряжения превышают критические значения напряжений на растяжение (σ_{**}), на сжатие (σ_{***}), на сдвиг ($\tau_* = 0.5\sigma_{***}$) и на гидростатическое сжатие (σ_{*0}).

Условия разрушения для пористых пород можно записать в виде

$$\sigma_\theta = \sigma_*, \quad \sigma_r + \alpha\sigma_\theta = -\sigma_{**} \quad (3.1)$$

При $\alpha = 0$ имеем разрушение, когда радиальное напряжение достигает критического сжимающего напряжения. Условие $\alpha = -1$ соответствует случаю разрушения при достижении критической величины касательными напряжениями. При $\alpha = 2$ материал разрушается, когда напряжения достигают критического значения напряжений на всестороннее сжатие.

Если начальное давление в полости велико, то в начальный момент времени по породе пойдет сверхзвуковой сферический ударный фронт раздавливания. Скорость фронта раздавливания со временем будет падать, и в момент, когда скорость станет равной скорости звука в неразрушенном материале, фронт начнет излучать упругую волну в неразрушенный материал. Если в среде, не разрушенной раздавливанием, возникают растягивающие напряжения, достигающие критического значения σ_* , то по среде пойдет фронт разрушения трещинами отрыва.

В этот момент фронт разрушения раздваивается — вперед идет фронт разрушения трещинами отрыва, который разрушает материал радиальными трещинами, за ним идет фронт раздавливания, который дробит материал на мелкие блоки. Излучение упругих волн в неразрушенный материал будет продолжаться, и со временем фронты разрушений истощатся, т. е. их скорости обратятся в нуль. Излучение упругих волн окрестностью взрывной полости будет продолжаться до тех пор, пока там не наступит равновесие.

Неизвестные функции $f(\zeta)$, $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$, $c(\tau)$, $c_1(\tau)$ в выражениях (1.1), (1.2) и (1.10), законы распространения фронтов разрушения и закон расширения каверны определяются из граничных условий. Ниже выводим окончательные системы уравнений для отдельных последовательных стадий разрушения.

Первая стадия. По невозмущенной среде распространяется сверхзвуковой ударный фронт раздавливания. Здесь неизвестными функциями являются закон расширения каверны $r = r_3(t)$, закон распространения фронта раздавливания $r = r_2(t)$, а также $c(\tau)$ и $c_1(\tau)$. Эти функции определяются из граничных условий

$$\begin{aligned} r_3 \dot{} &= V|_{r=r_3}, & \sigma_r|_{r=r_3} &= -P_0(r_3/r_0)^{-3\gamma} \\ V|_{r=r_2} &= \frac{k-1}{k} r_2 \dot{} & \sigma_r|_{r=r_2} &= -P_h - \rho V r_2 \dot{} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Переходя в (3.2) к безразмерным координатам x, τ и учитывая выражения для σ_r и V из (1.10), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x_3^2(\tau) x_3 \dot{}(\tau) &= c(\tau), & x_2^2(\tau) x_2 \dot{}(\tau) &= \frac{k}{k-1} c(\tau) \\ \frac{k}{1-2a} c \dot{}(\tau) + \frac{k}{1+a} c^2(\tau) x_3^{-3}(\tau) + c_1(\tau) x_3^{2a-1}(\tau) &= p_0 x_3^{-3\gamma-1}(\tau) - \frac{B}{1-a} x_3(\tau) \\ \frac{k}{1-2a} c \dot{}(\tau) + \frac{k}{1+a} c^2(\tau) x_2^{-3}(\tau) + c_1(\tau) x_2^{2a-1}(\tau) &= \\ &= -\left(p_h + \frac{B}{1-a}\right) x_2(\tau) - \frac{k-1}{k} x_2 \dot{}^2(\tau) x_2(\tau) \end{aligned} \quad (3.3)$$

с начальными условиями

$$x_3(0) = x_2(0) = 1, \quad c(0) = \left(\frac{k-1}{k} (p_0 - p_h)\right)^{1/2} \quad (3.4)$$

Начальные скорости расширения каверны и фронта раздавливания соответственно определяются формулами

$$x_3 \dot{}(0) = \left(\frac{k-1}{k} (p_0 - p_h)\right)^{1/2}, \quad x_2 \dot{}(0) = \left(\frac{k}{k-1} (p_0 - p_h)\right)^{1/2} \quad (3.5)$$

Решение системы (3.3) верно в области $x_2 \dot{}(\tau) \geq 1$. В момент $\tau = \tau_1$, когда скорость фронта раздавливания становится равной скорости распространения упругих волн в неразрушенной среде c_0 , начинается вторая стадия, и решение нужно продолжать с учетом излучения упругих волн.

Вторая стадия. По неразрушенному материалу распространяется упругая волна, за ней — фронт раздавливания. Здесь неизвестными функциями являются $x_3(\tau)$, $x_2(\tau)$, $c(\tau)$, $c_1(\tau)$, $f(\zeta)$. Эти функции найдутся из следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} r_3 \dot{} &= V|_{r=r_3}, & \sigma_r|_{r=r_3} &= -P_0(r_3/r_0)^{-3\gamma}, & V_2 - V_1 &= (\rho_2 - \rho_1) \rho_2^{-1} r_2 \dot{} \\ \sigma_{r2} - \sigma_{r1} &= \rho_1 r_2 \dot{} (V_1 - V_2), & \sigma_{r1} + \alpha \sigma_{01} &= -\sigma_{**} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Индексами 1 и 2 обозначены величины соответственно перед и за фронтом разрушения. Подставим выражения σ_r , σ_0 и V из (1.1), (1.10) в (3.6) в безразмерных координатах x , τ с учетом (1.9) и формулы

$$\rho_1 = \rho \left(1 - \frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{2u_1}{r} \right) \quad (3.7)$$

В результате получим следующую систему дифференциальных уравнений для определения пяти неизвестных функций

$$\begin{aligned} \frac{k}{1-2a} c'(\tau) + \frac{k}{1+a} c^2(\tau) x_3^{-3}(\tau) + c_1(\tau) x_3^{2a-1}(\tau) = \\ = -p_0 x_3^{-3\gamma-1}(\tau) - \frac{B}{1-a} x_3(\tau) \\ x_3^2(\tau) x_3'(\tau) = c(\tau) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} c(\tau) - f''(\xi_2) - \frac{f'(\xi_2)}{x_2(\tau)} = \frac{x_2(\tau)}{k} [(k-1)x_2(\tau) - f''(\xi_2)] \\ \frac{k}{1-2a} c'(\tau) + \frac{k}{1+a} c^2(\tau) x^{-3}(\tau) + c_1(\tau) x_2^{2a-1}(\tau) + \frac{B}{1-a} x_2(\tau) + f''(\xi_2) + \\ + \frac{2(1-2\sigma)}{1-\sigma} \left[\frac{f'(\xi_2)}{x_2(\tau)} + \frac{f(\xi_2)}{x_2^2(\tau)} \right] + p_h x_2(\tau) = -x_2^2(\tau) [(k-1)x_2'(\tau) - f''(\xi_2)] \\ \frac{1-\sigma(1-\alpha)}{1-\sigma} f''(\xi_2) + \frac{(1-2\sigma)(2-\alpha)}{1-\sigma} \left[\frac{f'(\xi_2)}{x_2(\tau)} + \frac{f(\xi_2)}{x_2(\tau)} \right] = \\ = -[\Sigma_{**} + (1+\alpha)p_h] x_2(\tau), \quad \xi_2 = \tau - x_2(\tau), \quad \Sigma_{**} = \frac{\sigma_{**}}{\rho c_0^2} \end{aligned}$$

Если выполняется условие

$$p_0 \geq \frac{k-1}{k} + \frac{p_h}{k} + \frac{k-1}{k} \Sigma_{**} \quad (3.9)$$

то начальные данные для системы (3.8) берутся из решения системы (3.3) в точке $\tau = \tau_1$, $x = x_2(\tau)$. А если условие (3.9) не выполняется, т. е. вторая стадия возникает непосредственно в начальный момент (фронт раздавливания будет дозвуковым), то начальными условиями будут

$$\begin{aligned} f(-1) = f'(-1) = 0, \quad x_2(0) = x_3(0) = 1 \\ c(0) = \Sigma_{**} - p_h + \left[(p_0 - \Sigma_{**}) \left(\frac{k-1}{k} - \frac{\Sigma_{**} - p_h}{k} \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решение системы (3.8) строится либо до момента, когда кольцевое напряжение на внешней стороне фронта раздавливания становится критическим, либо до момента, когда фронт раздавливания истощается.

Если сначала осуществится вторая из этих возможностей, то, так как возвратное движение фронта раздавливания невозможно, в дальнейшем этот фронт нужно заменить контактным разрывом. Из системы (3.8) в этом случае нужно исключить пятое уравнение (условие разрушения) и заменить его уравнением

$$x_2(\tau) = \text{const} \quad (3.11)$$

Полученное таким образом решение будет описывать распространение упругих волн в неразрушенной области и пластическое течение в области раздавливания при отсутствии новых разрушений среды. Это решение нужно продолжать до момента, когда на контактном разрыве со стороны неразрушенного материала возникает зона радиальных трещин. Такое продолжение решения для горных пород маловероятно, так как для них $\sigma_* \ll \sigma_{**}$. Оно может иметь место в материалах, для которых σ_* и σ_{**} соизмеримы (пример — органическое стекло [7]). Рассмотрим первый

случай, когда зона радиальных трещин возникает при $x_2(\tau) > 0$. Соответствующий момент τ_2 определяется из уравнения

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} f''(\xi_*) - \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \left[\frac{f'(\xi_*)}{x_2(\tau_2)} + \frac{f(\xi_*)}{x_2^2(\tau_2)} \right] = -(p_h + \Sigma_*) x_2(\tau_2) \quad (3.12)$$

$$\xi_* = \tau_2 - x_2(\tau_2), \quad \Sigma_* = \frac{\sigma_*}{\rho c_0^2}$$

В этот момент возникает третья стадия.

Третья стадия. По неразрушенному материалу распространяется упругая волна, отделенная от зоны радиальных трещин фронтом $x = x_1(\tau)$: за зоной радиальных трещин расположена зона раздавливания, границей между ними является фронт раздавливания $x = x_2(\tau)$. Здесь $x_3(\tau)$, $x_2(\tau)$, $x_1(\tau)$, $c_1(\tau)$, $f(\xi)$, $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$ — неизвестные функции, которые должны быть найдены из следующих граничных условий:

условия на каверне

$$r_3 \dot{=} V|_{r=r_3}, \quad \sigma_r = -P_v (r_3/r_0)^{-3\gamma} \quad (3.13)$$

условия на фронте раздавливания

$$V_2 - V_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} r_2 \dot{;}, \quad \sigma_{r_2} - \sigma_{r_1} = \rho_1 r_2 \dot{;} (V_1 - V_2), \quad \sigma_{r_1} = \sigma_{**} \quad (3.14)$$

условия на фронте разрушения радиальными трещинами

$$u_1 = u_2, \quad \sigma_{r_2} - \sigma_{r_1} = \rho r_1 \dot{;} (V_1 - V_2), \quad \sigma_{\theta 1} = \sigma_* \quad (3.15)$$

Записав (3.13) — (3.15) в безразмерных координатах x, τ и подставляя соответствующие выражения из формул (1.4), (1.2), (1.10), получим следующие функционально-дифференциальные уравнения для определения неизвестных функций:

$$\frac{k}{1-2a} c \dot{;}(\tau) + \frac{k}{1+a} c^2(\tau) x_3^{-3}(\tau) + c_1(\tau) x_3^{2a-1}(\tau) + \frac{B}{1-a} x_3(\tau) = -\rho_0 x_3^{-3\gamma-1}(\tau)$$

$$x_3^2(\tau) x_3 \dot{;}(\tau) = c(\tau), \quad c(\tau) - \lambda x_2(\tau) [f_1 \dot{;}(\xi_2) + f_2 \dot{;}(\eta_2)] =$$

$$= \frac{x_2 \dot{;}(\tau)}{k} \left\{ (k-1) x_2^2(\tau) - [f_1 \dot{;}(\xi_2) - f_2 \dot{;}(\eta_1)] x_2(\tau) - f_1(\xi_2) - \right.$$

$$\left. - f_2(\eta_2) - \frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma} p_h x_2^2(\tau) \right\}$$

$$\frac{k}{1-2a} c \dot{;}(\tau) + \frac{k}{1+a} c^2(\tau) x_2^{-3}(\tau) + c_1(\tau) x_2^{2a-1}(\tau) + \left(\Sigma_{**} + \frac{B}{1-a} \right) x_2(\tau) =$$

$$= x_2 \dot{;}(\tau) \left\{ \lambda [f_1 \dot{;}(\xi_2) + f_2 \dot{;}(\eta_2)] - \frac{c(\tau)}{x_2(\tau)} \right\} \left[1 + \frac{f_1 \dot{;}(\xi_2) - f_2 \dot{;}(\eta_2)}{x_2(\tau)} - \right.$$

$$\left. - \frac{f_1(\xi_2) + f_2(\eta_2)}{x_2^2(\tau)} - \frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma} p_h \right]$$

$$f_1 \dot{;}(\xi_2) - f_2 \dot{;}(\eta_2) + \frac{f_1(\xi_2) + f_2(\eta_2)}{x_2(\tau)} = \frac{\Sigma_{**}}{\lambda^2} x_2(\tau) \quad (3.16)$$

$$\lambda^2 \left[f_1 \dot{;}(\xi_1) - f_2 \dot{;}(\eta_1) + \frac{f_1(\xi_1) + f_2(\eta_1)}{x_1(\tau)} \right] - f''(\xi_1) - \frac{2(1-2\sigma)}{1-\sigma} \left[\frac{f'(\xi_1)}{x_1(\tau)} + \frac{f(\xi_1)}{x_1^2(\tau)} \right] -$$

$$- p_h x_1(\tau) = x_1 \dot{;}(\tau) \left\{ \lambda [f_1 \dot{;}(\xi_1) + f_2 \dot{;}(\eta_1)] - f''(\xi_1) - \frac{f'(\xi_1)}{x_1(\tau)} \right\}$$

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} f''(\xi_1) - \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \left[\frac{f'(\xi_1)}{x_1(\tau)} + \frac{f(\xi_1)}{x_1^2(\tau)} \right] = -(\Sigma_* + p_h) x_1(\tau)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \tau - x_1(\tau), & \xi_1 &= \lambda\tau - x_1(\tau), & \xi_2 &= \lambda\tau - x_2(\tau) \\ \eta_1 &= \lambda\tau + x_1(\tau), & \eta_2 &= \lambda\tau + x_2(\tau) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Уравнения (3.16), описывающие разрушение и распространение взрывных волн на третьей стадии, интегрируются до момента, когда скорость одного из фронтов разрушения обращается в нуль ($x_1' = 0$ или $x_2' = 0$), и начинается четвертая стадия. Более вероятно, что первым истощится фронт раздавливания.

Четвертая стадия. По неразрушенному материалу распространяется упругая волна, за ней — волна радиальных трещин, границей является ударная волна. Фронт раздавливания остановился, граница между зоной раздавливания и зоной радиальных трещин является контактным разрывом. Пластическое течение продолжается, а нового раздавливания среды не происходит.

После момента $\tau = \tau_3$ ($x_2'(\tau_3) = 0$) возвратного движения фронта $x = x_2(\tau)$ не может быть, и нужно пятое уравнение системы (3.16) заменить уравнением (3.11).

Уравнения четвертой стадии интегрируются до момента $\tau = \tau_4$, когда истощается фронт разрушения путем отрыва ($x_1'(\tau_4) = 0$) и начинается пятая стадия.

Пятая стадия. По неразрушенному материалу распространяется упругая волна, фронт разрушения радиальными трещинами также остановился, границами между тремя зонами являются контактные разрывы, пластическое течение продолжается, никаких новых разрушений среды не происходит.

Система уравнений этой стадии получается из системы уравнений четвертой стадии, если восьмое уравнение (условие разрушения путем отрыва) заменить уравнением

$$x_1(\tau) = \text{const} \quad (3.18)$$

Если кольцевое напряжение со стороны неразрушенного материала, падающая со значения σ_* , стремится к своему положительному асимптотическому значению, то решение пятой стадии можно продолжить до $\tau = \infty$, а если в момент $\tau = \tau_5$ оно обращается в нуль и меняет знак, то наступает шестая стадия и решение нужно продолжать иначе.

Шестая стадия. Все происходит так же, как и на пятой стадии, только фронт разрушения радиальными трещинами совершает возвратное движение в разрушенную область, смыкая трещины.

Система уравнений в этой стадии получается из системы уравнений четвертой стадии, если приравнять к нулю левую часть седьмого из уравнений системы (3.16) и положить там $\Sigma_* = 0$. Решение можно продолжать до $\tau = \infty$, если новых разрушений среды не происходит. Если же они возникнут, т. е. в момент $\tau = \tau_6$ граница $x = x_1(\tau)$ выйдет на истинную границу разрушения, то нужно интегрировать уравнения четвертой стадии, затем пятой и т. д.

Таким образом, получены системы уравнений для всех стадий. В зависимости от свойств породы, начального давления в породе и свойств ВВ очередность некоторых стадий может меняться.

Описанную задачу, вообще говоря, можно решать только численно с использованием ЭВМ. Для первой и второй стадий имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3), (3.8), для которых ставится задача Коши. Для третьей, четвертой и шестой стадий имеем систему функционально-дифференциальных уравнений. По методам, описанным выше, эти системы сводятся к последовательности за-

дач Коши для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. На пятой стадии получается система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, решение которой строится аналогично.

Для продолжения решения на третьей стадии необходимо иметь асимптотическое решение системы (3.16) вблизи точки $\tau = \tau_2, x = x_2(\tau_2)$. Здесь асимптотическое решение не имеет особенностей, и искомые функции разлагаются в степенные ряды Тейлора. При построении асимптотического решения нужно определить значения производных искомых функций в точке $\tau = \tau_2, x = x_2(\tau_2)$ до второго порядка. Надобности в определении производных более высоких порядков нет, так как нужную точность при численном решении можно обеспечить выбором достаточно малой начальной окрестности. Асимптотические формулы здесь не приводятся ввиду их размерной громоздкости.

Для вычислительной машины «Стрела-4» была составлена программа, которая позволяет единым счетом вычислить решение задачи от начала до конца, т. е. по ходу вычислений программа определяет возникающую очередную стадию и интегрирует соответствующие ей системы уравнений, вычисляет асимптотические решения в начале появления третьей стадии, устраняет неопределенности, возникающие в системах (3.3) и (3.8) для начального момента взрыва и т. д. Вычисление прекращается, когда искомые функции на пятой или шестой стадиях перестают меняться для принятой точности счета.

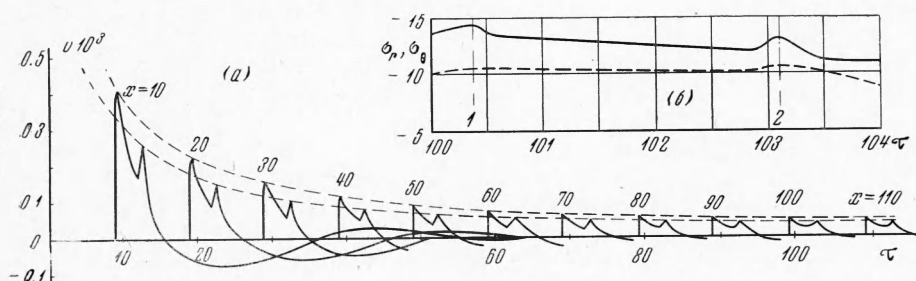
По этой программе были проведены вычисления для некоторых вариантов взрыва в песчанике. Рассчитано также решение задачи о взрыве в органическом стекле с использованием данных работы [7] (см. [5]). Результаты вычислений находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными [7].

На фиг. 8 приведена рассчитанная картина распространения фронтов разрушения и расширения каверны в плоскости $x\tau$ для песчаника при следующих начальных данных [3]:

$$\begin{aligned} P_0 &= 5 \cdot 10^3 \text{ ат}, & P_h &= 10 \text{ ат}, & E &= 10^5 \text{ кг/см}^2 \\ \sigma &= 0.08, & \sigma_* &= 30 \text{ кг/см}^2, & \sigma_{**} &= 500 \text{ кг/см}^2 \\ k &= 1.3, & a &= 0.4, & b &= 10 \text{ кг/см}^2, \alpha = 2 \end{aligned}$$

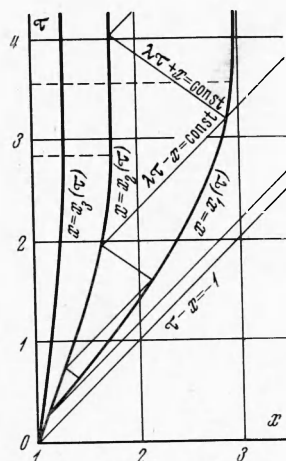
Первая и шестая стадии в данном случае отсутствуют.

На фиг. 9, а приведена зависимость массовой скорости от времени на разных расстояниях от центра взрыва, а на фиг. 9, б — график изменения кольцевого (пунктирная линия) и радиального (сплошная линия) напряжений на расстоянии $x = 100$ при тех же начальных условиях.



Фиг. 9

Как видно из фиг. 9, а, на всех расстояниях зависимость массовой скорости от времени имеет два максимума: первый соответствует появлению фронта разрушения радиальными трещинами, а второй — его истощению. Пунктирными линиями показаны законы затухания максимумов массовых скоростей. Сечениями 1—1 и 2—2 на фиг. 9, б соответственно обозначены моменты прихода упругих возмущений, излученных в моменты возникновения фронта разрушения радиальными трещинами, и истощения этого фронта.



Фиг. 8

Сопоставление построенного решения с решением упругой задачи здесь так [же, как и для случая непористых горных пород и в оргстекле, показывает, что излученная из очага взрыва упругая волна затухает более интенсивно (для упругого решения $\max |\sigma_r|_{x=100} = 50 \text{ ат}$, а на фиг. 9, б $\max |\sigma_r|_{x=100} \approx 10 \text{ ат}$) и имеет большую на порядок длительность, чем в упругом решении.

Таким образом, сделанные в работе [8] выводы о характере влияния эффектов разрушения и пластического течения в малой окрестности ($x \sim 3 \div 6$) очага взрыва на параметры излучаемой упругой волны на больших расстояниях полностью применимы и в рассматриваемом случае.

Автор благодарит С. С. Григоряна за постоянное внимание к данной работе.

Поступила 13 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
2. Григорян С. С. К решению задачи о подземном взрыве в мягких грунтах. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
3. Талобр Ж. Механика горных пород. М., Госгортехиздат, 1960.
4. Багдасарян А. Б. Расчет действия взрыва в хрупких горных породах. Случай разрушения с образованием трещин отрыва. ПМТФ, 1970, № 3.
5. Багдасарян А. Б., Григорян С. С. О действии взрыва в органическом стекле. ПМТФ, 1967, № 3.
6. Багдасарян А. Б. Точные решения задачи о действии взрыва сосредоточенного заряда в хрупкой твердой среде. Изв. АН АрмССР, Механика, 1968, т. 21, № 5, 6.
7. Гоголев М. В., Мыркин В. Г., Пархомов Г. В., Ханукаев А. Н. О ближней зоне взрыва сосредоточенного заряда. Тр. 5-й сессии Уч. совета по нар.-хоз. испол. взрыва, Фрунзе, 1965.