

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Радиально-щелевая струя в пространстве, затопленном той же жидкостью.— «Труды Ленингр. политехн. ин-та», 1953, № 5.
2. Пуккер М. С. Ламинарная несжимаемая струя, бьющая из радиального диффузора вдоль стенки.— ПММ, 1954, т. 18, вып. 6.
3. Шахов В. Г. Слабозакрученная радиально-щелевая струя, истекающая из кольцевого сопла конечного диаметра.— ИФЖ, 1969, т. 16, № 3.
4. O'Nan M., Schwarz W. H. The swirling radial free jet.— «Appl. Scient. Res.», 1965, vol. A 15, N 4—5.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
6. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
7. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью.— ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
8. Акатнов Н. П. Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки.— «Труды Ленингр. политехн. ин-та», 1953, № 5.

УДК 532.5

### УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ В УПРУГОМ КАНАЛЕ

О. Ю. Цвелодуб

(Новосибирск)

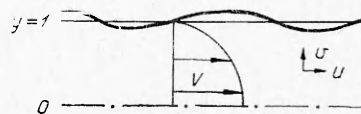
Устойчивость ламинарного пограничного слоя на поверхности мембранного типа рассматривалась в [1, 2], а устойчивость течения Пуазейля между мембранами — в [3, 4]. В [5] в качестве границ канала брались стенки с линейной связью между возмущением давления и нормальной деформацией поверхности. Устойчивость профиля  $V = \sin y (0 \leq y \leq \pi)$  численно рассматривалась в [6]. В данной работе исследуется устойчивость течения Пуазейля в канале, стенками которого являются упругие пластинки. В отличие от работ [3, 5, 6] наряду с пульсациями давления так же, как в [4], учтены пульсации трения на стенках канала. Показано, что при их учете происходит существенная перестройка областей неустойчивости. Найдена область неустойчивости, существующая при любых конечных числах Рейнольдса.

Рассматривается поток в канале со стенками  $y = \pm 1$ , профиль скорости которого  $V \equiv V_x = 1 - y^2$  (фиг. 1). Для нормальных и касательных смещений верхней пластинки имеем [7]

$$(1) \quad \rho_0 h \partial^2 \tilde{\xi} / \partial t^2 = -Eh^3 / [12(1 - \sigma^2)] \partial^4 \tilde{\xi} / \partial x^4 + p - \tau_{yy};$$

$$(2) \quad \rho_0 h \partial^2 \tilde{\beta} / \partial t^2 = Eh / (1 - \sigma^2) \partial^2 \tilde{\beta} / \partial x^2 + \tau_{xy},$$

где  $\tilde{\xi}$  и  $\tilde{\beta}$  — соответственно нормальное и касательное смещение точки пластинки от положения в состоянии покоя;  $\rho_0$  и  $h$  — плотность и толщина пластинки;  $E$  — модуль Юнга;  $\sigma$  — коэффициент Пуассона;  $p - \tau_{yy}$  и  $\tau_{xy}$  — нормальное и касательное напряжения, вызванные пульсациями скоростей возмущающего движения. Уравнения записаны в безразмерном виде, соответствующие величины отнесены к полуширине канала,



Фиг. 1

плотности жидкости, скорости на оси канала  $V_m$ . В линейном приближении связь между  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\beta}$  и компонентами скорости возмущения имеет вид

$$(3) \quad \partial \tilde{\xi} / \partial t = \tilde{v};$$

$$(4) \quad \partial \tilde{\beta} / \partial t = \tilde{u} + V' \tilde{\xi}, \quad y = \pm 1.$$

Все возмущенные величины ищутся в виде

$$(5) \quad \tilde{A}(x, y, t) = A(y) \exp [i\alpha(x - ct)],$$

где  $\alpha$  — волновое число;  $c = c_r + ic_i$  — комплексная скорость.

Пренебрегая нелинейными членами в уравнениях движения жидкости и используя (1)–(5), для амплитуды функции тока  $\varphi(y)$  возмущающего течения получаем уравнение Орра — Зоммерфельда

$$(6) \quad \varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi = i\alpha \operatorname{Re} \{ (V - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - V'' \varphi \}.$$

Запишем граничные условия на верхней пластинке

$$(7) \quad \varphi''' = -i\alpha \operatorname{Re} \{ (\rho_0 h \alpha^2 c - K \alpha^4 / c) \varphi + c \varphi' + V' \varphi \} + 3\alpha^2 \varphi';$$

$$(8) \quad \varphi' + \varphi V' / c = -[\varphi'' + (\alpha^2 + V'' / c) \varphi] / [i\alpha \operatorname{Re} (\rho_0 h c - K_1 / c)], \quad y = 1,$$

где  $\operatorname{Re} = V_m L / \nu$ ,  $K = Eh^3 / [12(1 - \sigma^2)]$ ,  $K_1 = Eh / (1 - \sigma^2)$ . В расчетах  $E$  и  $h$  аналогично [4–6] полагались постоянными, поэтому на приводимых ниже фигурах  $\operatorname{Re}$  меняется только за счет изменения  $\nu$ .

Так как для пластинок  $K_1 \gg K$ , в большинстве случаев продольными смещениями можно пренебречь. Тогда условия на границе имеют вид

$$(9) \quad \varphi''' = -i\alpha \operatorname{Re} (\rho_0 h \alpha^2 c - K \alpha^4 / c) \varphi + 3\alpha^2 \varphi';$$

$$(10) \quad \varphi' + \varphi V' / c = 0, \quad y = 1.$$

Если к тому же в (1) не учитывать  $\tau_{yy}$  [3, 5, 6], то (9) переписывается в виде

$$(11) \quad \varphi''' = -i\alpha \operatorname{Re} (\rho_0 h \alpha^2 c - K \alpha^4 / c) \varphi + \alpha^2 \varphi', \quad y = 1.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением симметричных по  $\varphi$  возмущений. На оси канала имеем

$$(12) \quad \varphi'(0) = \varphi'''(0) = 0.$$

При решении данной краевой задачи основной интерес представляет нахождение нейтральных кривых ( $c_i = 0$ ), отделяющих области нарастающих возмущений ( $c_i > 0$ ) от областей затухающих возмущений ( $c_i < 0$ ).

Пусть  $\operatorname{Re} \ll 1$ . В этом случае независимо от вида профиля основного течения решение краевой задачи (6), (9), (10), (12) можно получить в виде ряда по  $\operatorname{Re}$

$$(13) \quad \varphi = \varphi_0 + \operatorname{Re} \varphi_1 + \dots;$$

$$(14) \quad c = c_0 + \operatorname{Re} c_1 + \dots$$

Поступая аналогично [8], подставим (13), (14) в данные уравнения и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\operatorname{Re}$ , для нулевого приближения получим

$$(15) \quad \varphi_0 = \operatorname{ch} \alpha y - y \operatorname{th} \alpha \operatorname{sh} \alpha y;$$

$$(16) \quad c_0 = V'(1) / \operatorname{sh}^2 \alpha.$$

Из (16) следует, что ось  $\operatorname{Re} = 0$  является нейтральной кривой, а возмущения при малых  $\operatorname{Re}$  распространяются против потока ( $c_0 < 0$ ). Для анализа устойчивости этих возмущений необходимо рассмотреть

следующий член ряда (14). После преобразований получим  
(17)

$$c_1 = ic_0^2/(2\alpha^3 V') \{(\alpha^2 + 0,5\alpha \operatorname{sh} 2\alpha) L(c_0) - [\alpha^3/3 - (0,75V' + 0,25)\alpha] \operatorname{sh} 2\alpha + \\ + \alpha^3 V' \operatorname{cth} \alpha + (2,25 + 1,125 \operatorname{sh} 2\alpha/\alpha) \operatorname{sh}^2 \alpha + (1,5V' + 1)\alpha^2 - 0,5 \operatorname{sh}^2 2\alpha\},$$

где  $L(c_0) = \alpha^2(\rho_0 h c_0 - K\alpha^2/c_0)$ .

Анализ выражения (17) показывает, что  $c_1$  — чисто мнимая величина и существует такое  $\alpha_*$ , что

$$\operatorname{Im}(c_1) \begin{cases} > 0 & \text{при } \alpha < \alpha_*, \\ = 0 & \alpha = \alpha_*, \\ < 0 & \alpha > \alpha_*. \end{cases}$$

Таким образом,  $\alpha_*$  является точкой ветвления нейтральной кривой. Появление нарастающих возмущений при малых числах Рейнольдса обусловлено наличием упругих границ — при  $K \rightarrow \infty$  (твердые стенки)  $\alpha_* \rightarrow 0$  и эта неустойчивая область исчезает.

При  $\operatorname{Re} \ll 1$  необходимо учитывать и касательные смещения и вместо (9), (10) использовать (7), (8). В этом случае  $\varphi_0$  не меняется, а  $c_0$  и  $c_1$  имеют вид

$$(18) \quad c_0 = V''(1)/(\alpha \operatorname{sh} 2\alpha - 2\alpha^2);$$

$$(19) \quad c_1 = ic_0^2/(\alpha^2 V'') \{(0,625 - \operatorname{ch}^2 \alpha) \operatorname{sh} 2\alpha + (1,5\alpha - 2\alpha^3/3) \operatorname{sh}^2 \alpha + \\ + 9 \operatorname{sh}^2 2\alpha/(16\alpha) + 0,5\alpha + (0,375\alpha \operatorname{sh}^2 2\alpha + \alpha^3 \operatorname{sh}^2 \alpha + \\ + 0,25\alpha^2 \operatorname{sh} 2\alpha) c_0 + \alpha L(c_0) \operatorname{ch}^2 \alpha + \alpha(V'/c_0 - \operatorname{sh}^2 \alpha)(\alpha^2 L_1(c_0) + c_0 \operatorname{ch}^2 \alpha)\}, \\ L_1(c_0) = \alpha^2(\rho_0 h c_0 - K_1/c_0).$$

Для течения Пуазейля характер возмущений качественно не меняется, хотя значение  $\alpha_*$  и становится другим.

Как показывают расчеты, для  $K \geq 1$  в первом случае два первых члена ряда (14) достаточно точно определяют  $c$  для  $\operatorname{Re} \leq 0,1-0,5$ , а во втором — для  $\operatorname{Re} \leq 10^{-3}$ . Так как нейтральные кривые, полученные с учетом и без учета  $\tau_{xy}$ , для данных  $K$  практически совпадают уже при  $\operatorname{Re} \approx 0,05-0,1$ , то для приближенного определения нейтральной кривой при малых, но конечных  $\operatorname{Re}$  (0,1—0,5) удобнее использовать формулы (16), (17).

Если не учитывать  $\tau_{yy}$  и вместо (9) использовать (11), то для  $\varphi_0$ ,  $c_0$ ,  $c_1$  получаются следующие выражения:

$$(20) \quad \varphi_0 = \operatorname{ch} \alpha y;$$

$$(21) \quad c_0 = -V'(1) \operatorname{cth} \alpha/\alpha;$$

$$(22)$$

$$c_1 = -ic_0^2/(\alpha V' \operatorname{sh} 2\alpha) \{\alpha + 1,5 \operatorname{sh}^2 \alpha/\alpha + 1,5 \operatorname{th} \alpha + (\alpha + 0,5 \operatorname{sh} 2\alpha) L(c_0)\}.$$

При сравнении (20)—(22) с (15)—(18) видно, что поведение возмущений меняется качественно. Область неустойчивости также соответствует малым  $\alpha$ , но в этом случае возмущения распространяются по потоку ( $c_0 > 0$ ).

Пренебрегать  $\tau_{yy}$  при малых числах Рейнольдса, очевидно, нельзя. Используя результаты, полученные при малых  $\operatorname{Re}$  с учетом и без учета  $\tau_{yy}$ , удается найти такие возмущения, у которых и в случае больших  $\operatorname{Re}$ , когда вязкими силами, действующими на упругую границу, обычно пренебрегают [3—5], вид нейтральной кривой существенно зависит от того, берется ли в качестве граничного условия (9) или (11).

Источник	$Re_*$	$\alpha$	$c_r$	$c_i$
[11]	5772,23	1,02041	0,26399	$-0,4 \cdot 10^{-9}$
Данная работа	5772,2	1,02	0,26394	0

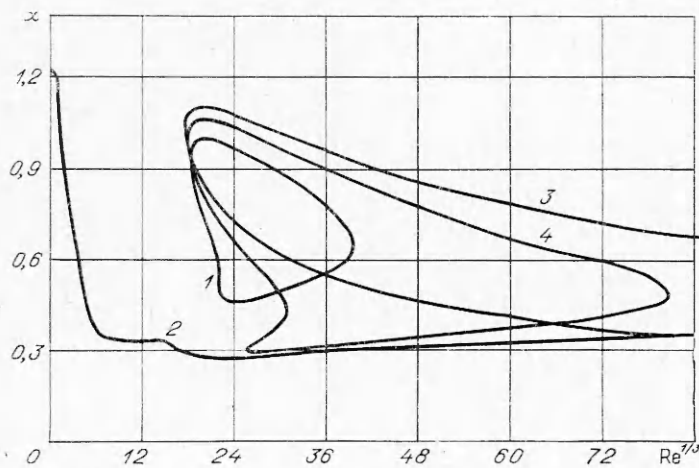
При конечных  $Re$  краевая задача (6), (9), (10), (12) решалась численно детерминантным методом [9]. Основные результаты были воспроизведены с помощью метода дифференциальной прогонки [10]. Различие в волновых числах нейтральных возмущений, вычисленных двумя этими способами, практически не превышало заданной точности для определения  $\alpha$ . Найденное критическое число Рейнольдса  $Re_*$  для канала с твердыми стенками хорошо совпадает с приведенным в работе [11] (см. таблицу).

Для приводимых ниже вариантов инерцией пластины можно пренебречь и их упругие свойства характеризовать одним параметром  $K$ . Расчеты показывают, что с уменьшением  $K$  область неустойчивости волн Толмина — Шлихтинга (область I) смещается в сторону меньших волновых чисел и больших чисел Рейнольдса. При достаточно малых  $K$  эта область замкнута.

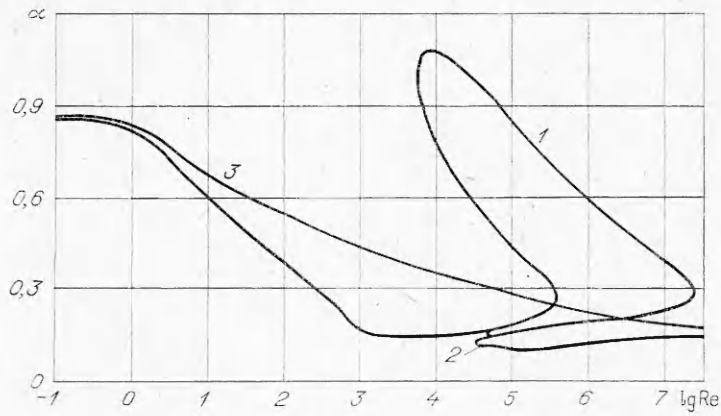
Если вместо (10) в качестве граничного условия взять  $\varphi'|_{y=+1} = 0$ , как это сделано в работе [5], то поведение  $Re_*$  меняется качественно, с уменьшением  $K$  уменьшается и  $Re_*$ .

Возмущения, которые при малых  $Re$  двигаются против потока, при достаточно больших числах Рейнольдса начинают распространяться вниз по потоку. Поэтому при некоторых  $\alpha$  и  $Re$  фазовая скорость у них обращается в нуль. Из (5) видно, что для таких возмущений отклонение точек границы от невозмущенного положения будет или увеличиваться (уменьшаться) со временем, если  $\alpha$  лежит в области неустойчивости (устойчивости), или оставаться постоянным, если  $\alpha$  лежит на нейтральной кривой. В последнем случае возмущенное течение будет стационарным. С ростом  $K$  число Рейнольдса, при котором существует такое стационарное возмущение, увеличивается.

Область нарастающих возмущений, определяемую при малых  $Re$  с помощью (15)—(17), назовем областью II.

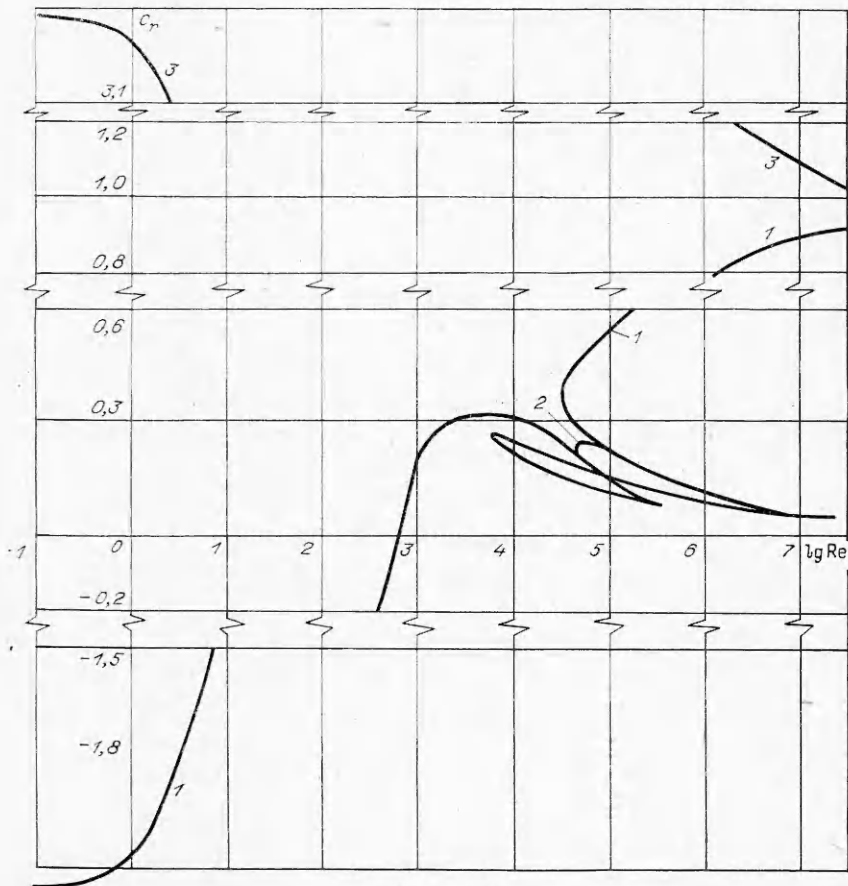


Ф и г. 2



Ф и г. 3

На фиг. 2 нейтральные кривые 1 и 2 ограничивают соответственно области I и II для пластинки с  $K = 1,39$ . Для сравнения даны границы области I для пластин с  $K = \infty$  и 3 (кривые 3 и 4). Область II с ростом  $K$  уменьшается, минимальное расстояние между областями I и II также уменьшается, и при достаточно больших  $K$  происходит их слияние.



Ф и г. 4

Если пренебречь  $\tau_{yy}$  и вместо (9) использовать (11), то проявляется новая область неустойчивости — область III, при малых  $Re$  определяемая из (20)—(22), а область II исчезает. Поэтому в случае, когда области I и II сливаются, при пренебрежении  $\tau_{yy}$  происходит замыкание области I. Если же эти области разъединены, то при использовании (11) положение области I и значения фазовой скорости нейтральных возмущений на ее границе практически не меняются. Для области III скорость распространения нейтральных возмущений положительна для всех значений  $Re$ .

На фиг. 3 даны нейтральные кривые для пластинки с  $K = 11,11$ . В этом случае области I и II сливаются (кривая 1), по линии 2 происходит замыкание области I при пренебрежении  $\tau_{yy}$ , кривая 3 — граница области III. Соответствующие зависимости фазовых скоростей приведены на фиг. 4.

Автор выражает благодарность В. Е. Накорякову за постановку задачи и полезные обсуждения, М. Х. Правдиной за помощь в отладке программы, В. В. Черкашину за проведение некоторых расчетов, И. Р. Шрейберу за полезные замечания по данной работе.

Поступила 16 IX 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Benjamin T. B. Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability.—«J. Fluid Mech.», 1960, vol. 9, pt 4.
2. Landa M. T. On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface.— «J. Fluid Mech.», 1962, vol. 13, pt 3.
3. Hains F. D., Price J. F. Effect of a flexible wall on the stability of Poiseuille flow.— «Phys. Fluids», 1962, vol. 5, N 3.
4. Калугин В. Н., Меркулов В. И. Численный метод исследования устойчивости плоского течения Пуазейля с упругими границами.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Т. 2. Новосибирск, изд. ВЦ СО АН СССР, 1974, № 4.
5. Короткин А. И. Устойчивость плоского течения Пуазейля при наличии упругих границ.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
6. Brechling J. Die Beeinflussung der Stabilität von Laminarströmungen durch die Eigenschaften der Wände.— ZAMM, 1974, Bd 54, N 5.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
8. Gih Chia-Shun. Stability of liquid flow down an inclined plane.— «Phys. Fluids», 1963, vol. 6, N 3. Рус. пер.— Сб. Механика, 1963, N 5.
9. Желтухин Н. А. Детерминантный метод решения уравнения Орра—Зоммерфельда.— В кн.: Аэрогазодинамика. Новосибирск, «Наука», 1973.
10. Сапожников В. А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом прогонки.— В кн.: Труды Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости (II). Новосибирск, «Наука», 1969.
11. Сапожников В. А., Штерн В. И. Численный анализ устойчивости плоского течения Пуазейля.— ИМТФ, 1969, № 4.