

УДК 532.5

## ЭНТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ НАНОЧАСТИЦЫ, ВДОЛЬ НАКЛОННОЙ ПЛАСТИНЫ

Б. Васу, Р. С. Р. Горла\*, П. В. С. Н. Мурти\*\*, О. Анвар Бег\*\*\*

Национальный технологический университет им. М. Неру, Аллахабад, Индия

\* Кливлендский государственный университет, Кливленд, США

\*\* Индийский технологический институт, Харагпур, Индия

\*\*\* Салфордский университет, Салфорд, Великобритания

E-mails: bvasu@mnnit.ac.in, r.gorla@csuohio.edu, pvsnm@maths.iitkgp.ernet.in,

O.A.Beg@salford.ac.uk

Исследуется производство энтропии в двумерном установившемся ламинарном конвективном течении тонкой пленки неньютоновской наножидкости (степенной жидкости Оствальда — де Вела, содержащей наночастицы) вдоль наклонной пластины. Используется модифицированная модель Буонджорно, в которой учитываются наномасштабные эффекты, в том числе броуновское движение и термофорез. Концентрация наночастиц на границе в этой модели контролируется пассивным образом. При формулировке задачи используются конвективные краевые условия. Результирующая нелинейная система уравнений решается методом локальной неавтомодельности. Проводится сравнение полученных результатов численных расчетов с ранее опубликованными. Установлено, что производство энтропии, обусловленное трением в жидкости, уменьшается с увеличением показателя степени в степенном реологическом законе. Наличие броуновского движения наночастиц приводит к усилению конвекции тепла вследствие усиления микроконвекции тепла в окрестности наночастиц. Чем больше конвективный параметр, тем сильнее нагревается пластина и тем больше градиент температуры. С увеличением параметра термофореза концентрация наночастиц уменьшается вблизи пластины и увеличивается вдали от нее. Производство энтропии уменьшается с увеличением параметра термофореза в пограничном слое.

Ключевые слова: анализ энтропии, течение пленки, наножидкость, свободная конвекция, степенной реологический закон, термофорез.

DOI: 10.15372/PMTF20190506

**Введение.** Результаты исследований течения тонких пленок несжимаемой жидкости вдоль наклонных поверхностей используются во многих областях науки и техники, в частности при экструзии полимеров, в технологиях покрытия поверхностей пленками, при обработке поверхностей, в пищевой промышленности, при псевдоохлаждении реакторов, антикоррозийной защите и т. д. Большое значение имеет изучение закономерностей процессов, происходящих при тчении тонких пленок и переносе в них тепла. В технологических процессах расплав вытекает из щели, при этом толщина слоя изменяется до требуемой величины. Состав и однородность конечного продукта существенно зависят от характера гидродинамического течения и теплопереноса вблизи обтекаемого листа. Для адекватно-

го описания гидродинамического течения тонких пленок и происходящих в них процессов теплопередачи необходимы достоверные математические модели и надежные методы численного моделирования. Большое число исследований посвящено изучению реологических свойств тонких пленок, полученных методом литья. В работе [1] получено аналитическое решение задачи о течении пленки ньютоновской жидкости вдоль растягивающейся поверхности. С использованием классической теории пограничного слоя в работе [2] проведен теоретический анализ установившегося ламинарного течения пленки жидкости, реологические свойства которой, описываются степенным законом. Установлено, что течение вверх по потоку близко к автомодельному. В [3] с помощью метода возмущений исследовано развитое ламинарное течение падающей пленки неньютоновской жидкости. В [4] представлены результаты исследования течения падающей пленки степенной жидкости и процессов теплопереноса в ней. В [5] изучено производство энтропии при течении микро- и нанопленок в капиллярных трубках.

Тепловые характеристики несущих жидкостей можно улучшить путем добавления в них дисперсных наночастиц. Наножи́дкости являются коллоидными растворами, скорость передачи тепла в которых существенно больше скорости передачи тепла в несущей жидкости. Наножи́дкость может быть получена на основе различных несущих жидкостей с добавлением в них различных наночастиц (частиц оксидов металла, карбида кремния, нанотрубок). Динамические процессы при течении наножи́дкости происходят на различных масштабных уровнях: молекулярном, микро-, макро- и мегауровне. Использовать наножи́дкости для увеличения скорости теплопередачи в различных технологических процессах впервые предложено в работе [6]. Наноструктурированные пленки широко применяются для покрытия поверхностей с целью защиты их от коррозии, истирания, воздействия кислот и т. п. [7].

В работе [8] предложено использовать наножи́дкостные покрытия поверхностей для улучшения их смачиваемости при фазовых переходах, сопровождаемых теплопереносом. В [9] исследовано неустановившееся течение тонкой нанопленки, образующееся при покрытии полимерных систем. Предложены различные подходы к моделированию реологических свойств наножи́дкостей. Широко используется двухкомпонентная неоднородная модель Буонджорно [10], позволяющая описать гидродинамику течения, тепло- и массо-перенос, а также учесть броуновское движение и термофорез. Авторами [11] предложена модель, позволяющая определить концентрацию и состав наночастиц. Однако в этой модели не учитывался массоперенос. Эта модель позволяет учитывать свойства наножи́дкостей (вязкость, теплопроводность, плотность и теплоемкость) при различной концентрации любых наночастиц (цинка, золота, кремния, оксида железа и др.). Можно отметить также модель, предложенную в работе [12]. В работе [13] с использованием модели Буонджорно впервые исследована свободная конвекция в потоке наножи́дкости, стекающей вдоль вертикальной пластины. В [14] также с использованием модели Буонджорно и пакета Mathematica изучен электроосматический поток ионов в водном растворе, представляющем собой наножи́дкость. В [15] с помощью модели Буонджорно и численного метода Рунге — Кутты — Гилла исследована ламинарная конвекция в пограничном слое потока вдоль клина с учетом просачиваемости через его поверхность. Установлено, что учет броуновского движения и термофореза оказывает существенное влияние на распределение концентрации наночастиц и температуры. Модель Тивари — Даса также широко применяется при исследовании течения наножи́дкости. В работе [16] с использованием этой модели и преобразования Лапласа изучено влияние тепловыделения и концентрации наночастиц на неустановившуюся конвекцию в потоке наножи́дкости вдоль вертикальной поверхности, движущейся под действием импульса. При исследовании течения наножи́дкости с объемной долей частиц оксида алюминия, меди, оксида титана или оксида серебра

до 4 % установлено, что оптимальный теплообмен происходит в наножидкости, содержащей частицы серебра.

В [17] экспериментально установлено существенное влияние концентрации наночастиц и скорости сдвига на реологические свойства наножидкости. В [18] исследовано влияние формы частиц, их концентрации, скорости сдвига и других факторов на поведение неньютоновских наножидкостей. В [19] изучалось течение этиленгликоля с массовой долей сферических частиц  $\text{TiO}_2$  0,5 ÷ 8,0 % при температуре 20 ÷ 60 °С. Установлено, что степень уменьшения вязкости с увеличением скорости сдвига зависит от концентрации частиц, скорости сдвига и вязкости базовой жидкости: скорость сдвига неньютоновской жидкости уменьшается с увеличением объемной доли частиц, вязкости несущей жидкости и размера частиц. Также в [19] отмечено, что скорость сдвига уменьшается при увеличении температуры, при высоких температурах наножидкость ведет себя как суспензия, вязкость которой уменьшается с увеличением скорости сдвига, поскольку при высоких температурах броуновское движение играет существенную роль.

В работе [20] с использованием метода гомотопии изучалась свободная конвекция тепла в жидкости Карро, не подчиняющаяся закону Фурье. На поверхности, с которой происходила конвекция тепла, поддерживалась температура, изменяющаяся по периодическому закону. При исследовании влияния концентрации наночастиц установлено, что скорость течения псевдопластической жидкости увеличивается с увеличением числа Вейссенберга и уменьшается в случае дилатантных жидкостей. Температура потока, вычисленная с использованием данной модели, ниже температуры, вычисленной с использованием закона Фурье, а толщина пограничного теплового слоя увеличивается с увеличением параметра термофореза и параметра броуновского движения. В [21] с использованием метода Рунге — Кутты — Фельберга и метода стрельбы исследована конвекция в стационарном ламинарном пограничном слое вязкой наножидкости вблизи растягивающейся поверхности. В работе [22] для обработки экспериментальных данных использовалась простая степенная модель Оствальда — де Вела, которая достаточно точно описывает течение наносуспензий, содержащих частицы металла (например, частицы титана в дистиллированной воде, частицы титана в растворе этиленгликоль — дистиллированная вода, частицы титана в растворе пропиленгликоль — дистиллированная вода). Также установлено, что свойства наносуспензии, в которой несущей жидкостью является дистиллированная вода, более близки к свойствам псевдопластической жидкости, чем свойства наносуспензии, в которой несущей жидкостью является раствор гликоля в дистиллированной воде, в частности при малых скоростях сдвига. Степенная модель часто используется при численном моделировании течения наножидкостей, поскольку позволяет описать движение как псевдопластической, так и дилатантной жидкости. При моделировании реологии наножидкостей необходимо использовать зависимость эффективной вязкости от скорости сдвига, справедливую в широком диапазоне скоростей сдвига. Характер коллоидного взаимодействия наночастиц определяет тип наножидкости: псевдопластическая или дилатантная. Псевдопластическая жидкость — это жидкость, вязкость которой не зависит от времени, которая не имеет предела текучести и эффективная вязкость которой уменьшается с увеличением скорости сдвига. Для анализа течения псевдопластической жидкости наиболее адекватной является степенная реологическая модель. В работе [23] с помощью метода гомотопии получено решение задачи о течении пограничного слоя степенной неньютоновской наножидкости, индуцированном вертикальным растягивающимся листом. В работе [24] с использованием модели Буонджорно и неявного конечно-разностного метода ячеек Хеллера исследована неустановившаяся вынужденная конвекция в пограничном слое степенной наножидкости вблизи растягивающегося листа. В [25] с использованием модели Тивари — Даса, учитывающей наномасштабные эффекты, и степенной реологической мо-

дели изучена установившаяся смешанная конвекция в пограничном слое электропроводящей наножидкости (медь — вода) вдоль растягивающейся под воздействием переменного магнитного поля поверхности. При моделировании учитывались силы плавучести. Учет количества тепла, подводимого к конвективному потоку через граничную поверхность с конечной теплоемкостью, позволяет адекватно моделировать явления переноса в тонких пленках при покрытии поверхностей в различных технологических процессах.

При моделировании технологических процессов нанесения нанопокртия при высоких температурах необходимо решать краевую задачу с конвективными краевыми условиями.

В работе [26] численно решена краевая задача с конвективными краевыми условиями о течении пограничного слоя наножидкости, индуцированном растягивающимся листом, и установлено, что температура и локальная концентрация наночастиц увеличиваются с увеличением теплового числа Био, являющегося мерой интенсивности конвекции тепла. В работе [27] исследована смешанная конвекция вблизи шероховатой поверхности, помещенной в пористую среду, с конвективными краевыми условиями для температуры и концентрации. В работе [28], в которой с использованием псевдоспектрального метода, вариационной итерационной процедуры и пакета Maple исследовано конвективное охлаждение, сопровождаемое экзотермической реакцией, при течении геля в цилиндрических проводниках (в прямоточных воздушно-реактивных двигателях), установлено, что распределение температуры существенно зависит от числа Био. В [29] изучено влияние компонентов наножидкости и конвективных краевых условий на течение степенной наножидкости в пористой среде с учетом проницаемости. Установлено, что температура и концентрация наночастиц увеличиваются, скорость потока уменьшается с увеличением скорости конвекции и скорости диффузии, а температура увеличивается с увеличением показателя степени в реологическом законе.

При термическом покрытии поверхностей возникают потери энергии, что приводит к увеличению энтропии и к неустойчивости системы. Минимизация негативных последствий потери энергии в технологических процессах является актуальной задачей. Для того чтобы найти способы уменьшения потерь энергии и тем самым повысить производительность работы систем, необходимо исследовать производство энтропии. В работе [30] впервые исследовались возможные способы минимизации потерь энергии. Вследствие необратимости тепловых процессов (теплопроводности, конвекции, излучения) энтропия системы увеличивается, ее эксергия (доля тепловой энергии, которую можно превратить в работу) уменьшается. Многие другие явления (магнитные и электрические поля, вязкость, силы плавучести и др.) также вызывают увеличение энтропии. Для того чтобы оптимально использовать тепловую энергию, необходимо минимизировать потерю эксергии (свести к минимуму необратимые процессы). В последнее время с использованием второго закона термодинамики проведены исследования производства энтропии в различных сложных физико-механических процессах, в том числе в потоках наножидкости (см., например, [31–39]).

В настоящей работе исследуется производство энтропии при естественной конвекции в тонкой пленке наножидкости, стекающей по наклонной пластине. Используются степенной реологический закон Оствальда — де Вела и модель Буонджорно [7], позволяющие учитывать броуновское движение частиц и термофорез. На поверхности пластины задаются конвективные краевые условия.

**1. Математическая модель.** Рассматривается ускоряющееся под действием силы тяжести двумерное ламинарное течение нанопленки неньютоновской степенной жидкости вдоль наклонной поверхности (рис. 1). Ось  $x$  направлена вдоль стенки в направлении потока, ось  $y$  перпендикулярна оси  $x$ . Несжимаемая неупругая жидкость подчиняется степенному закону Оствальда — де Вела, вязкие напряжения действуют в гидродинамическом

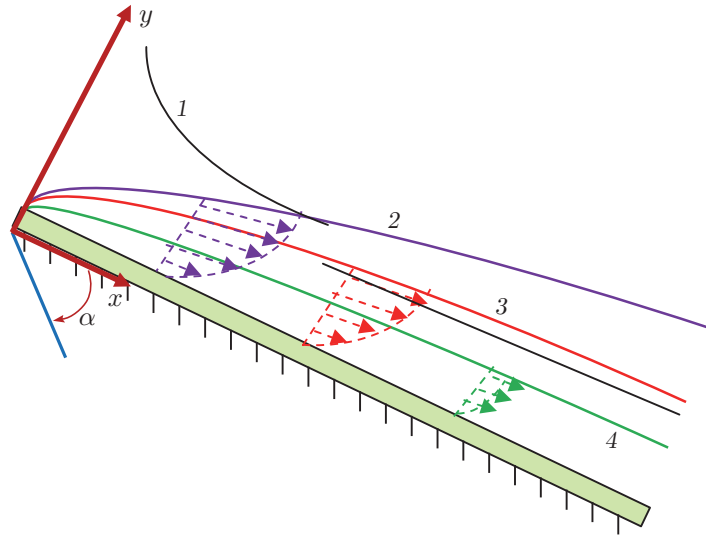


Рис. 1. Схема течения:

1 — стекающая жидкость, 2 — гидродинамический пограничный слой, 3 — температурный пограничный слой, 4 — концентрационный пограничный слой

пограничном слое, прилегающем к твердой поверхности. В модели неньютоновской наножидкости в соответствии с подходом Буонджорно учитываются броуновское движение частиц и термофорез. Все параметры, характеризующие свойства жидкости, полагаются постоянными, за исключением плотности, которая зависит от температуры и объемной доли наночастиц. Уравнения сохранения массы, импульса, энергии и объемной доли наночастиц в вязком пограничном слое имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \cos \alpha + n \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \tag{2}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \tau \left[ D_b \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{D_t}{T_\infty} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right]; \tag{3}$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D_b \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{D_t}{T_\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{4}$$

Здесь  $\alpha = k/(\rho C)_f$  — коэффициент термодиффузии;  $\tau = (\rho C)_p/(\rho C)_f$ ;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\rho$  — плотность жидкости;  $k$  — теплопроводность;  $\mu$  — вязкость наножидкости;  $T$  — температура;  $C$  — объемная доля наночастиц;  $\rho_f$  — плотность несущей жидкости;  $\rho_p$  — плотность наночастиц;  $D_b, D_t$  — коэффициенты броуновской диффузии и диффузии, происходящей вследствие термофореза, соответственно;  $(\rho C)_f, (\rho C)_p$  — теплоемкость основной жидкости и эффективная теплоемкость материала наночастиц (например, частиц диоксида титана) соответственно;  $n$  — показатель в степенном реологическом законе.

Величина отклонения показателя  $n$  от единицы характеризует степень отличия жидкости от ньютоновской ( $n = 1$  соответствует ньютоновской жидкости с динамической вязкостью  $K$ ). Для уравнений (1)–(4) ставились следующие краевые условия:

$$u = v = 0, \quad -k \frac{\partial T}{\partial y} = h_f(x)(T_f - T), \quad D_b \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{D_t}{T_\infty} \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad y = 0,$$

$$u \rightarrow u_{x,\infty}, \quad y \rightarrow \delta_l, \quad (5)$$

$$T \rightarrow T_\infty, \quad y \rightarrow \delta_t, \quad C \rightarrow C_\infty, \quad y \rightarrow \delta_n$$

( $u_{x,\infty} = \sqrt{2gx \cos \alpha}$ ). Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{x_0}, \quad \eta = \frac{y}{x} \text{Re}_x^{1/(n+1)}, \quad U = \frac{u}{\sqrt{2gx \cos \alpha}}, \quad V = \frac{v}{\sqrt{2gx \cos \alpha}} \text{Re}_x^{1/(n+1)},$$

$$\theta(\xi, \eta) = \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty}, \quad \varphi = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}, \quad \text{Re}_x = \frac{x^n u_{x,\infty}^{2-n} \rho}{k}. \quad (6)$$

В безразмерных переменных (6) уравнения (1)–(4) принимают вид

$$\frac{n}{n+1} \eta \frac{\partial U}{\partial \eta} - U - 2 \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0; \quad (7)$$

$$2n \left( \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{n}{n+1} \eta U \frac{\partial U}{\partial \eta} - 2V \frac{\partial U}{\partial \eta} - U^2 + 1 = 0; \quad (8)$$

$$\frac{1}{\text{Pr}_x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{n}{2(n+1)} \eta U \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + (N_b)_x \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - V \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + (N_t)_x \left( \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 = \xi U \frac{\partial \theta}{\partial \xi}; \quad (9)$$

$$\frac{1}{\text{Le}_x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{n}{2(n+1)} \eta U \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - V \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Le}_x} \frac{(N_t)_x}{(N_b)_x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \xi U \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}. \quad (10)$$

Краевые условия (5) преобразуются следующим образом:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -\gamma(1 - \theta), \quad (N_b)_x \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + (N_t)_x \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0; \quad (11)$$

$$U \rightarrow 1, \quad \theta \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (12)$$

В (7)–(12)  $\text{Pr}_x = xu_{x,\infty} \text{Re}_x^{-2/(n+1)} / \alpha$  — локальное число Прандтля;  $\text{Le}_x = xu_{x,\infty} \text{Re}_x^{-2/(n+1)} / D_b$  — локальное число Льюиса;  $(N_b)_x = \tau D_b (C_w - C_\infty) / (xu_{x,\infty} \text{Re}_x^{-2/(n+1)})$  — локальный параметр броуновского движения;  $(N_t)_x = \tau D_t (T_f - T_\infty) / (T_\infty xu_{x,\infty} \text{Re}_x^{-2/(n+1)})$  — локальный параметр термофореза;  $\gamma = h_f(x)x / (k \text{Re}_x^{1/(n+1)})$  — параметр тепловой конвекции;  $\text{Re}_x$  — локальное число Рейнольдса;  $h_f(x) = \alpha x^{-n/[2(n+1)]}$ .

При  $n = 1$  величина  $h_f(x)$  пропорциональна  $x^{-1/4}$ . Заметим, что показатель  $n > 1$  соответствует дилатантной наножидкости,  $n < 1$  — псевдопластической. Следует отметить, что дифференциальные уравнения гидродинамического пограничного слоя (7), (8) с краевыми условиями (11), (12) не связаны с уравнениями теплового пограничного слоя и пограничного слоя наночастиц. Несмотря на то что гидродинамическая задача допускает автомодельное решение, уравнение теплопроводности и уравнение для объемной доли наночастиц не имеют автомодельных решений, поскольку в уравнения (9), (10) переменные  $\xi$  и  $\eta$  входят явно. Поэтому в целом задача не является автомодельной и для ее решения необходимо использовать численный метод. В настоящей работе используется метод построения локального неавтомодельного решения.

**2. Исследование производства энтропии.** Улучшение характеристик теплопроводности потоков наножидкости приводит к уменьшению в них производства энтропии. Процесс конвекции в пленках наножидкости необратим. Неравновесные процессы, обусловленные обменом энергией и импульсом между наножидкостью и твердой границей

(поверхностью пластины), вызывают непрерывное производство энтропии. Часть энтропии производится вследствие теплопереноса, обусловленного конечным градиентом температуры, другая часть — вследствие трения в жидкости (вязкости жидкости), наличия наночастиц и сложного взаимодействия наночастиц с основной жидкостью. Согласно [30, 40] выражение для локальной скорости производства энтропии имеет вид

$$S_g''' = \frac{k}{T_\infty^2} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{T_\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n+1} + \frac{D_b}{C_\infty} \left[ \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{D_b}{T_\infty} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Первое слагаемое в (13) представляет собой скорость производства энтропии, обусловленную теплопереносом, второе слагаемое — скорость производства энтропии, обусловленную диссипацией вследствие вязкости жидкости, третье и четвертое слагаемые — скорости производства энтропии, обусловленные переносом массы наночастиц и сложным взаимодействием наночастиц с основной жидкостью. С использованием приближения пограничного слоя уравнение (13) приводится к виду

$$S_g''' = \frac{k}{T_\infty^2} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \frac{\mu}{T_\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n+1} + \frac{D_b}{C_\infty} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right)^2 + \frac{D_b}{T_\infty} \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Параметр производства энтропии, определяемый следующим образом:

$$N_s = S_g''' \frac{\delta^2 T_\infty^2}{k(T_f - T_\infty)},$$

можно записать в безразмерном виде

$$N_s = (\theta')^2 + \frac{\text{Br}_x}{\Omega} (U')^{n+1} + \lambda \left( \frac{\sigma}{\Omega} \right)^2 (\varphi')^2 + \lambda \left( \frac{\sigma}{\Omega} \right) \theta' \varphi'. \quad (14)$$

В (14) использовались следующие безразмерные параметры: локальное число Бринкмана  $\text{Br}_x = \mu u_{x,\infty}^{n+1} (x \text{Re}_x^{-1/n+1})^{1-n} / [k(T_w - T_\infty)]$ ;  $\Omega = (T_w - T_\infty) / T_\infty$ ;  $\sigma = (C_w - C_\infty) / C_\infty$ ;  $\lambda = D_b C_\infty / k$ .

2.1. *Локальный коэффициент поверхностного трения.* Градиент безразмерной скорости  $U(\eta)$  на стенке (при  $\eta = 0$ ) является важной характеристикой решения, поскольку локальный коэффициент поверхностного трения  $C_{x,f}$  представляет собой безразмерный параметр, характеризующий напряжение сдвига  $\tau_w = K(\partial U / \partial y)^n$  на стенке:

$$C_{x,f} \equiv \frac{\tau_w}{\rho u_{x,\infty}^2 / 2} = \frac{1}{\rho u_{x,\infty}^2 / 2} K \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \right]^n.$$

Выражение для локального коэффициента поверхностного трения можно записать в виде

$$C_{x,f} \equiv \frac{\tau_w}{\rho u_{x,\infty}^2 / 2} = 2(\text{Re}_x)^{1/(1+n)} \left[ \left( \frac{dU}{d\eta} \right) \Big|_{\eta=0} \right]^n. \quad (15)$$

2.2. *Скорости тепло- и массопереноса.* Теплообмен между твердой стенкой, на которой поддерживается постоянная температура  $T_w$ , и жидкой пленкой играет большую роль в процессах нанесения покрытия (напыления) [41, 42]. Скорость локального теплового потока  $q_x = -k(\partial T / \partial y)|_{y=0}$ , зависящего от градиента температуры по закону Фурье, удобно выразить через локальный коэффициент теплопереноса  $a_x$ :

$$a_x = \frac{q_x}{T_w - T_\infty} = -kx^{-1} \text{Re}_x^{1/(n+1)} \theta' \Big|_{\eta=0}$$

или через локальный коэффициент Нуссельта:

$$\text{Nu}_x = \frac{a_x x}{k} = -\text{Re}_x^{1/(n+1)} \theta' \Big|_{\eta=0}, \quad \text{Nu}_x \sim x^{(n+2)/[2(n+1)]}.$$

Аналогично локальная скорость переноса наночастиц на твердой поверхности выражается через локальное число Шервуда:

$$\text{Sh}_x = -\text{Re}_x^{1/(n+1)} \varphi' \Big|_{\eta=0}, \quad \text{Sh}_x \sim x^{(n+2)/[2(n+1)]}.$$

Следует отметить, что при анализе распределения числа Нуссельта достаточно исследовать распределение числа Шервуда, поскольку на стенке в силу граничного условия выполняется соотношение  $\partial\varphi/\partial\eta = -[(N_t)_x/(N_b)_x]\partial\theta/\partial\eta$ . Поэтому в дальнейшем используется равенство  $\text{Sh}_x = -[(N_t)_x/(N_b)_x]\text{Nu}_x$ .

**3. Результаты численного решения и их анализ.** Система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (7)–(10) с краевыми условиями (11), (12) решалась численно методом локальной неавтономности [43]. Прежде всего, с использованием приближения локального неавтономного пограничного слоя система дифференциальных уравнений (7)–(10) преобразуется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Затем краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений решается с использованием программы `bvp4c` пакета MATLAB методом стрельбы с выбранными соответствующим образом начальными условиями. При решении краевой задачи значение величины  $\eta_\infty$  (линейного размера области) выбирается таким образом, чтобы выполнялись все краевые условия на бесконечности. При численных расчетах переменная интегрирования  $\eta$  изменялась в интервале от значения  $\eta = 0$  до значения  $\eta_\infty = 10$ . Значение  $\eta_\infty = 10$  соответствует условию  $\eta \rightarrow \infty$  и больше безразмерных толщин теплового и гидродинамического пограничных слоев. Погрешность вычислений не превышала значения  $10^{-8}$ .

Для сравнения результатов численных расчетов, полученных в данной работе, с результатами, полученными в работе [4], в табл. 1 данные приведены с точностью до шести десятичных знаков. Видно, что результаты практически совпадают с результатами работы [4], поэтому значения различных величин, полученных с использованием пакета MATLAB, приведены в табл. 2, 3 с точностью до пяти десятичных знаков.

Используемый в настоящей работе численный метод подробно изложен в работах [20, 44, 45]. Ниже проводится анализ распределения в потоке наножидкости скорости, температуры, концентрации наночастиц и параметра производства энтропии при различных значениях термодинамических параметров задачи. Вычисления проводились при различных значениях показателя степени  $n$ . Ниже приведены результаты, полученные при следующих значениях параметров задачи (если не указаны иные значения):  $n = 0,5$  (псевдопластическая жидкость, вязкость которой уменьшается при увеличении деформации сдвига),  $\text{Pr}_x = 10$  (несущей жидкостью является вода или полимер с низкой плотностью, при этом диффузия вещества существенно больше тепловой диффузии),  $(N_b)_x = 0,5$  (сильное броуновское движение и сферические частицы малого размера),  $\text{Le}_x = 0,5$  (диффузия наночастиц в два раза больше тепловой диффузии),  $\gamma = 0,5$  (существенный вклад тепловой конвекции на стенке). На рис. 2–10 представлены распределения по толщине пограничного слоя безразмерных скорости, температуры и объемной доли наночастиц, полученные с использованием неавтономного решения.

В табл. 1 приведены значения градиентов  $dU/d\eta$  и  $d\theta/d\eta$  для различных значений переменной  $\eta$  при  $n = 0,5$ ,  $\text{Pr}_x = 10$ ,  $(N_b)_x = (N_t)_x = \text{Le}_x = 0$ . Проведено сравнение результатов, полученных с использованием рассматриваемой модели без учета наномасштабных эффектов, конвективных краевых условий и процессов массопереноса, с результатами локального неавтономного решения [4]. Результаты решений практически совпадают.



Таблица 1

Значения градиентов скорости  $dU/d\eta$  и температуры  $d\theta/d\eta$  при  $n = 0,5$ ,  $Pr_x = 10$ ,  $(N_b)_x = (N_t)_x = Le_x = 0$  и различных значениях  $\eta$

$\eta$	$dU/d\eta$		$d\theta/d\eta$	
	Работа [4]	Настоящая работа	Работа [4]	Настоящая работа
0	1,104 406	1,104 409	-1,139 345	-1,139 346
0,1	1,001 948	1,001 952	-1,137 857	-1,137 859
0,2	0,905 206	0,905 208	-1,127 787	-1,127 789
0,3	0,814 695	0,814 696	-1,101 675	-1,101 677
0,4	0,730 722	0,730 727	-1,054 052	-1,054 055
0,5	0,653 416	0,653 418	-0,982 272	-0,982 275
0,6	0,582 748	0,582 750	-0,887 155	-0,887 158
0,7	0,518 561	0,518 564	-0,773 095	-0,773 099
1,0	0,361 926	0,361 929	-0,397 539	-0,397 541
1,6	0,174 160	0,174 163	-0,026 229	-0,026 232
2,0	0,108 331	0,108 332	-0,001 286	-0,001 286
2,5	0,061 694	0,061 695	-0,000 007	-0,000 007

Таблица 2

Значения на стенке градиентов безразмерных скорости, температуры и концентрации наночастиц при различных значениях показателя степени  $n$

$n$	$(dU/d\eta) _{\eta=0}$	$(d\theta/d\eta) _{\eta=0}$	$(d\varphi/d\eta) _{\eta=0}$
0,2	1,695 50	-0,227 53	0,227 53
0,3	1,279 99	-0,227 36	0,227 36
0,5	0,983 76	-0,229 80	0,229 80
0,7	0,880 89	-0,233 31	0,233 31
1,0	0,826 90	-0,238 60	0,238 60
1,2	0,815 71	-0,241 80	0,241 80
1,5	0,813 30	-0,245 99	0,245 99
2,0	0,823 41	-0,250 04	0,250 04

В табл. 2 приведены значения градиентов безразмерных скорости, температуры и объемной доли наночастиц на стенке при различных значениях показателя степени  $n$ . Видно, что с увеличением  $n$  (при переходе от псевдопластической жидкости ( $n < 1$ ) к дилатантной ( $n > 1$ )) градиент скорости уменьшается и течение наножидкости существенно замедляется. Такая же закономерность имеет место в эксперименте [19]. Это может быть обусловлено тем, что в более вязкой дилатантной наножидкости агломерация наночастиц вблизи стенки больше, чем в менее вязкой псевдопластической наножидкости [17]. Следует также отметить, что локальное число Рейнольдса  $Re_x$  изменяется по закону  $x^{(n+2)/2}$ , а коэффициент  $C_f$  — по закону  $x^{-(n+2)/[2(n+1)]}$ . Это означает, что скорость уменьшения коэффициента поверхностного трения вниз по потоку не зависит от значения показателя степени  $n$ . Также из табл. 2 следует, что градиент температуры, зависящий от числа Нуссельта, увеличивается с увеличением показателя степени  $n$ . Следовательно, в дилатантных наножидкостях максимальная скорость теплопередачи имеет место на стенке, что подтверждается экспериментальными данными для наножидкостей, содержащих металлические частицы [46]. Такая закономерность обусловлена большей концентрацией частиц малого размера вблизи стенки. В результате в пограничном слое вблизи стенки образуются

Таблица 3

Значения градиентов безразмерных скорости  $dU/d\eta$ , температуры  $d\theta/d\eta$  и объемной доли  $d\varphi/d\eta$  при  $n = 0,5$ ,  $Pr_x = 1$ ,  $(N_b)_x = (N_t)_x = Le_x = 0,5$ ,  $\gamma = 0,5$  и различных значениях  $\eta$

$\eta$	$dU/d\eta$	$d\theta/d\eta$	$d\varphi/d\eta$
0	0,823 41	-0,250 04	0,250 04
0,10	0,792 41	-0,250 00	0,249 98
0,20	0,760 38	-0,249 76	0,249 67
0,30	0,727 39	-0,249 17	0,248 85
0,40	0,693 55	-0,248 06	0,247 33
0,50	0,658 95	-0,246 31	0,244 89
0,70	0,587 90	-0,240 40	0,236 66
0,85	0,534 67	-0,233 71	0,227 31
1,00	0,480 95	-0,224 86	0,214 96
1,25	0,388 34	-0,204 55	0,186 73
1,50	0,300 56	-0,179 38	0,152 26
1,70	0,233 06	-0,156 16	0,121 18
2,00	0,141 97	-0,119 37	0,073 94

кластеры наночастиц, что приводит к увеличению числа Шервуда ( $Sh_x = -(N_t/N_b) Nu_x$ , следовательно,  $\partial\varphi/\partial\eta = -(N_t/N_b) \partial\theta/\partial\eta$ ) на пластине и тем самым к увеличению скорости массопереноса наночастиц на пластине.

В табл. 3 приведены значения градиентов  $dU/d\eta$ ,  $d\theta/d\eta$ ,  $d\varphi/d\eta$  при  $n = 0,5$ ,  $Pr_x = 1$ ,  $(N_b)_x = (N_t)_x = Le_x = 0,5$ ,  $\gamma = 0,5$  и различных значениях  $\eta$ . Из приведенных результатов следует, что коэффициент поверхностного трения уменьшается по мере удаления от наклонной стенки в направлении нормали, в то время как градиент температуры, связанный с числом Нуссельта, увеличивается. Как и коэффициент поверхностного трения, градиент концентрации наночастиц уменьшается при увеличении расстояния от стенки. Такая же закономерность наблюдается при больших числах Шервуда, что обусловлено агломерацией наночастиц [19, 46]. Однако в случае псевдопластических жидкостей это уменьшение менее значительно, чем в случае дилатантных.

На рис. 2–10 приведены зависимости скорости, объемной доли наночастиц и производства энтропии от поперечной координаты  $\eta$  ( $f(\eta_\delta)$  — нормированная функция тока; безразмерная толщина пограничного слоя  $\eta_\delta$  определяется как значение  $\eta$ , при котором безразмерная скорость на рис. 2 равна 0,99). Из рис. 2 следует, что скорость потока псевдопластической наножидкости ( $n < 1$ ) больше скорости дилатантной жидкости ( $n > 1$ ). Это обусловлено тем, что в случае псевдопластической жидкости вязкость уменьшается с увеличением скорости деформации сдвига, а в случае дилатантной — увеличивается. Поэтому для псевдопластической наножидкости скорость диффузии вещества больше, чем для дилатантной. Псевдопластическая наножидкость движется с ускорением, дилатантная — с замедлением. Для рассматриваемых в настоящей работе наножидкостей с малой объемной долей наночастиц, несмотря на то что вблизи твердой стенки происходит их агломерация, полагается, что частицы равномерно распределены по пограничному слою. При наличии наночастиц вследствие изменения вязкости увеличивается скорость диффузии вещества, в частности вблизи стенки. При увеличении расстояния от стенки уменьшаются объемная доля наночастиц и скорость потока, что отмечается также в работе [19]. В окрестности границы пограничного слоя ускорение потока дилатантной жидкости больше ускорения потока псевдопластической жидкости. В работе [22] показано, что для распределения скоростей наножидкостей, содержащих металлические частицы, существует

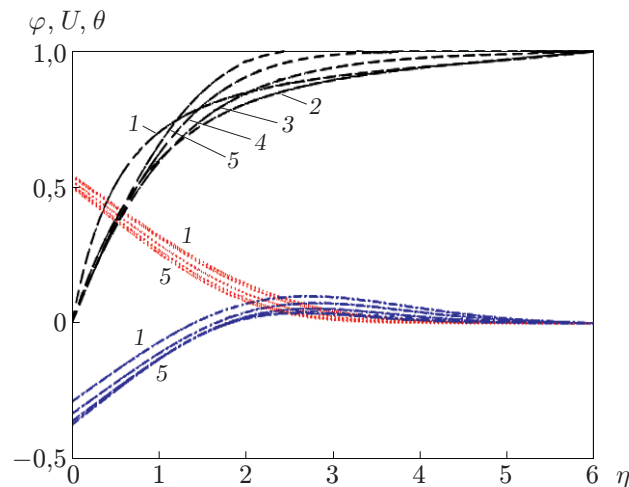


Рис. 2. Распределения по толщине пограничного слоя скорости (штриховые линии), температуры (пунктирные линии) и объемной доли (штрихпунктирные линии) наночастиц при различных значениях параметра  $n$ :  
 1 —  $n = 0,2$ , 2 —  $n = 0,5$ , 3 —  $n = 1,0$ , 4 —  $n = 1,5$ , 5 —  $n = 2,0$

переходная область, находящаяся на некотором расстоянии от стенки. Этот вывод следует также из рис. 2. В последующих исследованиях целесообразно учитывать турбулентность в этой переходной области, которой пренебрегается в модели ламинарного течения. Кривые, приведенные на рис. 2, при всех значениях параметра  $n$  и при увеличении параметра  $\eta$  выходят на гладкие асимптотики. Это свидетельствует о том, что при вычислении решения с использованием пакета MATLAB значение  $\eta_\infty$  выбрано правильно. Из рис. 2 также следует, что температура уменьшается с увеличением степени  $n$ , следовательно, толщина теплового пограничного слоя уменьшается с увеличением параметра  $n$ . Такая закономерность распределения температуры имеет место во всем пограничном слое (от стенки до границы со свободным потоком) в отличие от закономерности распределения скорости, которая зависит как от реологических свойств наножидкости, так и от расстояния от стенки.

Увеличение вязкости способствует увеличению скорости термодиффузии, однако препятствует диффузии вещества. В результате наножидкость нагревается и происходит ее загущение, что наряду с увеличением теплопроводности вследствие наличия твердых наночастиц приводит к увеличению интенсивности теплопереноса. В случае наночастиц, в отличие от случая частиц микро-, миллиразмеров, не происходит осаждения частиц и запыления каналов, следовательно, не происходит падения давления и не нарушается устойчивость течения суспензии.

При любом значении показателя степени  $n$  объемная доля наночастиц быстро увеличивается вблизи наклонной стенки, достигая максимума. Течение в свободном потоке является установившимся, это означает, что краевые условия на бесконечности при численном моделировании поставлены правильно. Таким образом, реология течения адекватно описывается с использованием степенной модели наножидкости и модели двойной диффузии Буонджорно. Такой подход позволяет определить распределение объемной доли наночастиц в наножидкости.

Во многих работах для описания реологии наножидкости используется модель Тивари — Даса (см., например, [25]). Однако эта модель не позволяет описать броуновское движение частиц и термофорез, которые, как экспериментально установлено, оказывают существенное влияние на реологию наножидкости. Экспериментально и теоретически до-

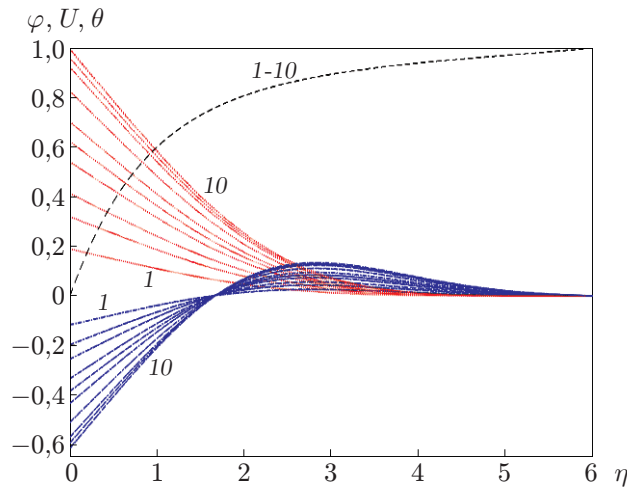


Рис. 3. Распределения по толщине пограничного слоя скорости (штриховые линии), температуры (пунктирные линии) и объемной доли наночастиц (штрихпунктирные линии) при различных значениях параметра  $\gamma$ :  
 1 —  $\gamma = 0,1$ , 2 —  $\gamma = 0,2$ , 3 —  $\gamma = 0,3$ , 4 —  $\gamma = 0,5$ , 5 —  $\gamma = 0,7$ , 6 —  $\gamma = 1,0$ , 7 —  $\gamma = 2,0$ , 8 —  $\gamma = 5,0$ , 9 —  $\gamma = 10,0$ , 10 —  $\gamma = 50,0$ , 11 —  $\gamma = 100,0$

казано, что степенная реологическая модель количественно описывает течение наножидкостей.

На рис. 3 приведены распределения по толщине пограничного слоя скорости  $U$ , температуры  $\theta$  и объемной доли наночастиц  $\varphi$  при различных значениях конвективного параметра  $\gamma$ . Как и в других работах (см., например, [29]), распределение скорости практически не зависит от параметра  $\gamma$ . Температура  $\theta$  существенно увеличивается с увеличением параметра  $\gamma$ , что приводит к увеличению толщины теплового пограничного слоя. Параметр  $\gamma$  пропорционален отношению коэффициента теплопередачи холодной жидкости  $h_f$  к коэффициенту теплопередачи горячей жидкости. Тепловое сопротивление на горячей поверхности потока обратно пропорционально коэффициенту  $h_f$ , поэтому коэффициент теплопередачи уменьшается на горячей поверхности потока при увеличении параметра  $\gamma$  и как следствие увеличивается температура поверхности. Из рис. 3 также следует, что при больших значениях параметра  $\gamma$  ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) температура достигает максимального значения  $\theta = 1$ . Поэтому в пределе ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) конвективное краевое условие переходит в условие, соответствующее постоянной температуре на поверхности (изотермический случай). При увеличении параметра  $\gamma$  вследствие теплопередачи увеличивается нагрев пластины, что приводит к увеличению градиента температуры на пластине. С увеличением параметра  $\gamma$  объемная доля наночастиц вблизи твердой стенки уменьшается, а на некотором удалении от стенки — увеличивается. Следовательно, с увеличением параметра  $\gamma$  увеличивается неоднородность распределения объемной доли наночастиц в пограничном слое. Как указано выше, параметр  $\gamma$  практически не оказывает влияния на распределение скорости и как следствие на толщину гидродинамического пограничного слоя.

На рис. 4 приведены распределения по толщине пограничного слоя скорости, температуры и объемной доли наночастиц при различных значениях параметра броуновского движения  $(N_b)_x$ . Видно, что с увеличением параметра  $(N_b)_x$  существенно увеличивается объемная доля наночастиц как в случае, когда несущей жидкостью является воздух, так и в случае, когда несущей жидкостью является вода. При увеличении параметра  $(N_b)_x$  существенно увеличиваются толщина концентрационного пограничного слоя и объемная доля наночастиц вблизи твердой поверхности. Параметр броуновского движения  $(N_b)_x$

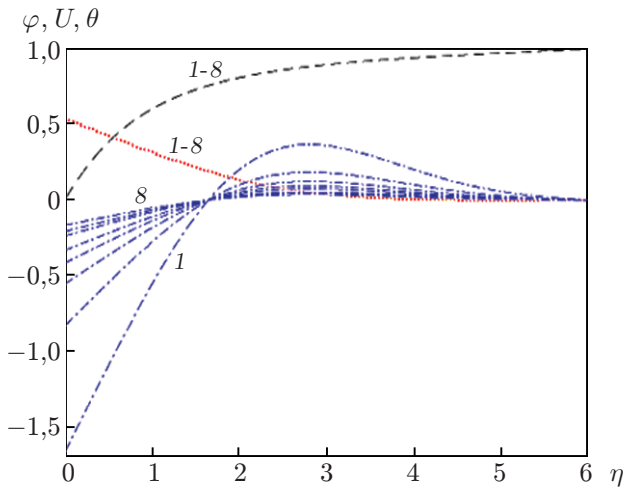


Рис. 4

Рис. 4. Распределения по толщине пограничного слоя скорости (штриховые линии), температуры (пунктирные линии) и объемной доли (штрихпунктирные линии) наночастиц при различных значениях параметра броуновского движения  $(N_b)_x$ :

1 —  $(N_b)_x = 0,1$ , 2 —  $(N_b)_x = 0,2$ , 3 —  $(N_b)_x = 0,3$ , 4 —  $(N_b)_x = 0,4$ , 5 —  $(N_b)_x = 0,5$ ,  
6 —  $(N_b)_x = 0,7$ , 7 —  $(N_b)_x = 0,8$ , 8 —  $(N_b)_x = 1,0$

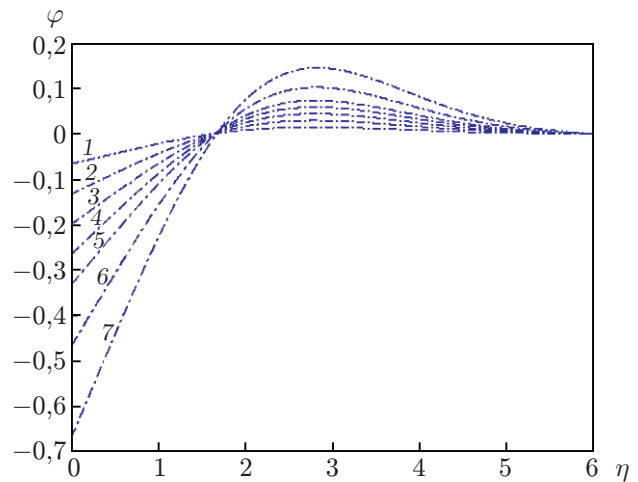


Рис. 5

Рис. 5. Распределение объемной доли наночастиц по толщине пограничного слоя при различных значениях параметра  $(N_t)_x$ :

1 —  $(N_t)_x = 0,1$ , 2 —  $(N_t)_x = 0,2$ , 3 —  $(N_t)_x = 0,3$ , 4 —  $(N_t)_x = 0,4$ , 5 —  $(N_t)_x = 0,5$ ,  
6 —  $(N_t)_x = 0,7$ , 7 —  $(N_t)_x = 1,0$

практически не оказывает влияния на распределения скорости и температуры. Это характерно для течения тонких пленок, поскольку, несмотря на то что броуновское движение наночастиц приводит к увеличению теплопроводности, очень малая толщина пленки препятствует эффективному нагреву. Нагрев пленок большей толщины происходит быстрее, поскольку в этом случае увеличивается теплообмен между отдельными частицами.

На рис. 5 приведено распределение объемной доли наночастиц по толщине пограничного слоя при различных значениях параметра термофореза  $(N_t)_x$ . Видно, что с увеличением параметра  $(N_t)_x$  концентрация наночастиц уменьшается, отток наночастиц от поверхности наклонной пластины увеличивается под воздействием градиента температуры. Вследствие этого уменьшается объемная доля частиц в пограничном слое и как следствие незначительно уменьшается толщина пограничного слоя. Такая закономерность отмечена также в других работах (см., например, [23]) в случае течения как ньютоновской жидкости, так и неньютоновской.

На рис. 6 приведены распределения по толщине пограничного слоя псевдопластической ( $n = 0,5$ ) наножидкости скорости, температуры и объемной доли наночастиц при различных значениях локального числа Прандтля  $Pr_x$ . (Число Прандтля представляет собой отношение коэффициента диффузии вещества к коэффициенту диффузии тепла в пограничном слое.) В случае псевдопластической наножидкости при увеличении числа Прандтля от 0,2 до 2,0 толщина теплового пограничного слоя монотонно убывает, температура наножидкости уменьшается, толщина концентрационного пограничного слоя увеличивается, объемная доля наночастиц увеличивается вблизи пластины и незначительно уменьшается вдали от нее.

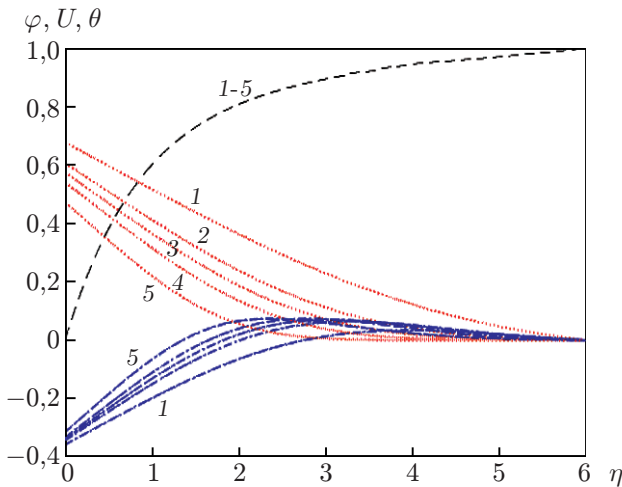


Рис. 6

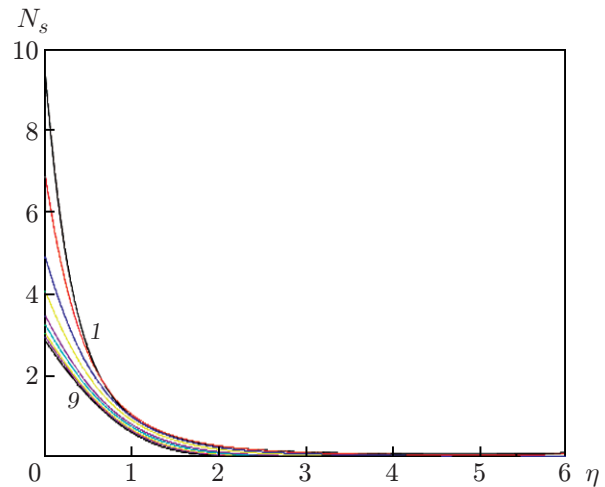


Рис. 7

Рис. 6. Распределения по толщине пограничного слоя скорости (штриховые линии), температуры (пунктирные линии) и объемной доли (штрихпунктирные линии) наночастиц при различных значениях числа Прандтля  $Pr_x$ : 1 —  $Pr_x = 0,2$ , 2 —  $Pr_x = 0,5$ , 3 —  $Pr_x = 0,7$ , 4 —  $Pr_x = 1,0$ , 5 —  $Pr_x = 2,0$

Рис. 7. Распределение по толщине пограничного слоя параметра производства энтропии при различных значениях показателя степени  $n$ : 1 —  $n = 0,2$ , 2 —  $n = 0,3$ , 3 —  $n = 0,4$ , 4 —  $n = 0,5$ , 5 —  $n = 0,7$ , 6 —  $n = 1,0$ , 7 —  $n = 1,2$ , 8 —  $n = 1,5$ , 9 —  $n = 1,7$

На рис. 7 приведены распределения по толщине пограничного слоя параметра производства энтропии при различных значениях показателя степени  $n$ . С увеличением показателя  $n$  производство энтропии  $N_s$  уменьшается, поскольку при этом меняется вязкость жидкости и существенно увеличивается сопротивление течению жидкости. Аналогичное изменение параметра производства энтропии происходит при изменении параметра броуновского движения  $(N_b)_x$  и параметра термофореза  $(N_t)_x$  (рис. 8, 9). С увеличением интенсивности броуновского движения увеличивается число столкновений наночастиц (чем больше параметр  $(N_b)_x$ , тем меньше размер наночастиц и больше их подвижность). При этом увеличивается интенсивность течения и уменьшается производство энтропии вследствие потерь энергии. Аналогичные выводы содержатся в работах [13, 14, 21]. Следует отметить, что при течении псевдопластической наножидкости с большой скоростью сдвига (например, в пограничных слоях) броуновское движение оказывает на характер течения большее влияние, чем конвекция, а при течении с малой скоростью сдвига конвекция оказывает на характер течения большее влияние, чем броуновское движение [19], что подтверждается экспериментальными данными.

На рис. 10 приведено распределение параметра производства энтропии по толщине пограничного слоя. Видно, что производство энтропии увеличивается с увеличением параметра вязкой диссипации  $Gr_x/\Omega$ . При  $Gr_x/\Omega = 0$  вследствие вязкости жидкости нагрева не происходит. При увеличении в наножидкости внутреннего трения производство энтропии увеличивается и во всех случаях достигает максимума на поверхности пластины. Поэтому если при моделировании пренебрегается вязкой диссипацией, то значение параметра производства энтропии занижается. Для того чтобы оценить скорость производства энтропии при оптимизации термодинамических процессов, происходящих в потоках тонких пленок наножидкости при покрытии поверхностей, необходимо учитывать диссипацию энергии.

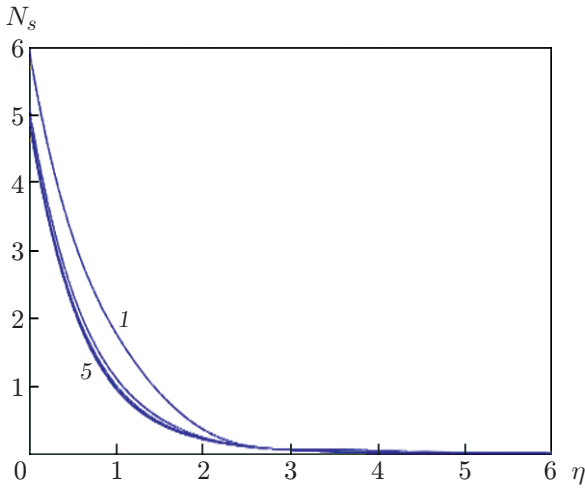


Рис. 8

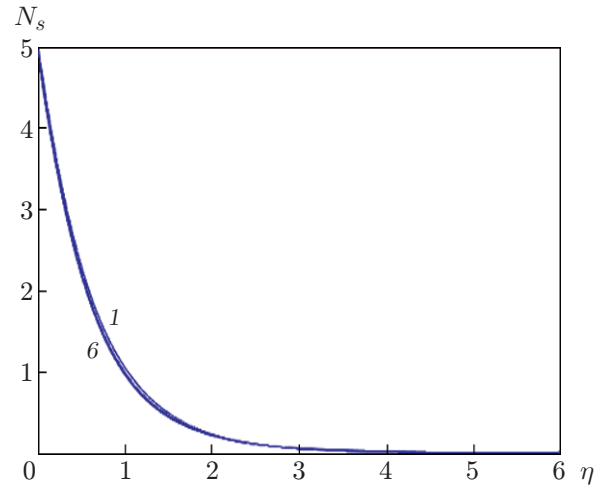


Рис. 9

Рис. 8. Распределение по толщине пограничного слоя параметра производства энтропии при различных значениях параметра  $(N_b)_x$ :

1 —  $(N_b)_x = 0,1$ , 2 —  $(N_b)_x = 0,2$ , 3 —  $(N_b)_x = 0,3$ , 4 —  $(N_b)_x = 0,5$ , 5 —  $(N_b)_x = 0,7$

Рис. 9. Распределение по толщине пограничного слоя параметра производства энтропии при различных значениях параметра  $(N_t)_x$ :

1 —  $(N_t)_x = 0,1$ , 2 —  $(N_t)_x = 0,2$ , 3 —  $(N_t)_x = 0,3$ , 4 —  $(N_t)_x = 0,4$ , 5 —  $(N_t)_x = 0,5$ , 6 —  $(N_t)_x = 0,7$

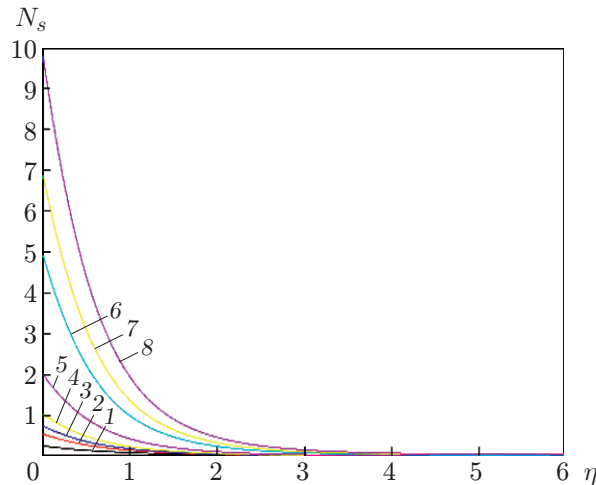


Рис. 10. Распределение по толщине пограничного слоя параметра производства энтропии при различных значениях параметра  $Br_x / \Omega$ :

1 —  $Br_x / \Omega = 0,2$ , 2 —  $Br_x / \Omega = 0,5$ , 3 —  $Br_x / \Omega = 0,7$ , 4 —  $Br_x / \Omega = 1,0$ , 5 —  $Br_x / \Omega = 2,0$ , 6 —  $Br_x / \Omega = 5,0$ , 7 —  $Br_x / \Omega = 7,0$ , 8 —  $Br_x / \Omega = 10,0$

**Заключение.** Предложена математическая модель неавтономного теплообмена в пленке наножидкости, стекающей вдоль наклонной пластины. Исследование термодинамики гидродинамического течения с учетом массо- и теплопередачи выполнено с использованием первого и второго законов термодинамики. Получено численное решение задачи для различных значений параметров. Проведено сравнение полученного решения с известными решениями. На основе полученных данных можно сделать следующие выводы.

Производство энтропии существенно уменьшается с увеличением интенсивности броуновского движения и показателя степени  $n$  в реологическом законе и незначительно уменьшается с увеличением параметра термофореза.

Скорость производства энтропии в псевдопластической наножидкости существенно выше, чем в дилатантной. Скорость производства энтропии в ньютоновской жидкости больше, чем в дилатантной, и меньше, чем в псевдопластической. Производство энтропии существенно зависит от реологических свойств наножидкости.

С увеличением конвективного параметра увеличиваются температура, толщина теплового пограничного слоя, количество движения в пограничном слое и производство энтропии.

В случае псевдопластической жидкости ( $n = 0,5$ ) с увеличением числа Прандтля  $Pr_x$  монотонно уменьшается толщина температурного пограничного слоя.

С увеличением интенсивности броуновского движения увеличивается толщина концентрационного пограничного слоя.

С увеличением параметра термофореза уменьшается концентрация наночастиц.

Скорость псевдопластической жидкости ( $n < 1$ ) больше скорости дилатантной ( $n > 1$ ), поскольку с увеличением скорости сдвига в псевдопластической жидкости вязкость уменьшается, в дилатантной — увеличивается.

С увеличением конвективного параметра  $\gamma$  увеличивается конвективный нагрев пластины, в результате чего увеличивается градиент температуры на пластине.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Wang C.** Analytic solutions for a liquid thin film on an unsteady stretching surface // Heat Mass Transfer. 2006. V. 42. P. 759–766.
2. **Andersson H. I., Irgens F.** Gravity-driven laminar film flow of power-law fluids along vertical walls // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1988. V. 27, N 2. P. 153–172.
3. **Gorla R. S. R., Nee Y. L.** Heat transfer in the thermal entrance region of a laminar non-Newtonian falling liquid film // Intern. J. Heat Fluid Flow. 1989. V. 10, N 2. P. 166–169.
4. **Shang D. Y., Anderson H. I.** Heat transfer in gravity-driven film flow of power-law fluids // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1999. V. 42. P. 2085–2099.
5. **Gorla R. S. R., Byrd L. W., Pratt D. M.** Entropy minimization in micro-scale evaporating thin liquid film in capillary tubes // Heat Mass Transfer. 2008. V. 45, N 2. P. 131–138.
6. **Choi S. U. S.** Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles // Development and applications of non-Newtonian flows. N. Y.: ASME, 1995. V. 231. P. 99–105.
7. **Sharma K. R.** Process considerations for nanostructured coatings // Anti-abrasive nanocoatings, current and future applications. Cambridge: Woodhead Publ., 2015. P. 137–153.
8. **Phan H. T., Caney N., Phan H., et al.** Surface wettability control by nanocoating: The effects on pool boiling heat transfer and nucleation mechanism // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2009. V. 52. P. 5459–5471.



9. **Ullah A., Alzahrani E. O., Shah Z., et al.** Nanofluids thin film flow of Reiner — Philippoff fluid over an unstable stretching surface with Brownian motion and thermophoresis effects // *Coatings*. 2019. V. 9, N 1. P. 21. [Electron resource]. Режим доступа: <https://doi.org/10.3390/coatings9010021>.
10. **Buongiorno J.** Convective transport in nanofluids // *Trans. ASME. J. Heat Transfer*. 2006. V. 128. P. 240–250.
11. **Tiwari R. K., Das M. K.** Heat transfer augmentation in a two-sided lid-driven differentially heated square cavity utilizing nanofluids // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 2007. V. 50. P. 2002–2018.
12. **Pak B. C., Cho Y. I.** Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particles // *Experiment Heat Transfer*. 1998. V. 11, N 2. P. 151–170.
13. **Kuznetsov A. V., Nield D. A.** Natural convective boundary-layer flow of a nanofluid past a vertical plate // *Intern. J. Thermal Sci.* 2010. V. 49, N 2. P. 243–247.
14. **Tripathi D., Sharma A., Anwar Bég O.** Joule heating and buoyancy effects in electro-osmotic peristaltic transport of aqueous nanofluids through a microchannel with complex wave propagation // *Adv. Powder Technol.* 2018. V. 29. P. 639–653.
15. **Kasmani R. M., Muhaimin I., Kandasamy R.** Laminar boundary layer flow of a nanofluid along a wedge in the presence of suction/injection // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. V. 54, N 3. P. 377–384.
16. **Loganathan P., Nirmal Chand P., Ganesan P.** Transient natural convective flow of a nanofluid past a vertical plate in the presence of heat generation // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2015. V. 56, N 3. P. 433–442.
17. **Ahmadi Nadooshan A., Eshgarf H., Afrand M.** Evaluating the effects of different parameters on rheological behavior of nanofluids: A comprehensive review // *Powder Technol.* 2018. V. 338. P. 342–353.
18. **Sharma A. K., Tiwari A. K., Dixit A. R.** Rheological behaviour of nanofluids: A review // *Renewable Sustainable Energy Rev.* 2016. V. 53. P. 779–791.
19. **Chen H., Ding Y., Tan Ch., et al.** Rheological behaviour of nanofluids // *New J. Phys.* 2007. V. 9, N 10. [Electron resource]. Режим доступа: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/9/10/367/meta>.
20. **Vasu B., Atul Kumar Ray.** Numerical study of Carreau nanofluid flow past vertical plate with the Cattaneo — Christov heat flux model // *Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*. 2019. V. 29, N 2. P. 702–723. [Electron resource]. Режим доступа: <https://doi.org/10.1108/HFF-03-2018-0104>.
21. **Gorla R. S. R., Gireesha B. K.** Convective heat transfer in three-dimensional boundary-layer flow of viscoelastic nanofluid // *AIAA J. Thermophys. Heat Transfer*. 2016. V. 30. P. 334–341.
22. **Studart A. R., Amstad E., Antoni M., Gauckler L. J.** Rheology of concentrated suspensions containing weakly attractive alumina nanoparticles // *J. Amer. Ceram. Soc.* 2006. V. 89. P. 2418–2425.
23. **Hayat T., Hussain M., Shehzad S. A., Alsaedi A.** Flow of a power-law nanofluid past a vertical stretching sheet with a convective boundary condition // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2016. V. 57, N 1. P. 173–179.
24. **Gorla R. S. R., Vasu B.** Unsteady convective heat transfer to a stretching surface in a non-Newtonian nanofluid // *J. Nanofluids*. 2016. V. 5, N 4. P. 581–594.
25. **Ferdows M., Hamad M. A. A.** MHD flow and heat transfer of a power-law non-Newtonian nanofluid (Cu–H<sub>2</sub>O) over a vertical stretching sheet // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2016. V. 57, N 4. P. 603–610.

26. **Makinde O. D., Aziz A.** Boundary layer flow of a nanofluid past a stretching sheet with a convective boundary condition // *Intern. J. Thermal Sci.* 2011. V. 50, N 7. P. 1326–1332.
27. **Kameswaran P. K., Vasu B., Murthy P. V. S. N., Gorla R. S. R.** Mixed convection from a wavy surface embedded in a thermally stratified nanofluid saturated porous medium with non-linear Boussinesq approximation // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer.* 2016. V. 77. P. 78–86.
28. **Anwar Bég O., Motsa S. S., Islam M. N., Lockwood M.** Pseudo-spectral and variational iteration simulation of exothermically-reacting Rivlin — Ericksen viscoelastic flow and heat transfer in a rocket propulsion duct // *Comput. Thermal Sci.* 2014. V. 6. P. 91–102.
29. **Uddin M. J., Anwar Bég O., Ghose P. K., Ismael A. I. M.** Numerical study of non-Newtonian nanofluid transport in a porous medium with multiple convective boundary conditions and nonlinear thermal radiation effects // *Intern. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow.* 2016. V. 26. P. 1–25.
30. **Bejan A.** Entropy generation through heat and fluid flow. N. Y.: Wiley, 1982.
31. **Bouras F., Khaldi F.** Numerical analysis of entropy generation in a turbulent diffusion flame // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2016. V. 57, N 1. P. 20–26.
32. **Vasu B., RamReddy C., Murthy P. V. S. N., Gorla R. S. R.** Entropy generation analysis in nonlinear convection flow of thermally stratified fluid in saturated porous medium with convective boundary condition // *ASME J. Heat Transfer.* 2017. V. 139, N 9. 091701.
33. **Reddy G. J., Kumar M., Anwar Bég O.** Effect of temperature dependent viscosity on entropy generation in transient viscoelastic polymeric fluid flow from an isothermal vertical plat // *Phys. A. Statist. Mech. Appl.* 2018. V. 510. P. 426–445.
34. **Butt A. S., Ali A.** Entropy generation effects in a hydromagnetic free convection flow past a vertical oscillating plate // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2016. V. 57, N 1. P. 27–37.
35. **Rashidi M. M., Kavyani N., Anwar Bég O., Gorla R. S. R.** Transient magnetohydrodynamic film flow, heat transfer and entropy generation from a spinning disk system: DTM-Padé semi-numerical simulation // *Intern. J. Energy Technol.* 2013. V. 5. P. 1–14.
36. **Morsili S., Sabeur-Bendehina A.** Entropy generation and natural convection in square cavities with wavy walls // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. V. 54, N 6. P. 913–920.
37. **Srinivas J., Anwar Bég O.** Homotopy study of entropy generation in magnetized micropolar flow in a vertical parallel plate channel with buoyancy effect // *Heat Transfer Res.* 2018. V. 49. P. 529–553.
38. **Bhardwaj A., Shukla N., Rana P., Anwar Bég O.** Lie group analysis of nanofluid slip flow with Stefan blowing effect via modified Buongiorno's model: entropy generation analysis // *Different. Equat. Dynamic Systems.* 2019. [Electron resource]. Режим доступа: <https://doi.org/10.1007/s12591-019-00456-0>.
39. **Shukla N., Rana P., Anwar Bég O., et al.** Unsteady electromagnetic radiative nanofluid stagnation-point flow from a stretching sheet with chemically reactive nanoparticles, Stefan blowing effect and entropy generation // *J. Nanomaterials, Nanoengng Nanosystems.* 2018. [Electron resource]. DOI: 10.1177/2397791418782030.
40. **Woods L. C.** The thermodynamics of fluid systems. N. Y.: Oxford Univ. Press, 1975.
41. **Gutoff E. B.** Coating and drying defects troubleshooting operating problems / E. B. Gutoff, E. D. Cohen. N. Y.: Wiley-intersci. Publ., 1995.
42. **Liu Z.-M., Jin Y.-M., Liu H.-M.** Progress on formation and prevention of defects in thin film coating // *J. Safety Environment.* 2008. V. 8. P. 135–139.
43. **Handbook** of numerical heat transfer / Ed. by W. J. Minkowycz, E. M. Sparrow, J. Y. Murthy. N. Y.: John Wiley and Sons, 2006.

44. **Anwar Bég O., Bakier A. Y., Prasad V. R., Ghosh S. K.** Nonsimilar, laminar, steady, electrically-conducting forced convection liquid metal boundary layer flow with induced magnetic field effects // Intern. J. Thermal Sci. 2009. V. 48. P. 1596–1606.
45. **Anwar Bég O., Ferdows M., Islam S., Nazrul Islam M.** Numerical simulation of Marangoni magnetohydrodynamic bio-nanofluid convection from a non-isothermal surface with magnetic induction effects: a bio-nanomaterial manufacturing transport model // J. Mech. Medicine Biology. 2014. V. 14. P. 1450039.1–1450039.32.
46. **Akhavan-Behabadi M. A., Hekmatipour F., Mirhabibi S. M., et al.** Experimental investigation of thermal-rheological properties and heat transfer behavior of the heat transfer oil-copper oxide (HTO–CuO) nanofluid in smooth tubes // Experiment. Thermal Fluid Sci. 2015. V. 68. P. 681–688.

*Поступила в редакцию 27/XII 2018 г.,  
после доработки — 29/III 2019 г.  
Принята к публикации 29/IV 2019 г.*

---