ПМТФ, № 1, 1964

О НЕЙТРАЛИЗАЦИИ ИОННЫХ ПУЧКОВ

В. А. Левин

(*Москва*)

Рассматривается задача о нейтрализации ионного пучка при продольном вводе электронов с учетом их трения о ионы и излучения для стационарного и нестационарного случаев. Показано, что учет трения автоматически приводит к равенству электронного и ионного токов. Во всех предыдущих работах это было либо одним из предположений [1], либо утверждалось, что токи могут быть не равными [2]. Кроме того, показано, что развитие течения происходит таким образом, что вытягиваемый электронный ток равен ионному даже при отсутствии диссипации.

Проблеме нейтрализации ионных пучков посвящено много работ [1-5], в которых в основном рассматриваются одномерные стационарные режимы нейтрализации без учета диссипативных процессов. Ниже приводится решение задачи о нейтрализации одномерного ионного пучка при продольном вводе электронов с учетом их трения о ионы и излучения для стационарного и нестационарного случаев.

Предположим, что параметры ионного пучка постоянны. Тогда движение электронов внутри ионного пучка описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{e}{m}E - \nu(u - u_i) + \frac{2e^2}{3mc^3}\frac{d^2u}{dt^2} \tag{1}$$
$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nu}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi e(n_i - n), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E$$

Здесь u — скорость электронов, n — их плотность, E — напряженность электрического поля, φ — потенциал, ν — эффективная частота «соударений», рассчитанная на одну частицу, e — заряд электрона, m — его масса, c — скорость света, u_i — скорость ионов, n_i — их плотность. Величины ν, n_i, u_i предполагаются постоянными, а ионы однозарядными.

Второй член в правой части первого уравнения системы (1) представляет собой силу трения, действующую на поток электронов вследствие их «соударений» с ионами, а третий — силу торможения, возникающую благодаря излучению электронов [6].

Перепишем систему (1) в переменных Лагранжа. За независимые переменные примем время t и лагранжеву координату ψ, вводимую по формулам

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -n, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = nu$$

Система (1) в этих переменных имеет следующий вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{e}{m}E - \nu(u - u_i) + \frac{2e^2}{3mc^3}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = u \tag{2}$$
$$\frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{1}{n}, \qquad \frac{\partial E}{\partial \psi} = 4\pi e + 4\pi e n_i\frac{\partial x}{\partial \psi}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = \frac{E}{n}$$

Рассмотрим сначала стационарный поток. Поместим нейтрализатор (эмиттер электронов) в точке $x = 0$ и будем рассматривать течение в области $x > 0$. В переменных Эйлера имеем условия $u = u_0$, $n = n_0$, $\varphi = 0$, $E = 0$ при $x = 0$.

Если $u_0=0$, то вместо условия для плотности $n = n_0$ надо принять $nu = j_0$ при $x = 0$.

Равенство напряженности поля на нейтрализаторе означает, что вытягиваемый электронный ток ограничен пространственным зарядом. В противном случае условие для E будет другим.

Вторым условием будет ограниченность потенциала на бесконечности

$$|\varphi|_{x\to\infty} < M$$

Так как вытягиваемый электронный ток постоянен, то $\psi|_{x=0} = n_0 u_0 t = j_0 t$ (частица помечается моментом ее вылета из нейтрализатора).

В стационарном случае каждая вылетевшая частица проходит через одни и те же состояния, а это означает, что все величины зависят от одной переменной $\eta = j_0 t - \psi$. Граничные условия при этом имеют вид

$$x = 0, \quad u = u_0, \quad n = n_0, \quad \varphi = 0, \quad E = 0 \quad \text{при } \eta = 0$$
$$|\varphi| < M \quad \text{при } \eta \to \infty$$

Введем безразмерные переменные $\tau, \xi, N, U, \mathscr{E}, \Phi$ при помощи формул

$$\tau = \frac{\omega}{j_0}(j_0 t - \psi), \qquad x = \frac{u_i}{\omega}\xi, \qquad n = n_i N, \qquad u = u_i U$$
$$E = 4\pi e n_i \frac{u_i}{\omega}\mathscr{E}, \qquad \varphi = \frac{m u_i j_0}{e n_i}\Phi \qquad \left(\omega^2 = \frac{4\pi e^2 n_i}{m}\right) \tag{3}$$

В безразмерных величинах вместо (2) получим систему

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \xi = \alpha\tau - \sigma_0\frac{d\xi}{d\tau} + \sigma_0 + \varepsilon\frac{d^3\xi}{d\tau^3}$$
$$\frac{d\xi}{d\tau} = U = \frac{\alpha}{N}, \qquad \mathscr{E} = \xi - \alpha\tau, \qquad \frac{d\Phi}{d\tau} = -\frac{\mathscr{E}}{N} \tag{4}$$

с граничными условиями

$$\xi = 0, \ N = n_0 / n_i, \ U = u_0 / u_i, \ \Phi = 0, \ \mathscr{E} = 0 \quad \text{при } \tau = 0;$$
$$|\Phi| < M_1 \quad \text{при } \tau \to \infty$$

Здесь

$$\alpha = \frac{j_0}{n_i u_i}, \qquad \sigma_0 = \frac{\nu}{\omega}, \qquad \varepsilon = \frac{2e^2\omega}{3mc^3}$$

Исследуем влияние трения вследствие соударений и влияние излучения раздельно. Рассмотрим случай, когда излучение отсутствует. Тогда в зависимости от величины σ_0 возможны несколько случаев.

Первый случай $\sigma_0^2 - 4 = -4\sigma_1^2 < 0$. В этом случае для искомых величин с учетом граничных условий на нейтрализаторе получим

$$U = \frac{u_0}{u_i}\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\cos\sigma_1\tau + \alpha\left(1 - \exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\cos\sigma_1\tau\right) + $$
$$+ \frac{\sigma_0}{\sigma_1}\left[1 - \alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{u_0}{u_i} - \alpha\right)\right]\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\sin\sigma_1\tau$$

$$\xi = \alpha\tau + \sigma_0(1-\alpha)\left(1 - \exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\cos\sigma_1\tau\right) + \tag{5}$$
$$+ \frac{1}{\sigma_1}\left[\frac{u_0}{u_i} - \alpha - \frac{\sigma_0^2}{2}(1-\alpha)\right]\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\sin\sigma_1\tau$$

$$\mathscr{E} = \sigma_0(1-\alpha)\left(1 - \exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\cos\sigma_1\tau\right) + $$
$$+ \frac{1}{\sigma_1}\left[\frac{u_0}{u_i} - \alpha - \frac{\sigma_0^2}{2}(1-\alpha)\right]\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\sin\sigma_1\tau$$

Для потенциала получим уравнение

$$-\frac{d\Phi}{d\tau}=\left\{\sigma_0(1-\alpha)\left(1-\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\cos\sigma_1\tau\right)+\frac{1}{\sigma_1}\left[\frac{u_0}{u_i}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\alpha-\frac{\sigma_0^2}{2}(1-\alpha)\right]\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\sin\sigma_1\tau\right\}\left\{\frac{n_i}{n_0}\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\cos\sigma_1\tau+1-\right.$$

$$\left.-\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\cos\sigma_1\tau+\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}-\frac{1}{2}\left(\frac{n_i}{n_0}-1\right)\right]\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\sin\sigma_1\tau\right\} \quad (6)$$

Из этого уравнения видно, что для того чтобы потенциал был всюду ограничен, необходимо, чтобы $\alpha=1$. Таким образом, из условия ограниченности потенциала на бесконечности вытекает равенство электронного и ионного токов. Окончательно получим следующие формулы:

$$\Phi=\left(1-\frac{n_i}{n_0}\right)\left[1-\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\left(\cos\sigma_1\tau+\frac{\sigma_0}{2\sigma_1}\sin\sigma_1\tau\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(1-\frac{n_i}{n_0}\right)^2\exp(-\sigma_0\tau)\sin^2\sigma_1\tau \quad (7)$$

$$\xi=\tau+\frac{1}{\sigma_1}\left(\frac{u_0}{u_i}-1\right)\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\sin\sigma_1\tau$$

$$U=\frac{1}{N}=\frac{u_0}{u_i}\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\cos\sigma_1\tau+1-\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\cos\sigma_1\tau-$$

$$-\frac{\sigma_0}{2\sigma_1}\left(\frac{u_0}{u_i}-1\right)\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\sin\sigma_1\tau \quad (8)$$

$$\mathscr{E}=\frac{1}{\sigma_1}\left(\frac{u_0}{u_i}-1\right)\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\sin\sigma_1\tau$$

Из формулы (7) потенциал на бесконечности равен

$$\Phi_\infty=1-\frac{n_i}{n_0}$$

Второй случай $\sigma_0=2$. Аналогично предыдущему, получим равенство электронного и ионного токов, а также следующие выражения:

$$\Phi=\left(1-\frac{n_i}{n_0}\right)\left[1-(1+\tau)e^{-\tau}-\frac{1}{2}\tau^2\left(1-\frac{n_i}{n_0}\right)e^{-2\tau}\right]$$

$$\xi=\tau+\left(\frac{u_0}{u_i}-1\right)\tau e^{-\tau} \quad (9)$$

$$U=\frac{1}{N}=1+\left(\frac{u_0}{u_i}-1\right)(1-\tau)e^{-\tau},\qquad \mathscr{E}=\left(\frac{u_0}{u_i}-1\right)\tau e^{-\tau}$$

Третий случай $\sigma_0^2-4=4\sigma_2^2>0$. В этом случае получим

$$\Phi=\left(1-\frac{n_i}{n_0}\right)\left(1-\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\operatorname{ch}\sigma_2\tau-\frac{\sigma_0}{2\sigma_2}\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\operatorname{sh}\sigma_2\tau\right)+$$

$$+\frac{1}{4\sigma_2^2}\left(1-\frac{n_i}{n_0}\right)^2\exp(-\sigma_0\tau)(1-\operatorname{ch}2\sigma_2\tau) \quad (10)$$

$$\xi=\tau+\frac{1}{\sigma_2}\left(\frac{u_0}{u_i}-1\right)\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\operatorname{sh}\sigma_2\tau$$

$$U=\frac{1}{N}=1+\left(\frac{u_0}{u_i}-1\right)\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\left(\operatorname{ch}\sigma_2\tau-\frac{\sigma_0}{2\sigma_2}\operatorname{sh}\sigma_2\tau\right)$$

$$\mathscr{E}=\frac{1}{\sigma_2}\left(\frac{u_0}{u_i}-1\right)\exp\frac{-\sigma_0\tau}{2}\operatorname{sh}\sigma_2\tau$$

Из приведенных формул видно, что при удалении от нейтрализатора параметры электронного потока выравниваются с параметрами потока ионов тем быстрее, чем больше σ_0. Во всех случаях потенциал бесконечности получается одинаковым. Чтобы не возникало явления виртуального катода, на начальные скорости электронов накладывается ограничение

$$\frac{u_0}{u_i} \leqslant 1 + \exp\left(\frac{\sigma_0}{2\sigma_1} \operatorname{arctg} \frac{\sigma_0\sigma_1}{1 - 2\sigma_1^2}\right) \quad \text{(в случае 1)} \qquad (11)$$

$$\frac{u_0}{u_i} \leqslant 1 + e^2 \quad \text{(в случае 2)} \qquad (12)$$

$$\frac{u_0}{u_i} \leqslant 1 + \left(\frac{\sigma_0 + \sqrt{\sigma_0^2 - 4}}{\sigma_0 - \sqrt{\sigma_0^2 - 4}}\right)^{\chi} \qquad \left(\chi = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma_0^2 - 4}}\right) \quad \text{(в случае 3)} \qquad (13)$$

Полагая в формуле (11) σ_0 равным нулю, получим известное ограничение на скорость вылета [1]. В случаях, когда u_0 превышает эти критические значения, происходит частичное отражение электронного тока, идущего с эмиттера, от некоторого расстояния $\xi = \xi^*$. В этой точке скапливается бесконечное число электронов. Часть из них возвращается назад на нейтрализатор, а другая часть втягивается в ионный пучок. Происходит как бы перемещение нейтрализатора из начала координат в точку ξ^*.

Теперь выясним влияние торможения только за счет излучения $\sigma_0 = 0$. В этом случае при решении первого уравнения системы (4) получается характеристический многочлен третьей степени

$$-\varepsilon k^3 + k^2 + 1 = 0$$

Можно точно решить это уравнение, но в этом нет необходимости. Воспользуемся тем, что $\varepsilon \lll 1$, и найдем корни приближенно. Видно, что уравнение имеет один положительный и два комплексно сопряженных корня. Решение, соответствующее положительному корню, надо отбросить, так как это означает самоускорение электрона за счет излучения. (Парадокс, который разбирается в книге [6].) Два остальных корня с точностью до ε^2 будут $k_{1,2} = \pm i - {}^1/_2\, \varepsilon$. Предполагая, что токи равны, получим решения из формул (7), (8), приравняв $\sigma_0 = \varepsilon$ и $\sigma_1 = 1$. Из решения видно, что излучение начинает играть роль на расстояниях $L \sim 2u_i / \varepsilon\omega$.

Полагая $u_i \sim 10^7$ *см/сек*, $n_i \sim 10^9$ *см*$^{-3}$, получим $L \sim 10^6$ *км*. Отсюда видна чрезвычайно малая роль излучения, что позволяет им пренебречь.

Далее рассмотрим нестационарную задачу в следующей постановке. В начальный момент справа от нейтрализатора частиц нет. Затем с плоскости $x = 0$ в момент $t = 0$ начинает двигаться со скоростью u_i и плотностью частиц n_i ионный пучок. Этот пучок создает электрическое поле, которое вытягивает электроны. Скорость u_i и плотность n_i предполагаюся постоянными. Про нейтрализатор предположим, что он поставляет электронов столько, сколько нужно для того, чтобы напряженность поля на нем была равна нулю в любой момент времени. В силу этого с нейтрализатора будет вытягиваться постоянный электронный ток. Потенциал бесконечности должен быть ограничен, и для простоты пренебрежем трением. Будем также считать, что электроны покидают нейтрализатор с нулевой скоростью. Движение электронов внутри пучка в переменных Лагранжа будет описываться системой (2), в которой опущены члены, описывающие трение. Условия на нейтрализаторе останутся те же. Для электронов, обогнавших границу ионного пучка, т. е. при $x > u_i t$, имеем систему

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{e}{m} E_e, \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = u, \qquad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{1}{n} \qquad (14)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = \frac{E_e}{n} \qquad (E_e = 4\pi e(\psi + n_i u_i t - j_0 t))$$

Здесь E_e — напряженность собственного поля электронов.

Выражение для напряженности поля находится из условия непрерывности E при $x = u_i t$. Время обгона и момент обгона находятся из решения системы (2). Решая ее с заданными условиями на нейтрализаторе, получим, что до момента обгона вылетевшей частицей границы ионного пучка ее движение описывается следующими формулами:

$$x = \alpha u_i \left[\frac{j_0 t - \psi}{j_0} - \frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega(j_0 t - \psi)}{j_0}\right], \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{n_i}\left[1 - \cos\frac{\omega(j_0 t - \psi)}{j_0}\right] \tag{15}$$

$$u = \alpha u_i \left[1 - \cos\frac{\omega(j_0 t - \psi)}{j_0}\right] \qquad \left(\alpha = \frac{j_0}{n_i u_i}\right)$$

Покажем, что развитие течения происходит таким образом, что выполняется равенство электронного и ионного токов $\alpha = 1$.

Пусть $\alpha < 1$. Тогда существует частица $\psi^* = j_0 t^*$, т. е. вылетевшая в момент t^*, такая, что она и все вылетевшие за ней никогда не могут обогнать границу ионного пучка. Момент вылета t^* находится из условия равенства координаты и скорости частицы координате и скорости границы ионного пучка. Оказывается, существует значение α_0 такое, что при $\alpha \leqslant \alpha_0$ даже частица $\psi = 0$ не может обогнать границу. Величина α_0 находится из уравнения

$$(1 - \alpha_0)\,[2\pi - \arccos(1 - \alpha_0^{-1})] = \sqrt{2\alpha_0 - 1} \tag{16}$$

При $\alpha_0 < \alpha < 1$ для величины t^* получим формулу

$$t^* = \omega^{-1}\{\sqrt{2\alpha - 1} - (1 - \alpha)\,[2\pi - \arccos(1 - \alpha^{-1})]\} \tag{17}$$

Следовательно, область между границей ионного пучка и частицей ψ^* растет со временем и в ней непрерывно накапливаются ионы, т. е. потенциал неограниченно возрастает, чего быть не может; значит $\alpha \geqslant 1$.

Если же $\alpha > 1$, то любая частица догоняет и обгоняет границу ионного пучка. Из системы (14) тогда видно, что перед фронтом ионов постоянно накапливаются электроны. И в этом случае потенциал неограничен. Следовательно, $\alpha = 1$.

Таким образом, развитие течения имеет следующий вид. При $\psi \geqslant \psi^* = j_0/\omega$ движение частиц описывается формулами (15), а частицы, у которых $\psi^* > \psi \geqslant 0$, совершают около границы ионного пучка сложное движение с перемешиванием частиц и проследить за каждой из них не удается. При $t \to \infty$ область, занятая частицами $\psi^* > \psi \geqslant 0$, уйдет в бесконечность и всюду получим стационарное решение. В общем случае все рассуждения сохраняются и развитие течения имеет ту же картину.

Поступила 28 XI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Staff of the Ramo — Wooldrige Research Laboratory, «Electrostatic Propulsion». Proc. IRE, 1960, vol. 48, No. 4, p. 477—491.
2. Игнатенко В. П., Мясников А. С. Компенсация ионного пространственного заряда электронами. Радиотехника и электроника, 1961, № 12.
3. Baldwin G. C. Neutralization of Ion Beams for Propulsion by Electron Trap Formation. Progress in Astronautics and Rocketry, Electrostatic Propulsion, 1961, vol. 5.
4. Mirels H. On Ion Rocket Neutralization. Progress in Astronautics and Rocketry, Electrostatic Propulsion, 1961, vol. 5.
5. Seitz R. N., Shelton, R., Stuhlinger E. Present Status of the Beam Neutralization problem. Progress in Astronautics and Rocketry, Electrostatic Propulsion, 1961, vol. 5.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, 1960.