

в каждом сечении НК систем координат, параллельных друг другу и исходной системе в недеформированном кристалле и поворачивающихся вместе с поперечными сечениями при изгибе и закручивании НК. Соотношения (4.1), (4.5), а следовательно, и (4.11), рассматриваемые в локальной системе координат в окрестности данного поперечного сечения НК, остаются справедливыми и при сильном изгибе кристалла. Дислокационный изгиб НК в отличие от изгиба под действием внешнего момента [6] не сопровождается дополнительным закручиванием НК. Данное обстоятельство обусловлено тем, что вектор  $\mathbf{M}^{(a)}$  поворачивается вместе с поворотом поперечного сечения, тогда как момент  $\mathbf{M}$  сохраняет свою ориентацию в пространстве неизменной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Панин В. Е., Лихачев В. А., Гриняев Ю. В. Структурные уровни деформации твердых тел. — Новосибирск: Наука, 1985.
2. Eshelby J. D. Boundary problems // Dislocations in solids. — Amsterdam: North-Holland Publ., 1979. — V. 1.
3. Антипов С. А., Дрожжин А. И., Рощупкин А. М. Релаксационные явления в питевидных кристаллах полупроводников. — Воронеж: ВГУ, 1987.
4. Старовиков М. И., Дрожжин А. И., Антипов С. А., Белikov А. М. Исследование прямыми методами дислокационных структур в НК кремния на начальной стадии пластичности. — Воронеж, 1983. — Деп. в ВИНТИ 16.06.83, № 3318—83.
5. Косевич А. М. Дислокации в теории упругости. — Киев: Наук. думка, 1978.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1987.
7. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. — М.: ИЛ, 1963.
8. Амензаде Ю. А. Теория упругости. — Баку: Маариф, 1968.
9. Де Вит Р. Континуальная теория дисклинаций. — М.: Мир, 1977.
10. Де Гроот С. Р., Саттори Л. Г. Электродинамика. — М.: Наука, 1982.

г. Воронеж

Поступила 21/IV 1988 г.,  
в окончательном варианте — 10/X 1989 г.

УДК 532.529+539.4

В. А. Петушков

### ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ЖИДКОСТИ И ДЕФОРМИРУЕМОМ ТЕЛЕ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ УДАРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

Проблемы гидроударного нагружения деформируемых тел связаны прежде всего с изучением и защитой от эрозионного разрушения конструкций, взаимодействующих с жидкостью. Высокоскоростному ударному нагружению частицами жидкости подвергаются лопатки турбин, работающих на влажном паре, элементы авиационно-космической техники при полетах в дождевой зоне и приводнениях. Волновому ударному нагружению в объеме кавитирующей жидкости подвергаются погруженные в нее тела и др. Уровни локальных давлений на поверхности тел при таких взаимодействиях могут превышать тысячи атмосфер [1]. Есть и другой аспект этих проблем, заключающийся в необходимости усиления эффектов разрушения при гидродинамическом способе добычи полезных ископаемых и разрушении горных пород, разработке новых прогрессивных технологий раскрытия материалов.

Для защиты конструкций от разрушения, выбора материалов и покрытий необходимо подробный анализ процессов их деформирования и разрушения при различных скоростях взаимодействия с жидкостью. Поскольку это взаимодействие принимает капельный или струйный (в виде кумулятивных струй) характер и весьма локализовано с продолжительностью, измеряемой микросекундами, возможности экспериментальных методов исследования крайне ограничены. Известные результаты, полученные в этом направлении, носят, скорее, качественный характер. Количественной оценкой указанных процессов служит лишь скорость потери массы материалов при таких взаимодействиях [1, 2]. Еще более ограничены возможности теоретических подходов. В математическом моделировании процессов высокоскоростного ударного взаимодействия тел с жидкостью необходимо учитывать сжимаемость сред, распространение в них ударных волн (УВ), нелинейное, зависящее от скорости нагружения поведение материалов, сопротивление их пластическим сдвигам. Наличие свободной

поверхности жидкости, изменяющейся в процессе взаимодействия, усложняет задачу [2, 3].

Численному исследованию особенностей нелинейного деформирования и разрушения тел при таких взаимодействиях с жидкостью посвящено небольшое число работ [2, 4—6 и др.]. Все они основаны на упрощающих предположениях относительно поведения сред, что не позволило, как отмечено в [7], выявить особенности течений в жидкости, которые определяют нагружение, процессы деформирования и разрушения тел. Наиболее обстоятельные из числа известных исследования динамики капельной жидкости выполнены в [7], однако они ограничиваются лишь моделированием течений в жидкости при соударении с недеформируемой поверхностью.

В данной работе, являющейся развитием [8, 9], численно изучались волновые процессы в капельной жидкости и деформируемом теле при их высокоскоростном соударении. Результаты получены с учетом перечисленных выше особенностей в поведении сред на основе метода конечных разностей и схемы сквозного счета типа предиктор — корректор Лакса — Вендроффа. Для устранения сцилляций в решении на границе контактного разрыва и фронтах УВ в жидкости используется метод коррекции потока Борнса — Бука [10].

**1. Математическая модель. Основные уравнения.** Жидкость, взаимодействующую с высокой скоростью с поверхностью деформируемого тела, будем рассматривать в виде частичек сферической формы. Тонкие струи, образовавшиеся из-за схлопывания кавитационных пузырьков в жидкости вблизи поверхности тела, действия сопел большого давления, также могут быть исследованы в рамках предлагаемого подхода. Воздействие со стороны жидкости принимаем направленным по нормали к поверхности тела и, пренебрегая влиянием поверхностных сил натяжения и объемных сил в жидкости, запишем уравнения нестационарного движения сжимаемой жидкости в двумерном — осесимметричном приближении

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \rho_{,t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, \quad (\rho \mathbf{v})_{,t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}) = 0, \\ e_{,t} + \operatorname{div} (e + \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{v} &= 0, \quad (x^\alpha, t) \in D_1 \times D_t, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  — вектор скорости;  $x^1$  и  $x^2$  — пространственные координаты ( $x^2$  — ось симметрии);  $\rho$  — плотность;  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$ ,  $p$  — давление;  $\mathbf{I}$  — единичный тензор;  $e$  — полная энергия на единицу объема жидкости ( $e = \rho e + (1/2)\rho(v_1^2 + v_2^2)$ ).

Система уравнений (1.1), записанная в консервативной форме, замыкается уравнением состояния

$$(1.2) \quad p = A(\rho/\rho_0 - 1) + B(\rho/\rho_0 - 1)^2 - C\rho e,$$

где  $A, B, C$  — коэффициенты, подбираемые из условий наилучшего приближения ударной адиабаты. Для воды примем их такими же, как в [7]. Поскольку в жидкости наряду с областями высокого давления могут возникать кавитационные полости под действием отрицательных давлений, приведенное уравнение состояния дополним следующим:

$$(1.3) \quad p = A(\rho/\rho_0 - 1) \text{ при } p > -p_*, \quad p = p_* \text{ при } p < p_*.$$

( $p_*$  — максимальное отрицательное давление, которое выдерживает жидкость без потери сплошности. Значение его для воды не превышает 28 МПа [7]).

В начальный момент времени плотность, скорость, давление и энергия жидкости определяются соотношениями

$$(1.4) \quad \rho = \rho_0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = u_0, \quad p = p_0, \quad e = e_0.$$

На поверхности контактного разрыва с деформируемым телом, все величины для которого будем отмечать индексом 2, вводится условие непрерывности давления и нормальной составляющей скорости  $\mathbf{v}$ :

$$(1.5) \quad \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{n} = \mathbf{v}^{(2)} \mathbf{n}, \quad p_n^{(1)} = p_n^{(2)}.$$

Деформируемое тело в силу локального характера взаимодействия с жидкостью, диаметр  $2R$  капли или струй которой обычно не превышает нескольких миллиметров, рассматривается в виде полупространства в предположении осевой симметрии и нормального столкновения с жид-

костью как наиболее повреждающего материал. Границы расчетной области, занимаемой деформируемой средой, выбираются на таком расстоянии от зоны соударения с жидкостью, чтобы возникающие вблизи них возмущения не передавались внутрь области. Для описания движения сжимаемой деформируемой среды используем те же уравнения (1.1), однако с учетом напряжений сдвига, понимая под тензором напряжений  $\sigma$  выражение

$$(1.6) \quad \sigma_{jk} = -p\delta_{jk} + S_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

( $S_{jk}$  — девиатор напряжений). Производные по времени от компонент девиатора напряжений в цилиндрической системе координат имеют вид

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \partial S_{11}/\partial t &= 2\mu(\partial v_1/\partial x^1 + (1/3)\rho\partial\rho/\partial t), \\ \partial S_{22}/\partial t &= 2\mu(\partial v_2/\partial x^2 + (1/3)\rho\partial\rho/\partial t), \\ \partial S_{00}/\partial t &= 2\mu(v_1/x^1 + (1/3)\rho\partial\rho/\partial t), \\ \partial S_{12}/\partial t &= \mu(\partial v_1/\partial x^2 + \partial v_2/\partial x^1) \end{aligned}$$

и принимаются в смысле Яумана — Нолла [11]

$$(1.8) \quad S_{jk}^{\dot{v}} = \dot{S}_{jk} - S_{jr}\Omega_{rh} - S_{hr}\Omega_{rj},$$

где  $\dot{S}_{jk}$  — полная производная напряжений Коши по времени; тензор вихря скорости  $\Omega_{jk} = (1/2)(v_{j,k} - v_{k,j})$ ;  $v_{j,k} = \partial v_j/\partial x_k$ ,  $x_k \in D_2$ .

В качестве уравнения состояния для шаровой составляющей тензора напряжений (1.6) — гидростатического давления  $p$  — обычно используются соотношения теории Ми — Грюнайзена

$$(1.9) \quad \begin{aligned} p(v, e) &= p_-(v) + p_+(v, e) \\ (e &= e_+ + e_-, p_+ = \Gamma e_+/v, p_- = -de_-/dv). \end{aligned}$$

Здесь  $\Gamma$  — коэффициент Грюнайзена;  $p_-$  и  $e_-$  — составляющие давления и энергии холодного сжатия тела, а  $p_+$  и  $e_+$  — соответственно с учетом нагревания тела;  $v = V/\rho$  — удельный объем.

Соотношения (1.9) устанавливаются из опытов на ударное сжатие [12], из которых для большинства металлов следует почти линейная зависимость  $\Gamma$  от  $v$ , т. е.  $\Gamma(v) = \Gamma_0 v/v_0$ . Ниже ограничимся так называемым квазиакустическим приближением, когда давление — только функция объема, а ударная адиабата совпадает с изотропой расширения. Такое приближение имеет опытное обоснование для достаточно широкого диапазона изменения давлений на фронтах УВ порядка  $10 \div 15$  ГПа [12, 13]. В этом диапазоне необратимость процессов деформирования в основном обусловлена пластическими деформациями сдвига.

Для связи между девиаторными составляющими напряжений  $S_{jk}$  и деформаций  $e_{jk}$  ( $e_{jk} = \varepsilon_{jk} - (1/3)\varepsilon_{ii}\delta_{jk}$ ) используем соотношения теории микропластических деформаций в форме [13, 14], обобщенной на учет влияния скорости деформирования, как в [15]. В соответствии с этой теорией каждый элементарный объем тела полагается состоящим из  $n$  идеальных упругопластических подэлементов с различными пределами текучести, зависящими от скорости нагружения:

$$(1.10) \quad \sigma_{iD}^{(k)} = \sigma_0^{(k)} (1 + |C\varepsilon_i|^p), \quad k \in (1, n),$$

где  $\sigma_0^{(k)}$  — статический предел текучести  $k$ -го подэлемента;  $C$  и  $p$  — коэффициенты, определяемые по кривым однократного деформирования, построенным для различных скоростей нагружения и, если необходимо, температур. У всех подэлементов одинаковые модули упругости  $E$  и полные скорости деформации  $\dot{\varepsilon}_{jk} = (1/2)(v_{j,k} + v_{k,j})$ , поэтому для каждого  $k$   $S_{jk}^{\dot{v}} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{jk}$  и  $(S_{jk}^{\dot{v}})^2 \leq ((2/3)\sigma_{iD}^{(k)})^2$ . Полный девиатор напряжений в точ-

ке — элементарном объеме — распределяется с соответствующими весовыми коэффициентами  $\Psi(k)$  между всеми  $n$  подэлементами, т. е.

$$(4.11) \quad S_{jk} = \sum_{(k)=1}^n \Psi_{(k)} S_{jk}^{(k)}.$$

Аналогичным образом может быть представлен и полный девиатор скоростей пластической деформации. Весовые коэффициенты определяются на основе полинейной аппроксимации указанных выше кривых деформирования:  $\Psi(k) = (1/E_1) (E_k - E_{k-1})$ , где  $E_k = (\sigma_i^k - \sigma_i^{k-1}) / (\epsilon_i^k - \epsilon_i^{k-1})$ , причем  $\sum_{k=1}^n \Psi_k = 1$ . Такое описание нелинейного поведения материалов позволяет учитывать анизотропию пластических свойств и гистерезисные потери на пластических деформациях, хотя и добавляет к числу обычных еще  $2n$  параметров  $\Psi_k, \sigma_i^k$ . Оптимальное число параметров не превышает, как показывают выполненные исследования для различных конструкционных металлов,  $16 \div 8$  подэлементов (обычно достаточно четырех) и может быть установлено на основе гистограммы распределения пределов текучести материала [16].

На границе расчетной области  $S_1 \subset D_2 = \{(x^1, x^2): 0 \leq x^1 \leq 3R; x^2 = 0\}$  (свободная поверхность или поверхность контактного разрыва) деформируемого тела задаются условия (1.5). На остальных границах условия следующие:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} v_1 = \partial v_2 / \partial x^1 = 0, \quad (x^1, x^2) \in S_2 = \{x^1 = 0, 0 \leq x^2 \leq 3R\}; \\ \partial v_1 / \partial x^1 = \partial v_2 / \partial x^2 = 0, \quad (x^1, x^2) \in S_3 = \{0 \leq x^1 \leq 3R, x^2 = 3R\}; \\ \partial v_1 / \partial x^1 = \partial v_2 / \partial x^1 = 0, \quad (x^1, x^2) \in S_4 = \{x^1 = 3R, 0 \leq x^2 \leq 3R\}. \end{aligned}$$

Приведенные соотношения для деформируемого тела необходимо дополнить начальными условиями. Начальное состояние деформируемой среды может быть как свободным от напряжений, так и включать в себя «начальные» напряжения от основной эксплуатационной нагрузки, предшествующих воздействий со стороны жидкости или быть технологического происхождения. Как и для жидкости, примем начальные условия в виде

$$(4.13) \quad \rho(x^\alpha, 0) = \rho_0, \quad v_\alpha(x^\beta, 0) = S_{jk}(x^\beta, 0) = p(x^\beta, 0) = 0 \\ (\alpha, \beta = 1, 2).$$

**2. Численные методы решения и их обоснование.** Для решения краевых задач для жидкости и деформируемого тела используем метод конечных разностей. Введем два типа разностных сеток, аппроксимирующих  $D_1, D_2$  и  $D_t$  — пространственную сетку с постоянными шагами  $h_1$  и  $h_2$ :  $D_h \subset \{(x_j^1, x_k^2): x_j^1 = x_0^1 + jh_1, x_k^2 = x_0^2 + kh_2\}$  и сетку на временном слое с шагом  $h_t$ :  $D_t = \{t^n: t^n = nh_t, n \in Z, 0 \leq nh_t \leq \tau\}$ . Построим, кроме того, дополнительные сетки  $D_h(0, 1/2)$  и  $D_t^{(1/2)}$ , взяв в качестве их узлов середины сторон исходных сеток. Сетка по времени  $D_t^{(1/2)} = \{t^{n+1/2}: t^{n+1/2} = (n + 1/2)h_t, t^{n+1/2} < \tau\}$ . Обозначим через  $\mathcal{F}(D)$  пространство действительных сеточных функций, заданных на  $D_h$  и соответствующих сформулированным краевым задачам (1.1)—(1.5) для жидкости и (1.5)—(1.13) для деформируемого твердого тела. Эти задачи можно представить в обобщенной дивергентной форме

$$(2.1) \quad \mathbf{W}_{,t} + \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{S}(\mathbf{W}),$$

где  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{W})$  и  $\mathbf{S}(\mathbf{W})$  — векторы, причем  $\mathbf{W} = \bar{\mathbf{W}}(x^\alpha, t)$ ,  $\mathbf{F} = \{F_1, F_2\}$  и для жидкости  $\mathbf{S} = 0$ . Все переменные, входящие в эти векторы, полагаются в дальнейшем безразмерными. В качестве характерных величин принимаются скорость соударения  $u_0$ , размер падающего потока (капли) жидкости  $R$ , характеристики сред  $\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, c^{(1)}, c^{(2)}$ . Консервативная форма системы уравнений (2.1) позволяет получить решение на основе

консервативных конечно-разностных схем аппроксимации на введенном выше сеточном представлении, автоматически удовлетворяющее соотношениям Рэнкина — Гюгонио на фронтах УВ.

Ниже в качестве такой схемы используется двухшаговая схема типа предиктор — корректор Лакса — Вендроффа [3], включающая в себя явную, полученную разложением в ряд Тейлора до величин второго порядка схему по времени и центрально-разностную схему по пространству. В этой схеме операторы  $\partial/\partial x^1$  и  $\partial/\partial x^2$  представляются как  $\partial/\partial x^\alpha \rightarrow \Delta/\Delta x^\alpha$ ,  $\mathcal{F}(D_h) \rightarrow \mathcal{F}(D_h^{(1/2)}, 0)$ ,  $\frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta x}(x_{j+1/2}^1) = (\mathcal{F}(x_{j+1}^1) - \mathcal{F}(x_j^1))/h_1$  и т. д. Кроме того, для операторов умножения  $x^1 \cdot$  и  $1/x^1 \cdot$  справедливы соотношения  $(1/x^1) \cdot \mathcal{F}(D) \rightarrow \mathcal{F}(D)$ ,  $(x^1 \cdot \mathcal{F})(x_j^1, x_k^2) = x_j^1 \mathcal{F}(x_j^1, x_k^2)$ , аналогично для  $(1/x^1 \cdot)$ . Существенное значение при построении таких схем приобретают идеи метода опорных операторов Самарского [17] для воспроизведения на дискретном уровне основных теорем векторного анализа.

Поскольку схема Лакса — Вендроффа, как и любая другая схема второго порядка точности, ведет к нефизичным искажениям решения на фронтах УВ, границах контактного разрыва, не устранимым, особенно в последнем случае, с применением схемной и искусственной вязкости, ниже используется с этой целью алгоритм Бориса — Бука [10, 18, 19]. На первой его стадии — стадии переноса — применяется метод Лакса — Вендроффа с оператором  $L$  [3]

$$(2.2) \quad W_{j,k}^{n+1} = W_{j,k}^n + L \cdot W^n$$

( $j, k$  обозначают номер узла разностной сетки на  $D_h$ ,  $n$  — момент времени на сетке  $D_t$ ). Вторая стадия диффузионная с оператором  $D$

$$(2.3) \quad \tilde{W}_{j,k}^{n+1} = W_{j,k}^{n+1} + D \cdot W^n$$

для значений  $W_{j,k}^n$  и  $W_{j,k}^{n+1}$ , отвечающих данному шагу по времени. Эта стадия представляет собой линейное второго порядка демпфирование, оператор которого  $(DW)_{j,k} = +[\Phi_{j+1/2,k}(W) - \Phi_{j-1/2,k}(W)]$ , где поток  $\Phi_{j+1/2,k} = (\omega/4)(W_{j+1,k} - W_{j,k})$  и  $\omega$  — положительная константа,  $\omega \sim \sim O(1)$ . При этом существенно снижаются осцилляции на скачках уплотнения и в областях с большими градиентами решения для  $\omega \geq 1/2$ , однако уменьшается и устойчивость схемы до  $|\sigma| \leq (1 - \omega/2)^{1/2}$ ; для  $\omega = 1/2$   $\sigma \leq 0,866$ .

Для устранения влияния диффузионной стадии на стадию переноса вводится далее антидиффузионный оператор  $C(W)$  с положительным коэффициентом ограничения  $q$  и оператором ограничения  $A(W)$ :

$$(2.4) \quad (C(\tilde{W}) \cdot W)_{j,k} = -\{[A(\tilde{W}) \Phi(W)]_{j+1/2,k} - [A(\tilde{W}) \Phi(W)]_{j-1/2,k}\},$$

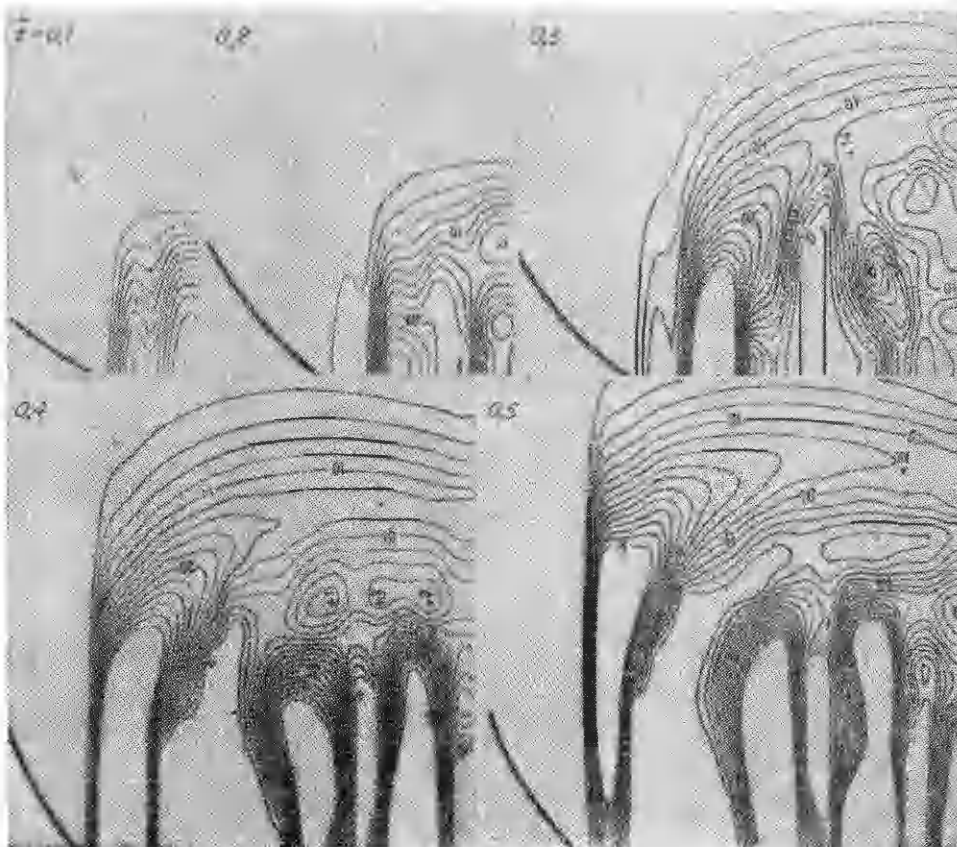
где  $[A(\tilde{W}) \Phi(W)]_{j+1/2,k} = q \Phi_{j+1/2,k} \min \{ |(\tilde{W}_{j+2,k} - \tilde{W}_{j+1,k})|_+, (1/q) \times \times |(\tilde{W}_{j,k} - \tilde{W}_{j-1,k})/\Phi_{j+1/2,k}|_+ \}$ , а обозначение  $[a]_+$  имеет смысл  $[a]_+ = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ 0. \end{cases}$

Окончательная форма коррекции потока

$$(2.5) \quad W_{j,k}^{n+1} = \tilde{W}_{j,k}^{n+1} + C(\tilde{W}_{j,k}^{n+1}) \cdot W_{j,k}^n.$$

Из решения модельных задач, приведенных в [18—21 и др.], оптимальное по точности и устойчивости значение  $q$  принималось равным 0,65 с критерием устойчивости  $|\sigma| \leq 1$ . Так, в одномерной задаче о контактном и ударных разрывах в ударной трубе [18] применение метода коррекции потока (2.2)—(2.5) с этим значением уменьшает толщину ударного разрыва с 4—6 ячеек расчетной сетки метода Лакса — Вендроффа до 1—2, а контактного разрыва — с 6—8 до 4—5 ячеек с отклонением решения от точного менее 1 %.

Аналогичные исследования расчетных схем проводились и для деформируемых сред. В известной задаче Лэмба о падении плоской волны



Р и с. 1

на деформируемое полупространство, в задачах об ударе деформируемых тел, летящих с различными скоростями, о жесткую преграду [22, 23], которые решались в двумерной осесимметричной постановке для тех же параметров, отклонение решений на фронтах УВ не превышает 3 % при хорошем совпадении выявляемых во времени особенностей волновых процессов деформирования. Применение структурной модели (1.10), (1.11) для описания пластически деформируемых сред позволяет в этих случаях получить лучшее совпадение с наблюдаемыми в эксперименте результатами, особенно при высоких скоростях соударения, за счет более полного учета упрочнения материала и его диссипативных свойств. Точность расчетов во всех случаях контролировалась выполнением с заданной относительной погрешностью баланса энергии по всему объему деформируемой среды.

Для задач со свободной поверхностью положение этой поверхности во времени является дополнительной переменной, определяемой из решения. На эйлеровой сетке новые положения границы могут быть установлены в соответствии с  $J^{n+1} = J^n + v_{1,j,k}^{(1)} \Delta t$ ,  $K^{n+1} = K^n + v_{2,j,k}^{(1)} \Delta t$ , подобно тому, как это делается в методе MAC [3]. Во избежание неустойчивости свободной границы ниже используется принудительное ее сглаживание квадратичной зависимостью от радиуса. В процессе вычислений вначале определяются внутренние гидродинамические величины, а затем — изменение границ.

Решение задачи взаимодействия осуществляется последовательно: для жидкости, потом «запаздываем» по времени для деформируемого твердого тела. Такой подход обладает определенными преимуществами [24]. Эффект взаимодействия характеризуется условиями (1.5).

**3. Ударное взаимодействие тела с капельной жидкостью.** На основе приведенных выше численных схем выполнены расчеты гидродинамических течений в сферической капле жидкости, процессов деформирования и разрушения поверхности тела при их соударении на скорости  $M = u_0/c^{(1)} = 0,3$ . Капля диаметром  $2R = 2$  мм, плотность которой  $\rho^{(1)}$  и скорость звука  $c^{(1)}$  соответственно равны  $10^3$  кг/м<sup>3</sup> и 1300 м/с, сталкивается с телом-полупространством из алюминиевого сплава со следующими свойствами: модуль сдвига  $\mu = 26,2$  ГПа; статический предел текучести  $\sigma_0 = 0,36$  ГПа с параметрами  $C$  и  $\rho$  в зависимости (1.10), равными 0,0238 с и 0,112; плотность  $\rho^{(2)} = 2700$  кг/м<sup>3</sup>; скорость звука  $c^{(2)} = 6430$  м/с; коэффициент Ламе  $\lambda = 50,8$  ГПа.

Как следует из рис. 1, в капле происходят сложные гидродинамические течения, когда наряду с зонами повышенного давления образуются кавитационные полости. На рис. 1 приведены изобары в долях  $\rho^{(1)}c_{(1)}^2$ , причем  $0,1\rho^{(1)}c_{(1)}^2 = 10$ , для последовательных моментов времени  $\tilde{t} = tc^{(1)}/R$  от 0,1 до 0,5. Последний момент времени отвечает выходу УВ на свободную поверхность капли и началу ее интенсивного разлета в горизонтальном направлении. Величина скорости разлета находится в хорошем соответствии с экспериментально замеренной и приведенной в [7]. Величины пиковых давлений на поверхности деформируемого тела несколько ниже (до 7 %) полученных в [9] для жесткой поверхности.

Изменения поверхности деформируемого тела в зоне контакта с каплей для различных моментов времени показаны на рис. 2. Окончательная форма поверхности отмечена цифрой 8 и отвечает моменту времени  $\tilde{t} = tC/R = 3,0$  от начала нагружения ( $C = ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}$  — скорость продольных волн в деформируемом теле). Наличие таких бугорков вокруг эрозионных канавок отчетливо видно на образцах, подвергаемых капельному нагружению (рис. 3 справа). При многократных воздействиях в реальных условиях вытесненный на поверхность металл уносится частицами жидкости (слева показана поврежденная поверхность элемента конструкции, взаимодействующей с капельной средой).

Характер возникающих при этом напряженных состояний незначительно отличается от полученного в предположении упругого поведения материала [9] — несколько меньшими уровнями компонент напряжений и наличием так называемого упругого предвестника, скорость распространения которого выше скорости распространения фронта пластических волн в деформируемом теле. Формирование зон пластических деформаций, отвечающих вышеуказанным моментам времени ударного взаимодействия, представлено на рис. 4. Сплошными и штрихпунктирными линиями обозначены уровни одинаковых интенсивностей напряжений, значения которых равны динамическому пределу текучести и его половине для тех же моментов времени соответственно. Выявленная кинетика зон пластических деформаций характеризует собой области наибольшего повреждения и интенсивность накопления повреждений в теле. Процессы деформирования и разрушения материала в теле протекают одновременно и оказывают влияние друг на друга [25], однако учет этого эффекта в рамках единой математической модели пока не представляется возможным из-за слишком большой разницы в масштабе структуры тел, на которых протекают эти процессы, скажем, от  $10^{-6}$ — $10^{-4}$  до  $10^2$  м и более для реальных конструкций. Очевидно, что используемые для этой цели модели пористого тела [26, 27] слишком грубы. Применительно к рассматриваемой проблеме положение осложняется еще в большей мере, поскольку процессы деформирования и эрозионного разрушения носят повторяющийся циклический характер и, как правило, сопровождаются коррозией материала. Кривые эрозионного разрушения, построенные для различных скоростей и размеров капель жидкости как функции удельной массы, теряемой образцом рис. 3, от времени или числа столкновений, включают в себя обычно и инкубационный период, и фазы ускорения и замедления, и конечную стадию постоянной скорости эрозии. Стадии характеризуются

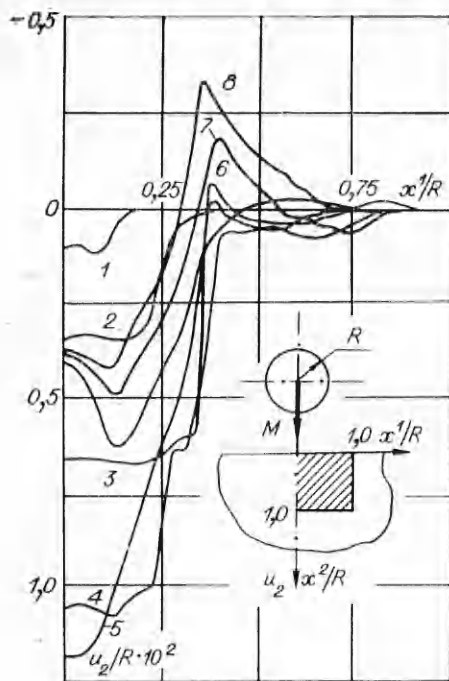


Рис. 2

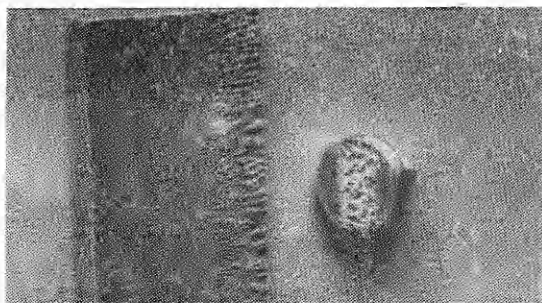


Рис. 3

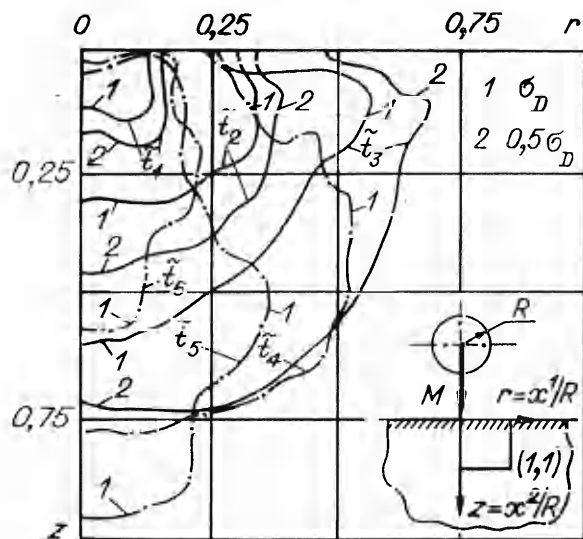
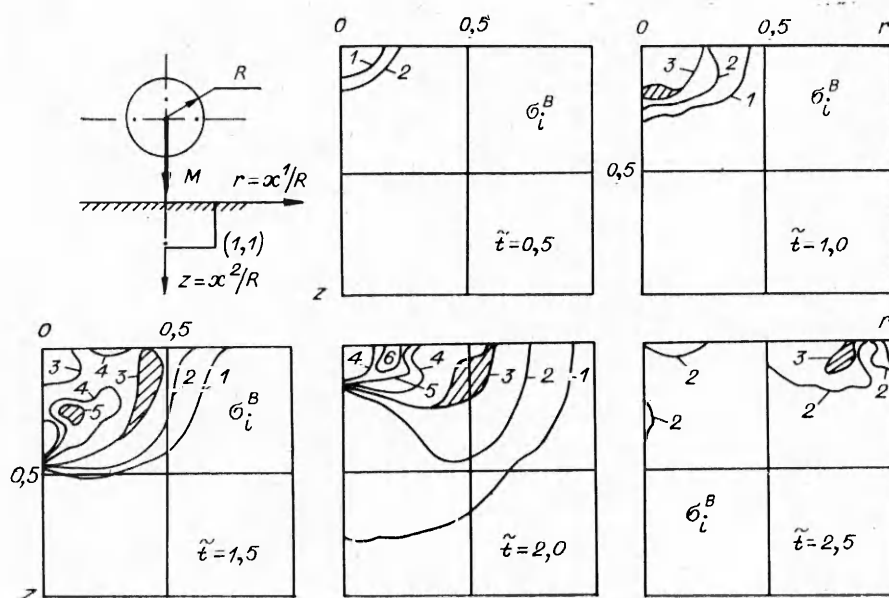


Рис. 4





Р и с. 5

различными механизмами разрушения, причем началу уноса массы предшествует образование кратеров [28].

Для учета статистической природы повторяющегося ударного нагружения и разрушения материалов обычно вводятся предположения о распределении капель жидкости в единице объема среды и статистические модели усталостного разрушения. Более правдоподобные результаты, позволяющие описать особенности кривой эрозионного разрушения, удается получить на основе статистической модели уноса материала [29, 30]. Возможность образования трещин или зон разрушения уже на первой, инкубационной, стадии при этом не учитывалась.

Ниже в качестве критерия разрушения принято превышение интенсивности напряжений в точке, взятых со знаком максимальных растягивающих напряжений, временного напряжения  $\sigma_i^B$  в зависимости от скорости нагружения. На рис. 5 построены линии равного повреждения в долях от  $\sigma_i^B$ . Линия 3 — интенсивность напряжений, равная разрушающему  $\sigma_i^B$  для рассматриваемого момента времени нагружения от начала столкновения капли с деформируемым телом. Заштрихованным областям соответствуют зоны возможного разрушения.

Таким образом, на основе разработанных методов математического моделирования удалось выявить основные закономерности гидродинамических течений в капле и процессов деформирования в теле при их ударном взаимодействии. Образование и «схлопывание» зон кавитации в жидкости приводит к усилению процессов разрушения в теле. Процессы деформирования, протекающие в теле, оказываются существенно нелинейными и зависящими от скорости нагружения. Характер этих процессов в большей мере определяется качеством описания гистерезисных циклических свойств материала, жесткости свойств упрочнения. Обобщение указанных подходов на решение других важных в практическом отношении задач взаимодействия представляется очевидным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Erosion: Prevention and useful applications/Ed. W. F. Adler.— 1979.— ASTM, STP 664.
2. Brunton J. H., Rochester M. C. Erosion of solid surfaces by the impact of liquid drops // Erosion, treatise on materials science and technology.— N. Y.: Acad. Press, 1979. (Эрозия: Пер. с англ./Под ред. К. Прис.— М.: Мир, 1982).

3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980.
4. Джексон Г. Расчет соударения жидкости с твердым телом при помощи треугольных элементов // Теорет. основы инж. расчетов. — 1979. — Т. 101, № 2.
5. Jonson G. R. Analysis of elasto plastic impact involving severe distortion // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. — 1976. — V. 98, N 3.
6. Динамика удара // Пер. с англ./Под ред. С. С. Григоряна. — М.: Мир, 1985.
7. Гонор А. Л., Яковлев В. А. Динамика удара капли по твердой поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1978. — № 1.
8. Петушков В. А. Численные исследования процессов гидродинамического взаимодействия и эрозионного разрушения тел капельной жидкостью // Материалы VI Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. — Ташкент: Фан, 1986.
9. Петушков В. А., Зайцев М. А. Реакция упругого тела на высокоскоростное ударное нагружение капельной средой // Машиноведение. — 1989. — № 1.
10. Book D. L., Boris J. P., Hain K. Flux-corrected transport. Pt 2: Generalization of the method // J. Comput. Phys. — 1975. — V. 18, N 2.
11. Fung Y. C. Foundations of solid mechanics. — N. Jersey: Prent. — Hall, 1965.
12. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматгиз, 1966.
13. Герман В., Лоуренс Р. Влияние выбора модели материала на результаты расчета распространения волн напряжения // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Д. Теор. основы инж. расчетов. — 1978. — Т. 100, № 1.
14. Петушков В. А., Кащенко С. Ф. Структурное моделирование нелинейных процессов деформирования конструкций с трещинами при циклических воздействиях // Машиноведение. — 1988. — № 1.
15. Perrone N. Impulsively loaded strain hardened rate-sensitive rings and tubes // Intern. J. Solid and Structures. — 1970. — V. 6, N 8.
16. Романов А. П. Разрушение при малоцикловом нагружении. — М.: Наука, 1988.
17. Самарский А. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков Н. Ю. Исследование метода опорных операторов для построения разностных аналогов операций тензорного анализа // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 7.
18. Sod G. S. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. — 1978. — V. 27, N 1.
19. Niessner П., Bulaty Т. A family of flux-correction methods to avoid overshoot occurring with solutions of unsteady flow problems // IV GAMM Conf. Numerical Methods in Fluid Mechanics, Toronto, Canada, 1981: Proc.
20. Donea J., Selmin V., Quartapelle L. Finite elements schemes for unviscid compressible flows // VIII Intern. conf. on SMIRT, Brussel, Belgique, 1985: Trans. — S. 1., 1985. — V. B. — P. 13/3.
21. Nahavandi A. N., Pedrido R. R., Cloud R. L. Dynamic analysis of structures with solid — fluid interaction // IV Intern. conf. on SMIRT, Calif., USA, 1977: Trans. — S. 1., 1977. — V. B. — P. 1/6.
22. Кукуджанов В. Н. Численное решение неоднмерных задач распространения волн напряжений в твердом теле // Сообщ. по прикл. математике ВЦ АН СССР. — 1976. — Вып. 6.
23. Богомолов А. Н., Горельский В. А., Зелевин С. А., Хорев И. Е. Поведение тел вращения при динамическом контакте с жесткой стенкой // ПМТФ. — 1986. — № 1.
24. Park K. C., Felippa C. A. Recent developments in coupled field analysis methods // Numerical methods in coupled systems. — N. Y.: Wiley, 1984.
25. Никифоровский В. С., Шемякин Е. И. Динамическое разрушение твердых тел. — Новосибирск: Наука, 1979.
26. Chaboche J. L. Continuous damage mechanics- a tool to describe phenomena before crack initiation // Nucl. Engng Design. — 1981. — V. 64, N 2.
27. Романычева Л. К., Рузанов А. И. Численное исследование откольных разрушений в меди // ПМТФ. — 1982. — № 4.
28. Vyas B., Preece C. M. Cavitation-induced deformation of aluminium // Erosion, Wear and Interfaces with Corrosion. — Philadelphia, 1974. — (ASTM STP 664).
29. Noskovic J. The extended mathematical model of cavitation and erosion by liquid and solid impact // VI Intern. conf. on erosion by liquid and solid impact, Cambridge, England, 1983: Proc.
30. Bargmann H. W. On the time-dependence of the erosion rate — a probabilistic approach to erosion // Theor. and Appl. Fract. Mech., 1986. — V. 6, N 3.

г. Москва

Поступила 6/III 1989 г.,  
в окончательном варианте — 9/VI 1989 г.