

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962.
2. Гродзовский Г. Л., Никольский А. А., Свищев Г. П., Таганов Г. И. Сверхзвуковые течения газа в перфорированных границах. М.: Машиностроение, 1967.
3. Lawaczeck O. K. Calculation of the flow properties up and downstream of and within a supersonic turbine cascade. Pap. ASME, 1972, N GT-47. Рус. пер. Расчет сверхзвукового течения через турбинную решетку.— Экспресс-информация. ВИНТИ. Сер. Поршневые и газотурбинные двигатели, 1973, № 3.
4. Lichtfuss H. J., Starken H. Supersonic cascade flow.— In: Progress Aerospace Sci. Vol. 15. Oxford e. a.: Pergamon Press, 1974.
5. Богод А. Б., Крайко А. Н., Черняк Е. Я. Исследование обтекания плоской решетки сверхзвуковым потоком идеального газа при дозвуковой «нормальной» компоненте на режимах с присоединенными скачками.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 4.
6. York R. E., Woodard H. S. Supersonic compressor cascades-an analysis of the entrance region flow field containing detached shock waves.— Trans. ASME. Ser. A. J. Eng. Power, 1976, vol. 98, N 2.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.
8. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
9. Simons G. A. Decay of a diamond shock pattern.— AIAA J., 1972, vol. 10, N 8.
10. Fink M. R. Shock wave behavior in transonic compressor noise generation. Pap. ASME, 1971, N GT-7.
11. Крайко А. Н., Осипов А. А. Затухание периодической последовательности слабых ударных волн в каналах со «звукопоглощающими» стенками.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 4.
12. Крайко А. Н., Ни А. Л. О приближении нелинейной акустики в задачах о колебаниях газа в трубах.— ПММ, 1980, т. 44, вып. 1.
13. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В. Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. I.— ЖВММФ, 1972, т. 12, № 2.
14. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Мир, 1976.
15. Крайко А. Н., Ткаленко Р. А. К построению линейной теории неравновесных и равновесных течений.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 6.
16. Oswatitsch K. Grundlagen der Gasdynamik. Wien — New York: Springer-Verlag, 1976.
17. Крайко А. Н., Тагиров Р. К. К околозвуковому обтеканию тел вращения с протоком при наличии истекающей из протока струи.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 6.
18. Messiter A. F., Adamson T. C. Jr. Transonic small-disturbance theory for lightly loaded cascades.— AIAA J., 1981, vol. 19, N 8.

Поступила 19/IX 1983 г.

УДК 532.517.6

СМЕНА РЕЖИМА В ПЛОСКОЙ СТРУЕ СО СТУПЕНЧАТЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ

Е. П. Курочкина
(Новосибирск)

В экспериментальных исследованиях на начальном участке струй наблюдаются течения с почти ступенчатым профилем скорости.

В данной работе теоретически анализируются устойчивость и характер ветвления вторичных режимов в плоской затопленной струе со ступенчатым профилем скорости. Кусочно-постоянный вид профиля позволяет большую часть выкладок выполнить аналитически. Установлен мягкий режим возбуждения, и рассчитана структура вторичного режима.

Методика расчета ветвления исходного ламинарного режима изложена в [1, 2]. Здесь используется плоскопараллельное приближение. В этом случае задача об устойчивости течения вязкой несжимаемой жидкости сводится к уравнению Орра — Зоммерфельда

$$(1) \quad L_{\alpha}\varphi = \varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi - i\alpha\text{Re}[(U - C)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi] = 0,$$

где $\varphi(y)$ — комплексная амплитуда функции тока; $U(y)$ — профиль скорости потока; $C = X + iY$ — искомое комплексное собственное значение

ние; X — фазовая скорость; Y — декремент затухания; α — волновое число; Re — число Рейнольдса.

При определенных значениях α и Re находится параметр C , при котором уравнение (1) с соответствующими краевыми условиями имеет нетривиальное решение $\varphi \neq 0$. Так как уравнение (1) содержит коэффициенты U , U'' , вообще говоря, зависящие от y (поперечная координата), то решение (1), как правило, находится численно.

Рассмотрим течение плоской струи со ступенчатым профилем скорости

$$(2) \quad U(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1, \\ 0, & 1 \leq y < +\infty \end{cases}$$

(в силу симметрии достаточно ограничиться областью $y \geq 0$). Такие потоки обычно формируются на срезе сопла. Область исследования по y разбивается на две подобласти, в каждой из которых уравнение (1) имеет постоянные коэффициенты. В каждой области решение можно записать в виде суммы экспонент:

$$(3) \quad \varphi_+(y) = c_1 \operatorname{ch} \alpha y + c_2 \operatorname{ch} \kappa y, \quad 0 \leq y < 1;$$

$$(4) \quad \varphi_-(y) = c_3 e^{-\alpha y} + c_4 e^{-\gamma y}, \quad 1 \leq y < +\infty.$$

Представления (3), (4) отвечают симметричным в нуле и затухающим на бесконечности возмущениям. Здесь c_i ($i = 1, 4$) — искомые комплексные константы; $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - i\alpha \operatorname{Re} C}$; $\kappa = \sqrt{\alpha^2 + i\alpha \operatorname{Re}(1 - C)}$.

Анализ уравнений (1), (2) приводит к следующим условиям для решений (3), (4) на тангенциальном разрыве скорости при $y = 1$:

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi_+ - \varphi_- &= 0, & \varphi'_+ - \varphi'_- &= 0, \\ \varphi''_+ - \varphi''_- &= -i\alpha \operatorname{Re} \varphi_+, & \varphi'''_+ - \varphi'''_- &= i\alpha \operatorname{Re} \varphi'_+. \end{aligned}$$

Откуда получаем систему уравнений для c_i :

$$(6) \quad Fc = 0,$$

где

$$F = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \alpha & \operatorname{ch} \kappa & -e^{-\alpha} & -e^{-\gamma} \\ \alpha \operatorname{sh} \alpha & \kappa \operatorname{sh} \kappa & \alpha e^{-\alpha} & \gamma e^{-\gamma} \\ \alpha(\alpha + i \operatorname{Re}) \operatorname{ch} \alpha & (\kappa^2 + i\alpha \operatorname{Re}) \operatorname{ch} \kappa & -\alpha^2 e^{-\alpha} & -\gamma^2 e^{-\gamma} \\ \alpha^2(\alpha - i \operatorname{Re}) \operatorname{sh} \alpha & \kappa(\kappa^2 - i\alpha \operatorname{Re}) \operatorname{sh} \kappa & \alpha^3 e^{-\alpha} & \gamma^3 e^{-\gamma} \end{pmatrix},$$

$$c = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T.$$

Для нетривиальной разрешимости (6) необходимо положить определитель ее равным нулю

$$(7) \quad \det \|F\| = 0.$$

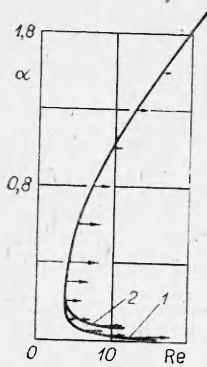
Решения (7) находились методом секущих. Результаты расчета нейтральной кривой представлены на фиг. 1 (кривая I). Критическими собственными значениями для плоской затопленной струи со ступенчатым профилем являются $Re_* \approx 4$, $\alpha_* \approx 0,23$, $Y = 0$, $X_* \approx 0,059$.

Таким образом, по линейной теории устойчивости построена нейтральная кривая. В ее точках от стационарного решения уравнений Навье — Стокса ответвляются периодические автоколебания [3]. В [4] определены режимы возбуждения и найдены автоколебательные решения для плоской автотельной струи Шлихтинга.

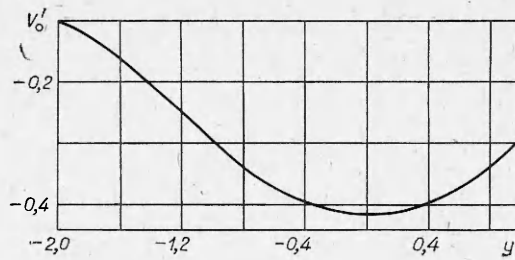
Ниже аналогичные расчеты проведены для плоской струи с профилем скорости (2).

Для возмущений конечной величины, функция тока которых имеет вид [2] $\Psi = \Psi_0(y) + 1/Re \psi(x - Ct, y)$, получаем уравнение

$$(8) \quad \Delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \operatorname{Re} \left[(U - C) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - U'' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right],$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где x — продольная координата. Выберем на нейтральной кривой произвольную точку и рассмотрим малую окрестность этой точки

$$\text{Re} = \text{Re}_0 + f\varepsilon^2,$$

где $f = +1$. Будем искать решение (8) в виде ряда по малому параметру ε :

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k, \quad \text{Re } C = \text{Re}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k C_k.$$

При $k = 1$ коэффициент ψ_k имеет вид

$$(9) \quad \psi_1 = A \{ \varphi(y) e^{i\alpha(x-Ct)} + \varphi^*(y) e^{-i\alpha(x-Ct)} \},$$

где $\varphi(y)$ — собственная функция уравнения Орра — Зоммерфельда (1). Амплитудный множитель A подлежит определению.

Решение для ψ_2 запишем в виде

$$(10) \quad \psi_2 = A^2 \{ V_0(y) + V_1(y) e^{2i\alpha(x-C_0t)} + V_1^*(y) e^{-2i\alpha(x-C_0t)} \}.$$

Функции $V_0(y)$ и $V_1(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$(11) \quad V_0^{IV} = i\alpha (\varphi^* \varphi' - \varphi \varphi'^*);$$

$$(12) \quad L_{2\alpha} V_1 = i\alpha (\varphi'^2 - \varphi \varphi''^*).$$

Причем они антисимметричны в нуле и затухающие на бесконечности, что следует из вида правых частей (11), (12); $V_0(y)$ и $V_1(y)$ можно также записать в виде экспонент:

$$(13) \quad V_{0+}(y) = \frac{i\alpha}{2} \sum_{m=1}^2 \left\{ \frac{c_1^* c_2 [\kappa + (-1)^m \alpha]}{[\kappa - (-1)^m \alpha]^2} \text{sh} [\kappa - (-1)^m] y + \right. \\ \left. + \frac{c_1 c_2^* [\alpha + (-1)^m \kappa^*]}{[\alpha - (-1)^m \kappa^*]^2} \text{sh} [\alpha - (-1)^m \kappa^*] y + \right. \\ \left. + \frac{|c_2|^2 [\kappa + (-1)^m \kappa^*]}{[\kappa - (-1)^m \kappa^*]^2} \text{sh} [\kappa - (-1)^m \kappa^*] y \right\} + \bar{d}_1 y^3/6 + d_3 y, \quad 0 \leq y < 1;$$

$$(14) \quad V_{0-}(y) = i\alpha \left[\frac{\alpha - \gamma}{(\alpha + \gamma)^2} c_3^* c_4 e^{(\alpha + \gamma)y} + \frac{\gamma^* - \alpha}{(\alpha + \gamma^*)^2} c_3 c_4^* e^{(\alpha + \gamma^*)y} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma^* - \gamma}{(\gamma + \gamma^*)^2} |c_4|^2 e^{-(\gamma + \gamma^*)y} \right] + d_3 y + d_4, \quad 1 \leq y < +\infty;$$

$$(15) \quad V_{1+}(y) = b_1 \text{sh} 2\alpha y + b_2 \text{sh} \kappa_1 y + \bar{A} \text{sh}(\alpha + \kappa) y + \tilde{B} \text{sh}(\alpha - \kappa) y, \\ 0 \leq y < 1;$$

$$(16) \quad V_{1-}(y) = b_3 e^{-2\alpha y} + b_4 e^{-\gamma_1 y} + \tilde{D} e^{-(\alpha + \gamma)y}, \quad 1 \leq y < +\infty,$$

где $\kappa_1 = \kappa(2\alpha)$, $\gamma_1 = \gamma(2\alpha)$, $\bar{A} = \tilde{H}(\alpha, \kappa, c_1, c_2)$,

$$\tilde{B} = \tilde{H}(\alpha, -\kappa, c_1, c_2), \quad \tilde{D} = \tilde{H}(\alpha, \gamma, c_3, c_4),$$

$$\tilde{H}(\alpha, z, a, b) = 0,5i\alpha ab(z^2 - \alpha^2)(\alpha - z)/[9\alpha^4 + z^4 - 12\alpha^3z + 4\alpha z^3 - 2\alpha^2z^2 - 2i\alpha\text{Re}(1 - C)(z^2 + 2\alpha z - 3\alpha^2)],$$

d_i, b_i ($i = 1, 4$) — искомые комплексные константы. Константы c_i ($i = 1, 4$) находятся из системы (6); с учетом условия нормировки $\varphi_+(0) = c_1 + c_2 = 1, c_1 = 1 - c_2$. Анализируя уравнения (11), (12), приходим к условиям на функции (13) — (16) при $y = 1$

$$\begin{aligned} V_{0+} - V_{0-} &= 0, & V'_{0+} - V'_{0-} &= 0, & V''_{0+} - V''_{0-} &= 0, \\ V'''_{0+} - V'''_{0-} &= 2\alpha^2 \text{Re } \varphi_- \varphi_-^*, & V_{1+} - V_{1-} &= 0, \\ V'_{1+} - V'_{1-} &= 0, & V''_{1+} - V''_{1-} &= -2i\alpha \text{Re } V_{1-}, \\ V'_{1+} - V'_{1-} &= 2i\alpha \text{Re } V'_{1-} - \alpha^2 \text{Re } \varphi_-^2. \end{aligned}$$

Решение этих систем дает значения величин d_i, b_i ($i = 1, 4$). Из требования разрешимости при $k = 3$ получаем

$$(17) \quad -C_2 \text{Re}_0 J_1 + A^2 J_2 + f J_3 = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\infty \theta (\varphi'' - \alpha^2 \varphi) dy = \frac{a_1 c_2 (\kappa^2 - \alpha^2)}{2(\alpha + \kappa)} \text{sh}(\alpha + \kappa) + \\ &+ \frac{a_1 c_2 (\kappa^2 - \alpha^2)}{2(\alpha - \kappa)} \text{sh}(\alpha - \kappa) + \frac{a_2 c_2 (\kappa^2 - \alpha^2)}{4} \text{sh } 2\kappa + \\ &+ \frac{a_2 c_2 (\kappa^2 - \alpha^2)}{2} + \frac{a_3 c_4 (\gamma^2 - \alpha^2)}{\alpha + \gamma} e^{-(\alpha + \gamma)} + \frac{a_4 c_4 (\gamma^2 - \alpha^2)}{2\gamma} e^{-2\gamma}, \\ J_3 &= -\alpha c_1 a_1 \text{sh } 2\alpha - \frac{3\kappa^2 + \alpha^2}{4\kappa} \text{sh } 2\kappa + \left[\frac{(\alpha - \kappa) c_1 d_2}{2} - \right. \\ &\left. - \alpha (c_1 a_2 + c_2 a_1) \right] \text{sh}(\alpha + \kappa) + \left[\frac{(\alpha + \kappa) c_1 d_2}{2} - \right. \\ &\left. - \alpha (c_1 a_2 + c_2 a_1) \right] \text{sh}(\alpha - \kappa) + 0,5 (\kappa^2 - \alpha^2) c_2 a_2, \\ J_2 &= J_2^1 + J_2^\infty, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_2^1 &= \int_0^1 \{ \theta_+ [V'_{0+} (\varphi''_+ - \alpha^2 \varphi_+) + V'''_{0+} \varphi'_+ + V'_{1+} (\varphi''_+ - \alpha^2 \varphi_+)^* + \\ &+ (V'_{1+} - 4\alpha^2 V_{1+}) \varphi_+^{*'}] + \theta'_+ [V'_{0+} \varphi_+ + 2V_{1+} (\varphi''_+ - \alpha^2 \varphi_+)^* - \\ &- (V''_{1+} - 4\alpha^2 V_{1+}) \varphi_+^*] \} dy + \theta_- [(V''_{1-} - 4\alpha^2 V_{1-}) \varphi_-^* - \\ &- 2V_{1-} (\varphi''_- - \alpha^2 \varphi_-)^* - V''_{0-} \varphi_-] |_{y=1}, \\ J_2^\infty &= \int_1^\infty \theta_- [V'_{0-} (\varphi''_- - \alpha^2 \varphi_-) - V''_{0-} \varphi_- - V'_{1-} (\varphi''_- - \\ &- \alpha^2 \varphi_-)^* - 2V_{1-} (\varphi''_- - \alpha^2 \varphi_-)^{*'} + 2(V''_{1-} - \\ &- 4\alpha^2 V_{1-}) \varphi_-^{*'} + (V'_{1-} - 4\alpha^2 V_{1-}) \varphi_-^*] dy, \end{aligned}$$

$\theta(y)$ — собственная функция уравнения

$$L_\alpha^* \theta = \theta^{IV} - 2\alpha^2 \theta'' + \alpha^4 \theta - i\alpha \text{Re} [(U - C)(\theta'' - \alpha^2 \theta) + 2U'\theta'] = 0,$$

симметричная в нуле и затухающая на бесконечности, т. е.

$$\theta_+(y) = a_1 \text{ch } \alpha y + a_2 \text{ch } \kappa y, \quad 0 \leq y < 1,$$

$$\theta_-(y) = a_3 e^{-\alpha y} + a_4 e^{-\gamma y}, \quad 1 \leq y < +\infty.$$

Неизвестные константы a_i ($i = 1, 4$) определяются из условий

$$\theta_+ - \theta_- = 0, \quad \theta'_+ - \theta'_- = 0, \quad \theta''_+ - \theta''_- = 0, \quad \theta'''_+ - \theta'''_- = 2i\alpha \operatorname{Re} \theta'_-$$

при $y = 1$.

Из условия нормировки $\theta(0) = a_1 + a_2 = 1$ найдем $a_1 = 1 - a_2$. Интегралы J_1, J_2, J_3 комплекснозначны, и формула (17) представляет собой систему двух уравнений для определения вещественных переменных $C_2 \operatorname{Re}_0$ и A^2 . Из требования $A^2 > 0$ определяется знак f и соответственно режим возбуждения.

Получено, что для симметричных возмущений в плоской струе со ступенчатым профилем скорости (2) ветвление происходит в закритическую область. На фиг. 1 длина стрелок дает представление о величине $\partial E / \partial \operatorname{Re}$, которая на нейтральной кривой имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial \operatorname{Re}} \Big|_{\operatorname{Re}=\operatorname{Re}_0} = f A^2 \int_0^{\infty} (|\varphi'|^2 + \alpha^2 |\varphi|^2) dy,$$

где E — энергия автоколебаний. Параллельно численно методом встречной прогонки [5] были проведены аналогичные расчеты для плоской струи с профилем скорости [6]:

$$(18) \quad U(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{th} \frac{1+y}{2\delta} \right), & -2 \leq y \leq 0, \\ 0, & y < -2, \end{cases}$$

$\delta = 0,02.$

На фиг. 1 приведена нейтральная кривая этого течения (кривая 2). Расхождения при малых α возникают в силу того, что условия затухания для (18) ставились на конечном интервале $y = -2$. Однако при анализе ветвления решений интегралы считались по всей области $-\infty < y \leq 0$. При этом полученные результаты хорошо согласуются с аналитическими расчетами. На фиг. 2 приведены значения для добавочной скорости $V'_0(y)$ (при $y \leq 0$ V'_0 соответствует течению с профилем (18), при $y \geq 0$ — (2)). Добавка отрицательна, что приводит к уменьшению исходной скорости.

Таким образом, при расчете устойчивости течений в плоской затопленной струе со ступенчатым профилем область исследования можно разбить на две подобласти. В каждой из них уравнение Орра — Зоммерфельда имеет постоянные коэффициенты. Это позволяет частично аналитически провести анализ устойчивости и характера ветвления. По теории линейной устойчивости была определена нижняя граница для чисел Рейнольдса $\operatorname{Re}_* \approx 4$. Для плоской струи с автомодельным профилем скорости критическое число Рейнольдса того же порядка 4. Однако для коротковолновых возмущений $\alpha \sim 1,5 \operatorname{Re}$ увеличивается на порядок, чего не наблюдается для течения с профилем (2).

Ветвление решений в плоской струе со ступенчатым профилем скорости происходит в закритическую область (мягкое возбуждение).

Автор выражает благодарность В. Н. Штерну за постоянное внимание к работе и полезные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Об автомодельных режимах, ответвляющихся от течений Пуазейля в плоском канале.— ДАН СССР, 1972, т. 202, № 4.
2. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
3. Юдович В. И. О возникновении автоколебаний в жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
4. Лихачев О. А., Правдина М. Х. Модельные автоколебания в плоской струе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 3.
5. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. Morris P. J. The spatial viscous instability of axisymmetric jets.— J. Fluid Mech., 1976, vol. 77, pt 3.

Поступила 18/VIII 1983 г.