

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОКИ В ПЛАЗМЕННОМ БЕТАТРОНЕ

А. М. Стефановский

(Москва)

Рассмотрено движение плазменного шнура по радиусу при ускорении электронов в плазменном бетатроне.

Вычислена предельная величина релятивистских токов, которые могут быть получены в такого рода устройствах.

Г. И. Будкером [1] было высказано предложение об использовании эффекта «убегания» электронов в плазме с сильным электрическим полем для перестройки холодной кольцевой плазмы в интенсивный скомпенсированный пучок релятивистских электронов. Для удержания подобного пучка внутри кольцевой вакуумной камеры можно использовать либо магнитное поле бетатронного типа, либо поле токов изображения, возникающих в металлическом кожухе, окружающем вакуумную камеру с пучком электронов. В последнем случае, как показывают оценки, число ускоряемых электронов должно быть уже довольно значительным, а это приводит к увеличению тех трудностей, которые стоят на пути успешного ускорения всех электронов плазмы. В связи с этим большая часть проведенных экспериментов по ускорению электронов плазмы была выполнена с бетатронными полями на установках, получивших название плазменных бетатронов [2-4]. Особенностью этих ускорителей является полная компенсация объемного заряда ускоряемых электронов и вследствие этого — возникающая возможность получения больших ускоренных токов. В настоящей работе вычисляется величина предельных токов, которые могут быть получены в плазменном бетатроне в зависимости от его параметров и режима работы.

Первые результаты в этом направлении были опубликованы в 1949 г. [5] и носили характер прикидки. Позднее в печати появились и другие, более аккуратные расчеты [6], не дающие, однако, на наш взгляд, достаточной информации о характерных величинах.

Для удержания электрически нейтрального пучка электронов внутри кольцевой вакуумной камеры нужно скомпенсировать радиальные силы, выбрасывающие пучок наружу. Таких сил несколько: во-первых, центробежные силы ускоренных частиц; во-вторых, электродинамическая сила, связанная с магнитной энергией пучка в целом, и, наконец, газовое давление плазмы или, если используется тороидальное магнитное поле, диамагнитное выталкивание плазмы наружу. Рассмотрим компенсацию этих сил при помощи внешнего магнитного поля, т. е. работу бетатрона с большими токами.

Уравнение движения электронов и ионов по r и φ в цилиндрической системе координат (ось z совпадает с осью бетатрона) будут следующими.

1) Уравнение движения по φ из-за сохранения обобщенного момента для электронов

$$\gamma m r v_{\varphi} - \frac{e}{2\pi c} \pi r^2 H^{\circ}(t) + \frac{e n_1 (v_{\varphi} + V_{\varphi})}{2\pi c} L = 0 \quad \left(n_1 = \frac{N}{2\pi r} \right) \quad (1)$$

где L — индуктивность плазменного пучка, $H^{\circ}(t)$ — среднее магнитное поле внутри круга радиуса r , n_1 — число электронов (или ионов) на единицу длины пучка, v_{φ} и V_{φ} — скорость электронов и ионов по φ ; остальные обозначения обычные.

2) Уравнение движения электрона по радиусу

$$\gamma m \frac{d^2}{dt^2} \Delta r_e - 4\pi e^2 n (\Delta r_i - \Delta r_e) = \frac{\gamma m v_{\varphi}^2}{r} - \frac{e v_{\varphi} H(t)}{c} + \frac{1}{N} \frac{\partial W_m}{\partial r} + \frac{W_{te}}{r} \quad (2)$$

Здесь Δr_e и Δr_i — отклонение центров электронного и ионного пучков от начального положения, $H(t)$ — внешнее магнитное поле на радиусе r , W_m — магнитная энергия пучка и W_{te} — специальным образом усредненная энергия теплового движения электронов.

Для ионов аналогичные уравнения имеют вид

$$MrV_\varphi - \frac{e}{2\pi c} \pi r^2 H^\circ(t) + \frac{en_1(v_\varphi + V_\varphi)}{2\pi c} L = 0 \quad (3)$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} \Delta r_i + 4\pi e^2 n (\Delta r_i - \Delta r_e) = \frac{MV_\varphi^2}{r} - \frac{eV_\varphi H(t)}{c} + \frac{eV_\varphi H_e}{c} + \frac{W_{ti}}{r} \quad (4)$$

Здесь H_e — магнитное поле пучка электронов.

Из уравнения (3) видно, что $V_\varphi = v_\varphi \gamma m / M$, т. е. скорость ионов по φ в нерелятивистской области много меньше скорости электронов, поэтому в уравнении (1) ею можно пренебречь. Тогда

$$v_\varphi = \frac{erH^\circ(t)}{2\gamma mc} \left(1 + \frac{vl}{\gamma}\right)^{-1} \quad \left(v = \frac{e^2 n_1}{mc^2}, \quad l = \frac{L}{2\pi r}\right) \quad (5)$$

Здесь l — индуктивность единицы длины шнура. Последнее выражение свидетельствует, что с увеличением числа ускоряемых электронов ($v \sim n_1$) их скорость растет медленнее, чем в обычном бетатроне. Это связано с тем, что внешнее электрическое поле увеличивает не только кинетическую энергию электронов, но и магнитную энергию пучка в целом. Отметим также, что в индуктивность шнура входят два разных слагаемых, по-разному влияющих на скорость электронов. Одно из них связано с внешним магнитным потоком пучка и ослабляет ускоряющее электрическое поле бетатрона E одинаковым образом для всех электронов. Вторая часть магнитного потока пронизывает тело пучка и приводит к тому, что поле в центре сечения пучка оказывается меньшим, чем на его краях. Действие внешней части потока, естественно, может быть описано при помощи множителя $(1 + vl\gamma^{-1})^{-1}$.

Влияние внутренней части потока можно учесть, приняв для скорости электронов усредненную по сечению пучка скорость. Для малых значений v ($v \ll 1$) усредненная скорость (или электрическое поле) равна скорости электронов на краю пучка, умноженной на $(1 - v[2\gamma]^{-1})$. Поэтому общее изменение скорости при малых $vl\gamma^{-1}$ описывается выражением (5), в котором $l = l_1 + 1/2$.

Выпишем теперь выражение для силы, действующей на электронный пучок в бетатроне по радиусу с учетом собственных полей. Для этого отметим, что $W_{te}r^{-1}$ по порядку величины равна $mv_{te}^2r^{-1}$ и для $v_\varphi \gg v_{te}$ пренебрежимо мала по сравнению с центробежной силой $r^{-1}\gamma mv_\varphi^2$. Поэтому всюду в дальнейшем будем пренебрегать ею. Кроме того, величина собственной магнитной силы тока электронов равна

$$\frac{1}{N} \frac{\partial W_m}{\partial r} = \frac{vl}{2\gamma} \left(1 + \frac{r}{l} \frac{\partial l}{\partial r}\right) \frac{\gamma mv_\varphi^2}{r}$$

В связи с этим правую часть уравнения (2) можно привести к виду

$$F = \frac{\gamma mv_\varphi}{r} \left\{ v_\varphi \left[1 + \frac{vl}{2\gamma} \left(1 + \frac{r}{l} \frac{\partial l}{\partial r} \right) \right] - \frac{eHr}{\gamma mc} \right\} \quad (6)$$

Используя (5), видим, что сила F обращается в нуль, когда

$$H = \frac{1}{2} H^\circ \left[1 + \frac{vl}{2\gamma} \left(1 + \frac{r}{l} \frac{\partial l}{\partial r} \right) \right] \left(1 + \frac{vl}{\gamma} \right)^{-1} \quad (7)$$

Для $v l \gamma^{-1} \ll 1$ соотношение (7) превращается в обычное правило «два к одному» для бетатронов, а в случае $v l \gamma^{-1} \gg 1$ — переходит в формулу для больших токов, полученную для частного случая в работе Осовца [7].

Таким образом, соотношение между ускоряющим полем E ($\sim H^\circ$) и поддерживающим полем H для движения электронов по орбите постоянного радиуса зависит от числа ускоряемых электронов v , их энергии γ и геометрии пучка l в ускорителе. Выполнение соотношения (7) для широкого диапазона значений v , γ и l представляется весьма сложным.

В связи с этим представляет интерес исследование движения пучка электронов по радиусу в обычном бетатронном поле. В этом случае на кольцевой орбите радиуса R выполнено соотношение «два к одному», поле на магнитной дорожке меняется по обычному закону $H = H_0(R/r)n_b$, и ширина дорожки мала по сравнению с радиусом R . Тогда, полагая $H = H_0(1 - n_b\xi)$, где $\xi = \Delta r / R$ и $H^\circ = 2H_0(1 - \xi)$, получим из формулы (6)

$$F = \frac{\gamma v_\phi e H(t)}{c} \left(1 + \frac{vl}{\gamma}\right)^{-1} \left\{ (1 - \xi) \left[1 + \frac{vl}{2\gamma} \left(1 + \frac{r}{l} \frac{\partial l}{\partial r}\right) \right] - (1 - n_b \xi) \left(1 + \frac{vl}{\gamma}\right) \right\} \quad (8)$$

Правая часть этого выражения, если пренебречь членами, содержащими ξ (vl / γ), обращается в нуль при

$$\xi = -\frac{1}{1 - n_b} \frac{vl}{2\gamma} \left(1 - \frac{r}{l} \frac{\partial l}{\partial r}\right) \quad (9)$$

Это выражение определяет смещение равновесной орбиты пучка электронов от равновесной вакуумной орбиты в бетатроне при различных значениях v , l и γ . Видно, что с течением времени, с ростом энергии (т. е. γ) это смещение уменьшается, тогда как в начале ускорения оно максимально. Подставив в уравнение (9) максимально допустимую величину смещения, равную полуширине магнитной дорожки Δ , получим максимальное значение v , при котором равновесная орбита пучка электронов во все моменты времени лежит в пределах магнитной дорожки ускорителя

$$v_{\max} = (1 - n_b) \frac{2\Delta}{R} \left(l - r \frac{\partial l}{\partial r}\right)^{-1} \quad (10)$$

Для $\Delta / R = 1/10$ ($R / a \approx 10$), $n_b = 0.5$ и $l = 2$ ($\ln(8R / a) - 1.75$) величина v_{\max} равна $2 \cdot 10^{-2}$, что соответствует релятивистскому току электронов около 300 a .

Действительное положение равновесной орбиты электронного пучка в бетатроне определяется не только соотношением собственных полей пучка и внешних полей бетатрона. Имеется еще один важный фактор, существенно влияющий на местоположение равновесной орбиты. Он заключается в следующем.

Известно, что при ускорении электронов плазмы возникают различные неустойчивости, в результате чего возбуждаются разнообразные колебания плазмы. При этом энергия колебательных полей, естественно, черпается из энергии направленного движения электронов, так что скорость электронов v_ϕ уменьшается на некоторую величину Δv_ϕ . В дальнейшем во всех рассматриваемых случаях будем предполагать, что $\Delta v_\phi / v_\phi \ll 1$.

Взаимодействие электронов с колебаниями происходит при скоростях, не превышающих максимальные фазовые скорости волн в плазме. Здесь рассматриваются только потенциальные плазменные волны, а также волны, связанные с поперечным изгибанием пучка, так как именно эти колебания

являются наиболее опасными [1]. Максимальная фазовая скорость потенциальных волн в ограниченной цилиндрической плазме по порядку величины равна $2c\sqrt{v}/2.4$, т. е., грубо говоря, в интересующих нас условиях ($v \sim 10^{-2}$) примерно на порядок меньше скорости света. Максимальная фазовая скорость спиральных волн плотности в плазме с тороидальным магнитным полем H_φ равна $4\pi enRC (H_\varphi)^{-1}$, что в условиях плазменных бетатронов также составляет примерно $1/10$ от скорости света. Таким образом, возникновение Δv_φ у электронов (которую будем называть расстройкой) происходит в самом начале ускорения до приобретения электронами энергии в 5—10 *кэв*. Для упрощения будем считать, что эта расстройка присутствует с самого начала ускорения. В дальнейшем будет видно, что это предположение не меняет существенно конечных результатов.

Новое выражение для скорости электронов получается из уравнения (1); при наличии расстройки Δv_φ

$$v_\varphi = \frac{er H^\circ(t)}{2\gamma mc} \left(1 + \frac{vl}{r}\right)^{-1} - \frac{r_0}{\gamma} \Delta v_\varphi \quad (11)$$

где r_0 — местоположение центра электронного пучка в момент появления расстройки. Подставляя его в (2), получим для бетатронного поля

$$\begin{aligned} \gamma m \frac{d^2 \xi_e}{dt^2} - 4\pi e^2 n (\xi_i - \xi_e) = \\ = - \frac{e^2 H_0^2(t)}{\gamma mc^2} \left[(1 - n_b) \xi_e + \frac{vl}{2\gamma} \left(1 - \frac{r}{l} \frac{\partial l}{\partial r}\right) \right] - \frac{e H_0(t)}{R} \frac{\Delta v_\varphi}{c} \end{aligned} \quad (12)$$

Для дальнейшего анализа уравнения (12) необходимо выяснить соотношение сил, действующих на электронный пучок. Дело в том, что при смещении электронного пучка относительно ионного возникает поле поляризации, препятствующее дальнейшему движению электронов по радиусу. Разделение центров ионного и электронного пучков легко получается из (12) при $\xi_e'' = 0$ и $\xi_i = 0$. Для нулевой расстройки смещение равно

$$\frac{\Delta r}{a} = \frac{a}{R} \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{l}{8} \left(1 - \frac{r}{l} \frac{\partial l}{\partial r}\right) \quad (13)$$

где a — радиус плазменного шнура. Поскольку $a/R \ll 1$ и

$$\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{l}{8} \left(1 - \frac{r}{l} \frac{\partial l}{\partial r}\right) \ll 1$$

то разделение пучков оказывается весьма малым на всех стадиях ускорения и особенно в нерелятивистской области, когда $\gamma^2 \sim 1$. Это означает, что электрическое поле поляризации действует на пучок гораздо сильнее, чем магнитное поле бетатрона. Оказывается также, что разделение пучков не зависит от плотности пучка, что также является весьма естественным. Анализ показывает, что формула (13) остается справедливой и при малых расстройках скорости электронов.

Таким образом, силы, действующие на электронный пучок со стороны бетатронного поля, через поле поляризации оказываются приложенными к ионам. После ряда формальных операций уравнения движения ионов и электронов по радиусу получаются следующими:

$$M \xi_i'' = - \frac{e^2 H_0^2(t)}{\gamma mc^2} \left[(1 - n_b) \xi_i + \frac{vl}{2\gamma} \left(1 - \frac{r}{l} \frac{\partial l}{\partial r}\right) \right] - \frac{e H_0(t)}{Rc} \frac{\Delta v_\varphi}{c} \quad (14)$$

$$\gamma m (\Delta \xi_e'' + \omega_0^2 \Delta \xi_e) = 0 \quad (15)$$

Колебания электронов происходят около положения равновесия $\xi_{e0} = \xi_i + \Delta\xi_{e0}$, где $\Delta\xi_{e0}$ определяется из уравнения (13).

Частота этих колебаний почти совпадает с плазменной частотой, а амплитуда равна $\Delta\xi_{e0}$.

Общее движение плазменного шнура по радиусу определяется уравнением (14). Введем новую переменную, а также некоторые обозначения

$$\tau = \frac{eEct}{mc^2} = \frac{eH_0(t)R}{mc^2}, \quad A = \frac{m}{M} \left(\frac{mc^2}{eER} \right)^2, \quad B = \frac{vl}{2} \left(1 - \frac{r}{l} \frac{\partial l}{\partial r} \right)$$

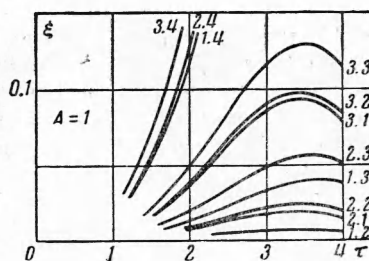
Тогда уравнение (14) запишется в виде

$$\xi'' + A(1 - n_b) \frac{\tau^2}{\sqrt{1 + \tau^2}} \xi = -AB \frac{\tau^2}{1 + \tau^2} - A\tau \frac{\Delta v_\varphi}{c} \quad (16)$$

На фиг. 1—3 представлены численные решения уравнения (16) для $A = 100$, 10 и 1, что примерно соответствует ускорению электронов аргонной плазмы в поле 10, 30 и 100 *э/см*. Значения $B = 7 \cdot 10^{-2}$, $1.5 \cdot 10^{-2}$ и $0.3 \cdot 10^{-2}$ соответствуют релятивистским токам 700, 170 и 35 *а*. Радиус вакуумной камеры принят равным 20 *см*, $n_b = 0.5$ и $l = 2 (\ln(8R/a) - 1.75) \approx 5.1$. Величина расстройки указана на фиг. 1—3. Начальное положение пучка принималось совпадающим с вакуумной бетатронной орбитой.

Как видно из фиг. 1—3, высыпание электронов на стенки вакуумной камеры вследствие расстройки при $A = 1$ и 10 происходит при энергии свыше 150 *кэв*. Это много больше той энергии, при которой электроны взаимодействуют с колебаниями.

Фиг. 1. Движение плазменного пучка по радиусу при $A = 1$. Первые индексы у кривых означают следующее: 1 — $B = 0.3 \cdot 10^{-2}$, 2 — $B = 1.5 \cdot 10^{-2}$, 3 — $B = 7 \cdot 10^{-2}$; значения вторых индексов: 1 — $\Delta v_\varphi / c = 0$, 2 — $\Delta v_\varphi / c = 10^{-3}$, 3 — $\Delta v_\varphi / c = 10^{-2}$, 4 — $\Delta v_\varphi / c = 10^{-1}$.



Поэтому в указанных случаях допущение о появлении расстройки с самого начала ускорения является вполне оправданным. При $A = 100$ энергия электронов в момент вылета на стенки равна 30—60 *кэв*. По-видимому, в реальных условиях при этих параметрах высыпание электронов происходит несколько позже, чем это следует из уравнения (16).

Результаты интегрирования уравнения (16) показывают, что учет инерции ионов приводит к значительному увеличению максимального тока в плазменном бетатроне.

Это объясняется тем, что с увеличением энергии электронов равновесная орбита пучка все больше приближается к вакуумной. В то же время ионы из-за большой массы не могут смещаться достаточно быстро. Пока произойдет необходимое смещение ионов, равновесная орбита электронов успеет достаточно близко подойти к вакуумной равновесной орбите.

По виду кривых на фиг. 1—3 можно сделать заключение, что равновесная орбита плазменного пучка при выбранных параметрах является устойчивой. К такому же заключению приводит и анализ уравнения (12).

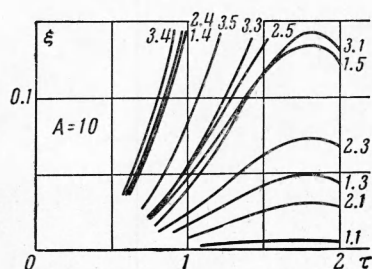
Опуская несложные вычисления, приведем выражение для n_b , обеспечивающее устойчивость плазменного пучка как по r , так и по z

$$\left[1 + \frac{vl}{\gamma} \left(1 - \frac{r^2}{l} \frac{\partial^2 l}{\partial r^2} \right) \right] \left[1 + \frac{vl}{2\gamma} \left(1 + \frac{r}{l} \frac{\partial l}{\partial r} \right) \right]^{-1} < n_b < 0 \quad (17)$$

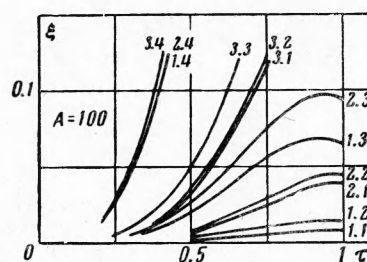
В заключение отметим следующее. Индуктивность пучка электронов l в течение всего цикла ускорения считалась постоянной. В действительности, это допущение оказывается справедливым только при использовании достаточно сильного тороидального магнитного поля H_ϕ (порядка 500 э). Если при этом

$$4\pi n M c_2 H_\phi^{-2} \gg 1$$

(что в реальных условиях всегда имеет место), то уравнения движения ионов по радиусу не изменяются, и поэтому полученные результаты будут



Фиг. 2



Фиг. 3

Фиг. 2. Движение плазменного пучка по радиусу при $A=10$. Первые индексы те же, что и на фиг. 1. Второй индекс δ соответствует $\Delta v_\phi/c = 3 \cdot 10^{-2}$

Фиг. 3. Движение плазменного пучка по радиусу [при $A=100$. Индексы те же, что и на фиг. 2

справедливы и для бетатронов с продольным магнитным полем. Движение электронов несколько меняется: вместо колебаний по r с плазменной частотой около положения равновесия появляется вращение в плоскости zr вокруг точки $\xi_i + \Delta \xi_{e0}$ с частотой $4\pi n c_2 H_\phi^{-1}$.

Автор благодарит А. Е. Бажанову за помощь в интегрировании уравнения (16).

Поступила 22 VII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Budker G. J., Naumov A. A. Relativistic Stabilized electron beam. CERN Symposium, 1956.
2. Reynolds P., Skarsgard H. M. A plasma betatron. J. Nucl. Energy, Pt. C. 1960, vol. 1, No. 1.
3. Linhart J. G. et al. Plasma betatron. Proc. of Internat. Conf on High Energy Accelerators and Instrumentation. CERN, 1959.
4. Drees J., Paul W. Beschleunigung von Elektronen in einem Plasma betatron. Zeit. für Phys., 1964, B. 180, № 4, S. 340—361.
5. Latham R., Pentz M. J. High current betatron. Nature 1949, vol. 164.
6. Schmidt G. Self-consistent field theory of plasma betatron. J. Nucl. Energy, Pt. C. 1961, vol. 3, N 2.
7. Осовец С. М. Плазменный виток в электромагнитном поле. Сб. «Физика плазмы и управляемые термояд. реакции», т. II, Изд-во АН СССР, 1958.