

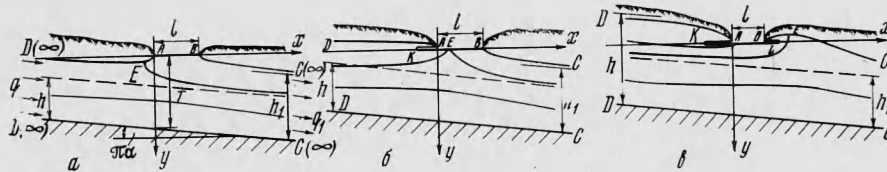
**К ЗАДАЧЕ О КАНАЛЕ (ДРЕНЕ) НАД ПОТОКОМ ГРУНТОВЫХ ВОД ПО НАКЛОННОМУ ВОДОУПОРУ**

*В. Н. Эмих, Е. М. Эмих*

(Новосибирск)

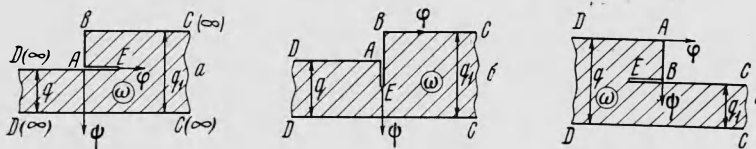
На основе формул, полученных ранее С. Н. Нумеровым [2] для случая установившейся фильтрации в однородном изотропном грунте, выполнены расчеты по программе для ЭВМ М-20, позволяющие сделать некоторые заключения о влиянии физических параметров задачи на фильтрационные характеристики потока.

**1. Постановка задачи и вид решения.** В естественных условиях верхний горизонт, содержащий грунтовые воды, иногда подстилается наклонным водоупором. Его уклон обуславливает поток грунтовых вод. Известно ([1], гл. X, § 5), что в стационарном состоянии свободная поверхность такого потока в неограниченной области параллельна водоупору. При создании же оросительных каналов или дрен форма потока изменяется: в первом случае в зоне канала возникает подтопление, выражающееся в подъеме свободной поверхности, во втором — в окрестности дрены происходит понижение уровня грунтовых вод по сравнению с естественным состоянием. Ниже эта задача рассматривается главным образом для канала, т. е. применительно к условиям, которые могут возникнуть при орошении.



Фиг. 1. Область фильтрации  $z$

При допущении малости глубины воды в канале (дрене), поперечное сечение которого представляет собой отрезок прямой, С. Н. Нумеров получил [2] методами теории функций решение задачи в виде зависимостей комплексной координаты  $z = x + iy$  и приведенного (отнесенного к коэффициенту фильтрации) комплексного потенциала  $\omega = \phi + i\psi$  потока ( $\phi$  — потенциал скорости,  $\psi$  — функция тока) от комплексного параметра  $\zeta = \xi + i\eta$ , областью изменения которого является полуплоскость. При этом следует различать три возможности, для каждой из которых на фиг. 1—3 схематически изображены области  $z$ ,  $\omega$  и  $\zeta$ .

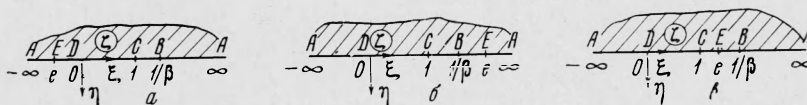


Фиг. 2. Область комплексного потенциала  $\omega$

а) Вода фильтруется в грунт из канала по всей его ширине (фиг. 1, а); при этом левая ветвь  $AD$  свободной поверхности имеет точку минимума  $E$ , а линия тока  $EC$  разделяет поток грунтовых вод и поток, фильтрующийся из канала. Этот случай возникает при следующем соотношении параметров задачи [1]:

$$h < h_1 \sqrt{1 - \beta} \tag{1.1}$$

где  $h$  — глубина потока слева на бесконечности, равная глубине грунтового потока при отсутствии канала; такой поток, следуя С. Н. Нумерову, будем называть естественным;  $h_1$  — глубина потока справа на бесконечности;  $\beta$  — параметр, характеризующий положение точки  $B$  на действительной оси плоскости  $\zeta$  (фиг. 3).



Фиг. 3. Вспомогательная полуплоскость комплексного переменного  $\zeta$

б) Фильтрация в грунт происходит через некоторую часть дна канала  $EB$  (фиг. 1, б), участок же  $AE$  дренирует грунтовый поток, причем вдоль отрезка  $KA$ , представляющего дренажную щель, грунтовые воды поступают и снизу и сверху. Остальная часть потока, ограниченная сверху линией тока  $DEC$ , проходит мимо канала вниз по водоупору, сливаясь с водами, фильтрующимися из канала. Условия, при которых имеет место рассматриваемый случай, таковы:

$$h_1 \sqrt{1-\beta} < h < h_1 / \sqrt{1-\beta} \quad (1.2)$$

в) Происходит двусторонний приток к каналу, и таким образом, речь идет о дрене (фиг. 1, в). В этом случае, возникающем при условии

$$h > h_1 / \sqrt{1-\beta} \quad (1.3)$$

правая ветвь  $BC$  свободной поверхности имеет точку максимума, а дренажные щели существуют с обеих сторон отрезка  $AB$ . Часть потока, ограниченная сверху линией тока  $DEC$ , не попадает в дрину.

Решение С. Н. Нумерова охватывает все три перечисленные случая и при выборе координатных систем в соответствии с фиг. 1—3 имеет следующий вид:

$$z = -T \operatorname{ctg} \pi \alpha + q + i\omega - \frac{\cos \pi \alpha}{\pi} \zeta^\alpha (\zeta - 1)^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{t^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} \varphi(t)}{t-\zeta} dt$$

$$\omega = i(q - q_1) + \frac{2}{\pi} q_1 \operatorname{ar} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(\zeta-1)}} - \frac{2}{\pi} q \operatorname{ar} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{1}{\beta \zeta}} \quad (1.4)$$

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} q_1 \operatorname{ar} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(1-t)}} - \frac{2}{\pi} q \operatorname{ar} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{1}{\beta t}}$$

$$q = h \sin \pi \alpha \cos \pi \alpha, \quad q_1 = h_1 \sin \pi \alpha \cos \pi \alpha \quad (1.5)$$

Здесь  $T$  — глубина водоупора от дна канала под началом координат;  $\pi \alpha$  — угол наклона водоупора к горизонтальной плоскости;  $q$  и  $q_1$  — величины приведенных расходов потока в его верховой и низовой частях соответственно; эти величины связаны с параметрами  $h$  и  $h_1$  соотношениями (1.5).

Среди геометрических характеристик, входящих в решение (1.4), естественно задать в качестве исходных параметры  $T$ ,  $\alpha$  и  $h$  (или  $q$ ). Величина же  $h_1$  и связанный с ней вторым равенством (1.5) параметр  $q_1$  являются искомыми и в свою очередь служат для определения приведенного фильтрационного расхода  $q_0$  из канала на единицу его длины

$$q_0 = q_1 - q = (h_1 - h) \sin \pi \alpha \cos \pi \alpha \quad (1.6)$$

Помимо  $q_1$ , неизвестным является и параметр  $\beta$  конформного отображения. Для их определения С. Н. Нумеров предлагает использовать следующие два условия (фиг. 1, 3):

$$z(\infty) = 0, \quad z(1/\beta) = l \quad (1.7)$$

Согласно второму равенству (1.3) имеем

$$\omega(\infty) = 0, \quad \omega(1/\beta) = i(q - q_1) \quad (1.8)$$

Из первой формулы (1.4) с учетом равенств (1.5), (1.7) и (1.8) получаются следующие соотношения:

$$h - T \frac{1}{\sin^2 \pi \alpha} + \frac{2 \cos \pi \alpha}{\pi^2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} f(t) dt = 0 \quad (1.9)$$

$$\sin \pi \alpha \cos \pi \alpha \left[ h_1 - T \frac{1}{\sin^2 \pi \alpha} + \frac{2 \cos \pi \alpha}{\pi^2} (1-\beta)^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1} f(t) dt}{t^\alpha (1-\beta t)} \right] = l \quad (1.10)$$

$$f(t) = h_1 \operatorname{ar} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(1-t)}} - h \operatorname{ar} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{1}{\beta t}} \quad (1.11)$$

2. Описание вычислений и предварительных преобразований. Разрешим равенство (1.9) относительно  $h_1$ :

$$h_1 = \left[ \frac{\pi_2}{\cos \pi \alpha} \left( \frac{T}{\sin^2 \pi \alpha} - h \right) + 2h \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} \operatorname{ar ch} \sqrt{\frac{1}{\beta t}} dt \right] \times \\ \times \left[ 2 \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} \operatorname{ar sh} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(1-t)}} dt \right]^{-1} \quad (2.1)$$

Внося выражение (2.1) в (1.10), получим уравнение относительно параметра  $\beta$ . Обозначая левую часть этого уравнения через  $F(\beta)$ , запишем его в виде

$$F(\beta) = l \quad (2.2)$$

Первым этапом вычислений по программе, составленной авторами для ЭВМ М-20, является определение параметра  $\beta$  из интервала (0,1) как корня уравнения (2.2). Эта процедура осуществляется методом половинного деления ([3], гл. IV, § 3), который применим, если  $F(\beta)$  — монотонная функция.

Так как  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = \infty$ , то  $F(\beta)$  возрастает с изменением  $\beta$  от нуля до единицы. Вопрос о монотонном характере возрастания  $\beta$ , равносильный вопросу единственности решения уравнения (2.2), не удалось решить непосредственным дифференцированием  $F(\beta)$  по  $\beta$ . Тем не менее, используя заключение о строго монотонном возрастании функции  $F(\beta)$  в качестве гипотезы, основанной на интуитивных соображениях и результатах вычислений, т. е., принимая неравенство

$$\frac{dF(\beta)}{d\beta} = \frac{dl}{d\beta} > 0 \quad (2.3)$$

исследуем с физической точки зрения некоторые зависимости, получаемые из вышеприведенных формул.

Продифференцируем по  $\beta$  равенства (1.9) и (1.11)

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{t^\alpha} \frac{\partial f(\beta, t)}{\partial \beta} dt = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial f(\beta, t)}{\partial \beta} = \frac{dh_1}{d\beta} \operatorname{ar sh} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta(1-t)}} + \frac{1}{2\beta \sqrt{1-\beta t}} \left( h - \frac{h_1}{\sqrt{1-\beta}} \right) \quad (2.5)$$

Из (2.4) следует, что в интервале (0,1) функция  $\partial f(\beta, t) / \partial \beta$  является знакопеременной. Согласно же (2.5), это возможно только тогда, когда выражения  $dh_1 / d\beta$  и  $h - h_1 / \sqrt{1-\beta}$  противоположны по знаку; остальные члены правой части (2.5) положительны во всей области  $\{0 < t < 1\} \times \{0 < \beta < 1\}$ . Считая далее неравенство (2.3) справедливым, имеем

$$\frac{dh_1}{dl} > 0 \quad \text{при } h < \frac{h_1}{\sqrt{1-\beta}}, \quad \frac{dh_1}{dl} < 0 \quad \text{при } h > \frac{h_1}{\sqrt{1-\beta}} \quad (2.6)$$

Возвращаясь теперь к неравенствам (1.1) — (1.3), видим, что в случаях а) и б), когда из канала происходит фильтрация в грунт, по крайней мере, через некоторую часть его дна, глубина потока  $h_1$  возрастает с увеличением  $l$ , т. е. с расширением фильтрующей части канала. Вторая пара неравенств (2.6), соответствующая случаю в), интерпретируется аналогично: при двустороннем притоке к дрене расширение ее приводит к более интенсивному поглощению ею грунтового потока, что выражается в уменьшении  $h_1$ . Однако при некотором  $l$  убывание  $h_1$  прекращается (это следует хотя бы из того, что при  $l \rightarrow \infty$  имеем  $\beta \rightarrow 1$  и согласно (2.1)  $h_1 \rightarrow \infty$ , и при дальнейшем возрастании  $l$  случай в) переходит в случай б).

По ходу вычисления  $\beta$  определяется параметр  $h_1$  и вместе с ним по формуле (1.6) — величина  $q_0$ ; затем программой предусмотрено вычисление координат точек свободной поверхности потока. Не приводя здесь параметрических уравнений свободной поверхности, которые для правой ее ветви  $BC$  ( $1 < \xi < 1/\beta$ ) непосредственно получаются разделением действительной и мнимой частей в первом уравнении (1.4), для левой же ветви  $AD$  ( $-\infty < \xi < 0$ ) — с предварительным преобразованием правой части этого уравнения при обходе особых точек, отметим один из основных моментов, связанных с приведением исходных формул к виду, пригодному для вычислений на ЭВМ.

Для точек свободной поверхности параметр  $\xi$  изменяется вне промежутка  $[0, 1]$ , и, следовательно, интеграл в правой части первого уравнения (1.4) не является сингулярным, но оказывается несобственным: подынтегральная функция имеет особенности на концах промежутка интегрирования. Поскольку интеграл вычисляется на ЭВМ чис-

ленно, по формуле Симпсона, эти особенности необходимо изолировать, для чего из промежутка  $[0, 1]$  выделяются концевые промежутки  $[0, \varepsilon]$  и  $[1 - \varepsilon, 1]$ . В оставшемся промежутке  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$  интеграл вычисляется на ЭВМ, для промежутков же  $[0, \varepsilon]$  и  $[1 - \varepsilon, 1]$  соответствующие интегралы представлены приближенными выражениями, которые затем программируются.

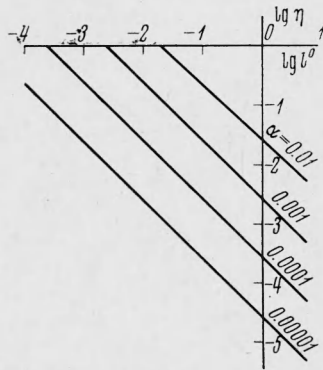
Программа вычислений, так же как и решение С. Н. Нумерова, на котором эта программа основана, пригодна для всех трех случаев, описанных в п. 1. При расчетах основное внимание было уделено случаям, характерным для практики орошения, когда  $h < T$ , т. е. имеет место один из случаев: а) или б) см. п. 1). Для каждого конкретного случая задаются параметры  $l^0 = l / T$ ,  $h^0 = h / T$  и  $\alpha$  и в соответствии с этим получаются безразмерные значения геометрических характеристик потока (отнесенных к  $T$ ) и фильтрационного расхода из канала

$$q_0^0 = q_0 / T = Q_0 / kT$$

где  $Q_0$  — расход из канала на единицу его длины ( $\text{м}^3 / \text{сутки} / 1 \text{ п.м.}$ ),  $k$  — коэффициент фильтрации грунта ( $\text{м} / \text{сутки}$ ).

**3. Анализ результатов вычислений.** Целью расчетов является изучение зависимостей величины  $q_0$  фильтрационного расхода из канала и формы свободной поверхности потока от параметров  $l^0$ ,  $h^0$  и  $\alpha$ . Эти зависимости сводятся к следующему.

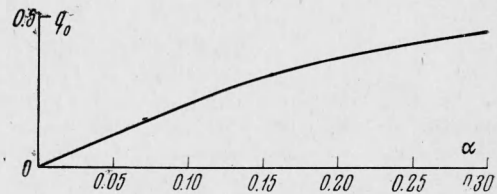
1) Изменение  $l^0$ , которое при фиксированном  $T$  означает изменение ширины канала  $l$ , в условиях подпора весьма слабо отражается на величине фильтрационных характеристик. Иллюстрацией этого служат графики зависимости  $\lg \eta$  от  $\lg l^0$ , построенные на фиг. 4 для  $h^0 = 0.2$  и  $\alpha = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$  на основании численных данных табл. 1. Величина



Фиг. 4. Зависимости  $\lg \eta$  от  $\lg l^0$  для  $h^0 = 0.2$

$$\eta = \frac{q_0^0}{l^0} = \frac{Q_0}{kl} \quad (3.1)$$

названа С. Ф. Аверьяновым [4] коэффициентом подпора и представляет отношение фильтрационного расхода  $Q_0$  из канала в рассматриваемом случае к расходу  $kl$  при свободной фильтрации.



Фиг. 5. Зависимость  $q_0^0$  от  $\alpha$  при  $l^0 = 0.5$ ,  $h^0 = 0.3$

Приведенные на фиг. 4 зависимости  $\lg \eta$  от  $\lg l^0$  близки к прямым, угловые коэффициенты которых мало отличаются от минус единицы. Эти графики приближенно представимы уравнениями вида

$$\lg \eta \approx \lg A - (1 - \mu) \lg l^0 = \lg B - (1 - \mu) \lg l \quad (3.2)$$

где  $B$  и  $\mu$  — постоянные. В отношении постоянной  $B$  будет сказано ниже, параметр  $\mu$  — малая величина порядка  $0.0001 \div 0.03$  (тем меньшая, чем меньше  $\alpha$ ). В частности, для графиков на фиг. 4 значения параметра  $\mu$  в порядке убывания таковы: 0.023, 0.002, 0.0002, 0.0001.

Потенцируя (3.2), получим

$$\eta \approx B l^{\mu-1}$$

или, согласно (3.1)

$$q_0 \approx B l^{\mu} \quad (3.3)$$

Равенство (3.3) непосредственно выражает факт слабой зависимости  $q_0$  от  $l$ .

2) Зависимость  $q_0$  от параметров  $h$ ,  $T$  и  $\alpha$  при малых  $\alpha$  ( $\alpha < 0.01$ ) носит линейный характер и может быть представлена приближенным равенством:

$$q_0 \approx \pi \alpha (T - h) \quad (3.4)$$





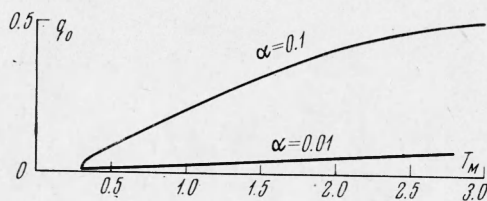
Это обстоятельство отмечено С. Н. Нумеровым [1] и нашло полное подтверждение в результате расчетов. Для иллюстрации соотношения (3.4) приводятся графики зависимости величины  $q_0$  от параметров  $\alpha$  (фиг. 5 при  $l = 0.5, h = 0.3, T = 1$ ) и  $T$  (фиг. 6; при  $l = 0.5, h = 0.3$ ). Как видно из фиг. 5, прямолинейный характер зависимости  $q_0$  от  $\alpha$  при малых  $\alpha$  постепенно нарушается с ростом  $\alpha$ . На фиг. 6 при  $\alpha = 0.01$  график функции  $q_0(T)$  является почти прямолинейным, в то время как для  $\alpha = 0.1$  получается некоторая кривая. Однако значение  $\alpha = 0.1$  (угол уклона равен  $18^\circ$ ) уже выходит за рамки значений  $\alpha$ , распространенных в практике.

Сравнивая (1.6) и (3.4), видим, что для малых  $\alpha$  выполняется приближенное равенство  $h_1 \approx T$ , также отмеченное С. Н. Нумеровым [1] и подтвердившееся при вычислениях (табл. 1). Сопоставляя (3.3) и (3.4), получим приближенно

$$q_0 \approx \pi \alpha (T - h) l^u \quad (B = \pi \alpha (T - h)) \quad (3.5)$$

где  $u$  — малая постоянная.

3) Левая и правая ветви свободной поверхности потока имеют асимптоты, параллельные водоупору и отстоящие от него, соответственно, на расстояниях  $h$  и  $h_1$  (фиг. 1).



Фиг. 6. Зависимости  $q_0$  от  $T$  при  $l = 0.5$  м,  $h = 0.3$  м

При вычислениях обнаруживается, что вниз по потоку уже в непосредственной близости от канала свободная поверхность почти сливается со своей асимптотой, в то время как в верховой части глубина потока превышает естественную глубину даже на значительных расстояниях от канала.

По ходу вычисления координат левой ветви свободной поверхности определялись значения  $x_8$  координаты  $x$ , начиная с которой  $\Delta y < \delta$ , где  $\Delta y$  — расстояние по вертикали между свободной поверхностью и ее асимптотой. Абсолютные величины этих значений (в силу выбора системы координат  $x_8 < 0$ ) приведены в табл. 2 для  $\delta = 0.1, 0.01$  и  $0.001$  (линейные характеристики отнесены к  $T$ ).

Величина  $\Delta y$  может служить мерой подтопления, в то время как  $x_8$  выражает дальность подтопления. Последнее понятие столь же условно, как и понятие радиуса влияния скважины в случае неограниченных размеров воронки депрессии. При изменении  $l$  величина  $x_8$  меняется чрезвычайно слабо (особенно при малых  $\alpha$ ), поэтому в таблице для каждого из рассматриваемых значений  $\alpha$  и  $h^0$  приводятся только наименьшие и наибольшие значения  $|x_8|$ ; первые отвечают минимальному значению параметра  $\beta$  из тех, для которых производились вычисления ( $\beta \approx 6 \cdot 10^{-8}$ ); для вторых  $\beta$  максимально ( $\beta \approx 1 - 6 \cdot 10^{-8}$ ). Так как при  $h^0 = 0.9$  величина  $\delta = 0.1$  равна глубине естественного потока и не может служить характеристикой подтопления, в соответствующих графах табл. 2 отсутствуют значения  $|x_{0.1}|$ . Для остальных же значений  $h^0$ , фигурирующих в таблице, координата  $|x_{0.1}|$  имеет порядок величины  $(\pi \alpha)^{-1}$ , определяющей расстояние точки пересечения водоупора с горизонтальной осью координат от канала.

4) В случае  $h = 0$  расчетные формулы непосредственно получаются из уравнений для общего случая, если положить в них  $q = 0$ . Проведенные расчеты подтверждают приближенные соотношения, предложенные С. Н. Нумеровым для координат  $L$  и  $H$  точки выхода свободной поверхности на водоупор в верховой части потока

$$L \approx -T \operatorname{ctg} \pi \alpha, \quad H \approx 0$$

Эти равенства указывают на то, что в рассматриваемом случае зона подтопления простирается до пересечения водоупора с горизонтальной осью координат, причем свободная поверхность в зоне подтопления является почти горизонтальной, а фильтрация практически отсутствует.

Поступила 19 IX 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П. Я. Теория движения грунтовых вод. М. Гостехиздат, 1952.
2. Н у м е р о в С. Н. О фильтрации к горизонтальной дрене в случае наклонного водоупора. Л.— М., Изв. Всес. Научн.-исслед. ин-та гидротехн. им. Б. Е. Веденеева, 1951, т. 46.
3. Д е м и д о в и ч Б. П., М а р о н И. Л. Основы вычислительной математики. М., Физматгиз, 1960.
4. К о с т я к о в А. Н., Ф а в о р и н Н. Н., А в е р ь я н о в С. Ф. Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод. М., Изд-во АН СССР, 1956.