

УДК 519.63

## Численное моделирование равновесия двухслойной упругой конструкции со сквозной трещиной\*

Е.М. Рудой, Н.А. Казаринов, В.Ю. Слесаренко

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090

E-mails: rem@hydro.nsc.ru (Рудой Е.М.), nkazarinov@gmail.com (Казаринов Н.А.), sl.slesarenko@gmail.com (Слесаренко В.Ю.)

**Рудой Е.М., Казаринов Н.А., Слесаренко В.Ю.** Численное моделирование равновесия двухслойной упругой конструкции со сквозной трещиной // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 1. — С. 77–90.

В работе рассматривается задача о равновесии двух упругих тел, склеенных друг с другом вдоль некоторой кривой. Считается, что на части этой кривой имеется сквозная трещина, на берегах которой задаются условия одностороннего ограничения, позволяющие исключить взаимное проникание берегов трещины друг в друга. Конструкция находится в равновесии под действием поверхностных сил. Основная цель статьи — построить и апробировать алгоритм численного решения задачи равновесия. Алгоритм основан на двух подходах: методе декомпозиции области и методе Удзавы для решения вариационных неравенств. Даны примеры численных вычислений, показывающие эффективность построенного алгоритма.

**DOI:** 10.15372/SJNM20170107

**Ключевые слова:** *двухслойная конструкция, трещина, условие непроникания, вариационное неравенство, метод декомпозиции области, алгоритм Удзавы.*

**Rudoy E.M., Kazarinov N.A., Slesarenko V.Yu.** Numerical simulation of the equilibrium of an elastic two-layer structure with a crack // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 1. — P. 77–90.

The equilibrium problem for two elastic bodies pasted together along some curve is considered. There exists a crack on a part of the curve. Nonlinear boundary conditions providing a mutual non-penetration between crack faces are set. The main objective of the paper is to construct and to approve an algorithm for the numerical solution of the equilibrium problem. The algorithm is based on the two approaches: the domain decomposition method and the Uzawa method. The numerical experiment illustrates the efficiency of the algorithm.

**Keywords:** *two-layer structure, crack, non-penetration condition, variational inequality, domain decomposition method, Uzawa algorithm.*

---

## Введение

Рассматривается двухслойная конструкция из двух упругих слоев, которые склеены друг с другом вдоль некоторой линии. На части линии склейки имеется сквозная трещина, на которой задаются нелинейные краевые условия одностороннего ограничения, позволяющие исключить проникание берегов трещины друг в друга. Поведение каждого слоя конструкции моделируется в рамках плоской задачи теории упругости. При этом

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-11-10000).

перемещения слоев совпадают на линии склейки и на одинаковых берегах трещины. Конструкция находится в равновесии под действием сил, приложенных к внешним границам тел.

Рассматриваемая в работе задача относится к классу задач теории трещин с возможным контактом берегов. Исследование таких задач можно найти, например, в [1–9]. Работы [10–12] посвящены исследованию задач равновесия многослойных конструкций с трещинами. В частности, в [12] обоснована корректность и исследованы качественные свойства решения рассматриваемой в настоящей работе задачи. К сожалению, результаты, связанные с численным решением задач о равновесии многослойных конструкций с трещинами и условием непроникания, отсутствуют. Здесь отметим работы [13–18], в которых задачи теории трещин с условием непроникания решались численно.

Основная цель настоящей работы — создать эффективный алгоритм решения задачи о равновесии двухслойной конструкции со сквозной трещиной, на берегах которой задается условие непроникания. Для построения алгоритма используются два подхода: метод декомпозиции области, который широко применяется для численного решения различных задач механики сплошных сред (см., например, статьи [19–24]), и метод Удзавы [25, 26] для решения задач с односторонними ограничениями. Для этого сначала исходная область, в которой ищется решение, разбивается на две подобласти. Затем вводятся множители Лагранжа, которые “обеспечивают” выполнение условия непроникания берегов трещины и равенство перемещений двух слоев на линии склейки. В конце статьи приводятся примеры численного счета с использованием метода конечных элементов.

## 1. Постановка задачи

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  — ограниченная область с липшицевой границей  $\partial\Omega$  такая, что  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_D$ ,  $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$  и  $\text{meas } \Gamma_D > 0$ . Пусть  $\gamma_c \subset \Omega$  — гладкая кривая без самопересечений,  $\bar{\gamma}_c \cap \bar{\Gamma}_D = \emptyset$ . Предположим, что кривая  $\Sigma$  делит область  $\Omega$  на две подобласти:  $\Omega_-$  и  $\Omega_+$  с липшицевыми границами  $\partial\Omega_-$  и  $\partial\Omega_+$  соответственно. При этом выполняются следующие условия:

$$\bar{\gamma}_c \subset \Sigma, \quad \text{meas}(\Sigma \setminus \bar{\gamma}_c) > 0, \quad \text{meas}(\partial\Omega_{\pm} \cap \Gamma_D) > 0.$$

Выберем единичный вектор нормали  $\nu$  к  $\Sigma$  таким образом, чтобы  $\nu$  являлся внешним единичным вектором нормали к  $\Omega_-$ . Следовательно, вектор  $(-\nu)$  — единичный вектор нормали к  $\Omega_+$  на  $\Sigma$ . Обозначим через  $\tau$  единичный касательный вектор на  $\Sigma$ . Кроме того, обозначим через  $\gamma_c^{\pm}$  берег кривой  $\gamma$ , принадлежащий границе подобласти  $\Omega_{\pm}$  соответственно.

Введем обозначения  $\Omega_{\Sigma} = \Omega \setminus \bar{\Sigma}$  и  $\Omega_c = \Omega \setminus \bar{\gamma}_c$  и рассмотрим следующую краевую задачу. Для заданных векторов  $f, g \in L_2(\Gamma_N)^2$  требуется найти вектор-функции  $u = (u_1, u_2)$  и  $v = (v_1, v_2)$  такие, что

$$-\sigma_{ij,j}(u) = 0, \quad -\sigma_{ij,j}(v) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_{\Sigma}, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$u_i = 0, \quad v_i = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_D, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}n_j = f_i, \quad p_{ij}n_j = g_i \quad \text{на} \quad \Gamma_N, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

$$u_i = v_i, \quad [\sigma_{ij}\nu_j + p_{ij}\nu_j] = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma \setminus \bar{\gamma}_c, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

$$[u_j]\nu_j \geq 0 \quad \text{на} \quad \gamma_c, \quad (5)$$

$$u_i = v_i \quad \text{на} \quad \gamma_c^{\pm}, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

$$[\sigma_{\nu}(u) + p_{\nu}(v)] = 0, \quad (\sigma_{\nu}(u) + p_{\nu}(v))[u_j]\nu_j = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_c, \quad (7)$$

$$\sigma_\tau(u) + p_\tau(v) = 0, \quad \sigma_\nu(u) + p_\nu(v) \leq 0 \quad \text{на} \quad \gamma_c^\pm. \quad (8)$$

Здесь  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2)$  — перемещения двух упругих тел (слоев);  $\sigma(u) = \{\sigma_{ij}(u)\}$  и  $p(u) = \{p_{ij}(u)\}$  — тензоры напряжений упругих слоев;  $[w] = w|_{\gamma_c^+} - w|_{\gamma_c^-}$  — скачок функции  $w$  на  $\gamma_c$ ;  $n$  — внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ ;  $\sigma_\nu(u) = \sigma_{ij}(u)\nu_i\nu_j$ ;  $\sigma_\tau(u) = \sigma_{ij}(u)\nu_i\tau_j$ . Нижние индексы после запятой обозначают операцию дифференцирования по соответствующим координатам. По повторяющимся индексам производится суммирование. Аналогично  $\sigma_\nu(u)$  и  $\sigma_\tau(u)$  определяются величины  $p_\nu(v)$  и  $p_\tau(v)$ .

Пусть  $A = \{a_{ijkl}\}$ ,  $B = \{b_{ijkl}\}$  ( $i, j, k, l = 1, 2$ ) — заданные тензоры коэффициентов упругости, удовлетворяющие стандартным свойствам симметрии и положительной определенности. Считаем, что в упругих слоях выполняется линейный закон Гука:

$$\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u), \quad p_{ij}(v) = b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(v), \quad i, j = 1, 2,$$

где  $\varepsilon(w) = \{\varepsilon_{ij}(w)\}$  — линейный тензор деформаций,

$$\varepsilon_{ij}(w) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad i, j = 1, 2.$$

Задача (1)–(8) описывает положение равновесия двух упругих тел, которые спаяны друг с другом по кривой  $\Sigma$  и жестко закреплены на  $\Gamma_D$ . При этом на  $\gamma_c$  (части кривой  $\Sigma$ ) имеется сквозная трещина, на которой выполнены условия непроникания ее берегов.

## 2. Вариационная формулировка задачи

Сформулируем задачу (1)–(8) в вариационном виде. Для этого определим функционал энергии

$$\Pi(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_c} (\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u) + p_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)) dx - \int_{\Gamma_N} (f_i u_i + g_i v_i) ds$$

и введем множество допустимых смещений

$$K = \left\{ (u, v) \in H \mid [u_j]\nu_j \geq 0 \text{ п.в. на } \gamma_c, \quad u = v \text{ на } \gamma_c^\pm, \quad u = v \text{ на } \Sigma \setminus \bar{\gamma}_c \right\},$$

где

$$H = H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^2 \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^2, \\ H_{\Gamma_D}^1(\Omega)^2 = \left\{ w \in H^1(\Omega_c)^2 \mid w_1 = w_2 = 0 \text{ п.в. на } \Gamma_D \right\}.$$

Краевую задачу (1)–(8) будем формулировать как задачу минимизации: найти пару функций  $(u, v) \in K$ , минимизирующую функционал энергии  $\Pi$  на множестве  $K$ :

$$\Pi(u, v) = \inf_{\bar{u}, \bar{v} \in K} \Pi(\bar{u}, \bar{v}). \quad (9)$$

Известно (см., например, [12]), что задача (9) имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\int_{\Omega_c} (\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(\bar{u} - u) + p_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(\bar{v} - v)) dx \geq \int_{\Gamma_N} (f_i(\bar{u}_i - u_i) + g_i(\bar{v}_i - v_i)) ds \quad \forall (\bar{u}, \bar{v}) \in K.$$

В работе [12] также показано, что дифференциальная (1)–(8) и вариационная (9) формулировки задачи равновесия эквивалентны.

### 3. Декомпозиция области

Определим следующие функциональные пространства:

$$U^\pm = \{u^\pm \in H^1(\Omega_\pm)^2 \mid u_1^\pm = u_2^\pm = 0 \text{ п. в. на } \partial\Omega_\pm \cap \Gamma_D\},$$

$$V^\pm = \{v^\pm \in H^1(\Omega_\pm)^2 \mid v_1^\pm = v_2^\pm = 0 \text{ п. в. на } \partial\Omega_\pm \cap \Gamma_D\}.$$

Затем определим множество  $K_{gc} \subset U^- \times U^+ \times V^- \times V^+$  следующим образом:

$$K_{gc} = \left\{ (u^-, u^+, v^-, v^+) \in U^- \times U^+ \times V^- \times V^+ \mid \begin{aligned} &(u^+ - u^-)\nu \geq 0 \text{ п. в. на } \gamma_c, \\ &u^- - u^+ = 0 \text{ на } \Sigma \setminus \bar{\gamma}_c, \quad u^- - v^- = 0, \quad u^+ - v^+ = 0 \text{ п. в. на } \Sigma \end{aligned} \right\}.$$

Так как мы считаем, что  $\text{meas}(\partial\Omega_\pm \cap \Gamma_D) > 0$ , то в силу неравенства Корна норму в пространствах  $U^\pm, V^\pm$  можно определить по следующей формуле:

$$\|w^\pm\|^2 = \int_{\Omega_\pm} \sigma_{ij}(w^\pm) \varepsilon_{ij}(w^\pm) dx,$$

где  $w^\pm$  принадлежит пространствам  $U^\pm$  или  $V^\pm$ .

На  $U^\pm$  и  $V^\pm$  определим соответствующие функционалы энергии  $\Pi_\pm(u^\pm)$  и  $\Pi_\pm(v^\pm)$  и рассмотрим следующую задачу минимизации: найти функции  $(u^-, u^+, v^-, v^+) \in K_{gc}$  такие, что

$$\begin{aligned} &\Pi_-(u^-) + \Pi_+(u^+) + \Pi_-(v^-) + \Pi_+(v^+) \\ &= \inf_{(\bar{u}^-, \bar{u}^+, \bar{v}^-, \bar{v}^+) \in K_{gc}} \left( \Pi_-(u^-) + \Pi_+(u^+) + \Pi_-(v^-) + \Pi_+(v^+) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Справедлива следующая теорема (см., например, [13, 14]).

**Теорема 1.** *Задача (10) имеет единственное решение  $(u^-, u^+, v^-, v^+) \in K_{gc}$ . Кроме того,*

$$u^\pm = u \mid_{\Omega_\pm}, \quad v^\pm = v \mid_{\Omega_\pm},$$

где  $(u, v)$  — решение задачи (9).

### 4. Сведение к задаче об отыскании седловой точки

Для произвольного числа  $p > 0$  определим следующие множества:

$$U_p^\pm = \{u^\pm \in U^\pm \mid \|u^\pm\|_{U^\pm} \leq p\},$$

$$V_p^\pm = \{v^\pm \in V^\pm \mid \|v^\pm\|_{V^\pm} \leq p\},$$

$$\Lambda_p^c = \{\lambda^c \in L_2(\gamma_c) \mid 0 \leq \lambda^c \leq p \text{ п. в. на } \gamma_c\},$$

$$\Lambda_p^g = \{\lambda^g \in L_2(\Sigma \setminus \bar{\gamma}_c)^2 \mid -p \leq \lambda_1^g, \lambda_2^g \leq p \text{ п. в. на } \Sigma \setminus \bar{\gamma}_c\},$$

$$\Lambda_p^- = \{\lambda^- \in L_2(\Sigma)^2 \mid -p \leq \lambda_1^-, \lambda_2^- \leq p \text{ п. в. на } \Sigma\},$$

$$\Lambda_p^+ = \{\lambda^+ \in L_2(\Sigma)^2 \mid -p \leq \lambda_1^+, \lambda_2^+ \leq p \text{ п. в. на } \Sigma\}.$$

На множестве  $U_p^- \times U_p^+ \times V_p^- \times V_p^+ \times \Lambda_p^c \times \Lambda_p^g \times \Lambda_p^- \times \Lambda_p^+$  определим функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} L(u^-, u^+, v^-, v^+, \lambda^c, \lambda^g, \lambda^-, \lambda^+) &= \Pi_-(u^-) + \Pi_+(u^+) + \Pi_-(v^-) + \Pi_+(v^+) + \int_{\gamma_c} \lambda^c (u_i^- - u_i^+) \nu_i ds + \\ &\int_{\Sigma \setminus \bar{\gamma}_c} \lambda_i^g (u_i^- - u_i^+) ds + \int_{\Sigma} \lambda_i^- (u_i^- - v_i^-) ds + \int_{\Sigma} \lambda_i^+ (u_i^+ - v_i^+) ds, \end{aligned}$$

с которой свяжем семейство задач об отыскании седловой точки Лагранжиана  $L$ : найти функции  $(u_p^-, u_p^+, v_p^-, v_p^+, \mu_p^c, \mu_p^g, \mu_p^-, \mu_p^+) \in U_p^- \times U_p^+ \times V_p^- \times V_p^+ \times \Lambda_p^c \times \Lambda_p^g \times \Lambda_p^- \times \Lambda_p^+$  такие, что

$$\begin{aligned} L(u_p^-, u_p^+, v_p^-, v_p^+, \mu_p^c, \mu_p^g, \mu_p^-, \mu_p^+) &\leq L(\bar{u}^-, \bar{u}^+, \bar{v}^-, \bar{v}^+, \mu_p^c, \mu_p^g, \mu_p^-, \mu_p^+) \\ &\leq L(\bar{u}^-, \bar{u}^+, \bar{v}^-, \bar{v}^+, \mu_p^c, \mu_p^g, \mu_p^-, \mu_p^+) \end{aligned} \quad (11)$$

для всех  $(\bar{u}^-, \bar{u}^+, \bar{v}^-, \bar{v}^+, \mu_p^c, \mu_p^g, \mu_p^-, \mu_p^+) \in U_p^- \times U_p^+ \times V_p^- \times V_p^+ \times \Lambda_p^c \times \Lambda_p^g \times \Lambda_p^- \times \Lambda_p^+$ .

Отметим, что множитель Лагранжа  $\lambda^c$  “обеспечивает” выполнение условия непроникания на трещине  $\gamma_c$ , множители  $\lambda^\pm$  — условие склейки двух тел вдоль кривой  $\Sigma$ , а  $\lambda^g$  — условие склейки двух подобластей  $\Omega_-$  и  $\Omega_+$ , на которые разбивается область  $\Omega$ .

Далее, в силу того факта, что множества  $U_p^\pm, V_p^\pm, \Lambda_p^c, \Lambda_p^g, \Lambda_p^\pm$  являются выпуклыми замкнутыми и ограниченными в соответствующих банаховых пространствах, Лагранжиан  $L$  — выпуклый и полунепрерывный снизу по  $(u^-, u^+, v^-, v^+)$  и вогнутый и полунепрерывный сверху по  $(\lambda^c, \lambda^g, \lambda^-, \lambda^+)$ , задача (11) имеет решение для всех  $p > 0$ . Кроме того, справедливы следующие теоремы.

**Теорема 2.** *Существует константа  $c$  такая, что для всех  $p > c$  седловая точка  $(u_p^-, u_p^+, v_p^-, v_p^+, \mu_p^c, \mu_p^g, \mu_p^-, \mu_p^+)$  удовлетворяет следующей системе вариационных равенств и неравенств:*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_-} \sigma_{ij}(u_p^-) \varepsilon_{ij}(\bar{u}^-) dx + \int_{\gamma_c} \mu_p^c \bar{u}_i^- \nu_i ds + \int_{\Sigma \setminus \bar{\gamma}_c} \mu_{pi}^g \bar{u}_i^- ds + \int_{\Sigma} \mu_{pi}^- \bar{u}_i^- ds &= \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_-} f_i \bar{u}_i^- ds \quad \forall \bar{u}^- \in U^-, \\ \int_{\Omega_+} \sigma_{ij}(u_p^+) \varepsilon_{ij}(\bar{u}^+) dx - \int_{\gamma_c} \mu_p^c \bar{u}_i^+ \nu_i ds - \int_{\Sigma \setminus \bar{\gamma}_c} \mu_{pi}^g \bar{u}_i^+ ds + \int_{\Sigma} \mu_{pi}^+ \bar{u}_i^+ ds &= \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_+} f_i \bar{u}_i^+ ds \quad \forall \bar{u}^+ \in U^+, \\ \int_{\Omega_-} p_{ij}(v_p^-) \varepsilon_{ij}(\bar{v}^-) dx - \int_{\Sigma} \mu_{pi}^- \bar{v}_i^- ds &= \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_-} g_i \bar{v}_i^- ds \quad \forall \bar{v}^- \in V^-, \\ \int_{\Omega_+} p_{ij}(v_p^+) \varepsilon_{ij}(\bar{v}^+) dx - \int_{\Sigma} \mu_{pi}^+ \bar{v}_i^+ ds &= \int_{\Gamma_N \cap \partial \Omega_+} g_i \bar{v}_i^+ ds \quad \forall \bar{v}^+ \in V^+, \\ \int_{\gamma_c} \lambda^c (u_{pi}^- - u_{pi}^+) \nu_i ds &\leq \int_{\gamma_c} \mu_p^c (u_{pi}^- - u_{pi}^+) \nu_i ds \quad \forall \lambda^c \in \Lambda_p^c, \\ \int_{\Sigma \setminus \bar{\gamma}_c} \lambda_i^g (u_{pi}^- - u_{pi}^+) ds &\leq \int_{\Sigma \setminus \bar{\gamma}_c} \mu_{pi}^g (u_{pi}^- - u_{pi}^+) ds \quad \forall \lambda^g \in \Lambda_p^g, \end{aligned}$$

$$\int_{\Sigma} \lambda_i^-(u_{pi}^- - v_{pi}^-) ds \leq \int_{\Sigma} \mu_{pi}^-(u_{pi}^- - v_{pi}^-) ds \quad \forall \lambda^- \in \Lambda_p^-,$$

$$\int_{\Sigma} \lambda_i^+(u_{pi}^+ - v_{pi}^+) ds \leq \int_{\Sigma} \mu_{pi}^+(u_{pi}^+ - v_{pi}^+) ds \quad \forall \lambda^+ \in \Lambda_p^+.$$

**Теорема 3.** При  $p \rightarrow \infty$  имеет место сходимость

$$(u_p^-, u_p^+, v_p^-, v_p^+) \rightarrow (u^-, u^+, v^-, v^+) \quad \text{сильно в } U^- \times U^+ \times V^- \times V^+.$$

Доказательство теоремы 2 и теоремы 3 аналогично доказательству теорем из работ [13, 14, 24], в которых предложен метод декомпозиции области для различных моделей упругих тел с трещинами с возможным контактом берегов.

Кроме того, из [13, 14] следует следующая оценка:

$$0 \leq \int_{\gamma_c} h_+((u_{pi}^- - u_{pi}^+) \nu_i) ds + \int_{\Sigma \setminus \bar{\gamma}_c} (h_+(u_{pi}^- - u_{pi}^+) + h_-(u_{pi}^- - u_{pi}^+)) ds +$$

$$\int_{\Sigma} (h_+(u_{pi}^- - v_{pi}^-) + h_-(u_{pi}^- - v_{pi}^-)) ds + \int_{\Sigma} (h_+(u_{pi}^+ - v_{pi}^+) + h_-(u_{pi}^+ - v_{pi}^+)) ds \leq \frac{K}{p}, \quad (12)$$

где  $K$  — некоторая константа, зависящая от функций  $f$  и  $g$ ;  $h_+$  и  $h_-$  имеют вид

$$h_+(w)(x) = \begin{cases} w(x), & \text{если } v(x) \geq 0, \\ 0, & \text{если } w(x) < 0, \end{cases} \quad h_-(w)(x) = h_+(w)(x) - w(x).$$

Заметим, что если, например,  $h_+(u_{pi}^- - u_{pi}^+) > 0$  в некоторой точке  $x \in \Sigma \setminus \bar{\gamma}_c$ , то в этой точке подобласти  $\Omega_-$  и  $\Omega_+$  “расходятся”, а условие  $h_-(u_{pi}^+ - v_{pi}^+) > 0$  говорит о том, что в точке  $x$  происходит “нахлест” подобластей  $\Omega_-$  и  $\Omega_+$ . Таким образом, оценка (12) позволяет судить о точности аппроксимации решения задачи (10) решениями семейства задач об отыскании седловых точек (11).

## 5. Итерационный алгоритм решения задачи

Пусть  $p > c$ , где  $c$  — константа из теоремы 2. Через  $P_{\Lambda_p^c}$  и  $P_{\Lambda_p^\pm}$  обозначим операторы проектирования на множества  $\Lambda_p^c$ ,  $\Lambda_p^g$  и  $\Lambda_p^\pm$  соответственно, которые в пространствах  $L_2(\gamma_c)$ ,  $L_2(\Sigma \setminus \bar{\gamma}_c)^2$  и  $L_2(\Sigma)^2$  имеют простой вид:

$$P_{\Lambda_p^c} w(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } w(x) \leq 0, \\ w(x), & \text{если } 0 < w(x) < p, \\ p, & \text{если } w(x) \geq p, \end{cases}$$

$$P_{\Lambda_p^g}(w_1, w_2) = P_{\Lambda_p^\pm}(w_1, w_2) = (P(w_1), P(w_2)),$$

где

$$P(w_i)(x) = \begin{cases} -p, & \text{если } w_i(x) \leq -p, \\ w_i(x), & \text{если } -p < w_i(x) < p, \\ p, & \text{если } w_i(x) \geq p, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Для решения задачи (11), аппроксимирующей задачу (1)–(8), предлагается следующий алгоритм Удзавы.

Алгоритм

1. Итерация  $k = 0$ . Задаем произвольно  $\mu^{c,0} \in \Lambda_p^c$ ,  $\mu^{g,0} \in \Lambda_p^g$ ,  $\mu^{-,0} \in \Lambda_p^-$ ,  $\mu^{+,0} \in \Lambda_p^+$ .
2. Для каждого  $k \geq 0$  находим  $(u^{-,k}, u^{+,k}, v^{-,k}, v^{+,k})$  как решение следующих линейных задач:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_-} \sigma_{ij}(u^{-,k}) \varepsilon_{ij}(\bar{u}^-) dx + \int_{\gamma_c} \mu^{c,k} \bar{u}_i^- \nu_i ds + \int_{\Sigma \setminus \bar{\gamma}_c} \mu_{pi}^{g,k} \bar{u}_i^- ds + \int_{\Sigma} \mu_i^{-,k} \bar{u}_i^- ds \\ = \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_-} f_i \bar{u}_i^- ds \quad \forall \bar{u}^- \in U^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_+} \sigma_{ij}(u^{+,k}) \varepsilon_{ij}(\bar{u}^+) dx - \int_{\gamma_c} \mu^{c,k} \bar{u}_i^+ \nu_i ds - \int_{\Sigma \setminus \bar{\gamma}_c} \mu_{pi}^{g,k} \bar{u}_i^+ ds + \int_{\Sigma} \mu_i^{+,k} \bar{u}_i^+ ds \\ = \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_+} f_i \bar{u}_i^+ ds \quad \forall \bar{u}^+ \in U^+, \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_-} p_{ij}(v^{-,k}) \varepsilon_{ij}(\bar{v}^-) dx - \int_{\Sigma} \mu_i^{-,k} \bar{v}_i^- ds = \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_-} g_i \bar{v}_i^- ds \quad \forall \bar{v}^- \in V^-,$$

$$\int_{\Omega_+} p_{ij}(v^{+,k}) \varepsilon_{ij}(\bar{v}^+) dx - \int_{\Sigma} \mu_i^{+,k} \bar{v}_i^+ ds = \int_{\Gamma_N \cap \partial\Omega_+} g_i \bar{v}_i^+ ds \quad \forall \bar{v}^+ \in V^+.$$

3. Определяем  $\mu^{c,k+1}$ ,  $\mu^{-,k+1}$ ,  $\mu^{+,k+1}$  по формулам:

$$\begin{aligned} \mu^{c,k+1} &= P_{\Lambda_p^c} \left( \mu^{c,k} + \theta(u_i^{-,k} - u_i^{+,k}) \nu_i \right), \\ \mu^{g,k+1} &= P_{\Lambda_p^g} \left( \mu^{g,k} + \theta(u^{-,k} - u^{+,k}) \right), \\ \mu^{-,k+1} &= P_{\Lambda_p^-} \left( \mu^{-,k} + \theta(u^{-,k} - v^{-,k}) \right), \\ \mu^{+,k+1} &= P_{\Lambda_p^+} \left( \mu^{+,k} + \theta(u^{+,k} - v^{+,k}) \right). \end{aligned}$$

4. Стоп или полагаем  $k = k + 1$  и переходим на 2.

Сходимость последовательности  $(u^{-,k}, u^{+,k}, v^{-,k}, v^{+,k})$  к решению  $(u_p^-, u_p^+, v_p^-, v_p^+)$  регуляризованной задачи (11) при  $k \rightarrow \infty$  следует из общих теорем о сходимости алгоритма типа Удзавы (см., например, [25, 26]). Поэтому справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** Существует число  $\theta^* > 0$  такое, что для всех  $\theta \in (0, \theta^*)$  последовательность  $(u^{-,k}, u^{+,k}, v^{-,k}, v^{+,k})$  сильно сходится к  $(u_p^-, u_p^+, v_p^-, v_p^+)$  в  $U^- \times U^+ \times V^- \times V^+$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**Замечание.** Значение  $\theta^*$  зависит от норм операторов следа, действующих из  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega_{\pm})$  в  $L_2(\Sigma)$ .

## 6. Примеры и численное решение

Пусть  $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$  — квадратная область, которая разбивается на две под-области следующим образом:

$$\Omega_- = (-1, 1) \times (-1, 0), \quad \Omega_+ = (-1, 1) \times (0, 1)$$

с общей границей

$$\Sigma = (-1, 1) \times \{0\}.$$

Будем считать, что  $\gamma_c = (-1/2, 1/2) \times \{0\}$  — трещина, лежащая на  $\Sigma$ . Считаем, что на

$$\Gamma_D = (\{-1\} \cup \{1\}) \times (-1, 1)$$

оба тела фиксированы. Обозначим через  $\Gamma_N^+ = (-1, 1) \times \{1\}$  и  $\Gamma_N^- = (-1, 1) \times \{-1\}$  верхнюю и нижнюю границы квадрата  $\Omega$  соответственно.

Будем считать, что оба тела изотропно однородны, т. е. справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(u) &= (2\mu_1 + \lambda_1)\varepsilon_{11}(u) + \lambda_1\varepsilon_{22}(u), & p_{11}(v) &= (2\mu_2 + \lambda_2)\varepsilon_{11}(v) + \lambda_2\varepsilon_{22}(v), \\ \sigma_{12}(u) &= \sigma_{21}(u) = 2\mu_1\varepsilon_{12}(u), & p_{12}(v) &= p_{21}(v) = 2\mu_2\varepsilon_{12}(v), \\ \sigma_{22}(u) &= \lambda_1\varepsilon_{11}(u) + (2\mu_1 + \lambda_1)\varepsilon_{22}(u), & p_{22}(v) &= \lambda_2\varepsilon_{11}(v) + (2\mu_2 + \lambda_2)\varepsilon_{22}(v), \end{aligned}$$

где

$$\mu_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}, \quad \lambda_i = \frac{2\nu_i\mu_i}{1 - 2\nu_i}, \quad i = 1, 2.$$

Возьмем следующие значения параметров материалов:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 0.28, & E_1 &= 200 \text{ ГПа}, \\ \nu_2 &= 0.32, & E_2 &= 112 \text{ ГПа}. \end{aligned}$$

Во всех численных экспериментах мы считаем, что  $p = 10^7$ . Кроме того, в качестве критерия остановки алгоритма выберем следующий:

$$\max \left( \frac{\|u^{-,k} - u^{-,k-1}\|_{U^-}}{\|u^{-,k}\|_{U^-}^2}, \frac{\|u^{+,k} - u^{+,k-1}\|_{U^+}}{\|u^{+,k}\|_{U^+}^2}, \frac{\|v^{-,k} - v^{-,k-1}\|_{V^-}}{\|v^{-,k}\|_{V^-}^2}, \frac{\|v^{+,k} - v^{+,k-1}\|_{V^+}}{\|v^{+,k}\|_{V^+}^2} \right) < 10^{-6}.$$

Пространства  $U^{\pm}$  и  $V^{\pm}$  аппроксимируются конечно-элементными пространствами, состоящими из кусочно-линейных функций, — P1-элементы Лагранжа [27, 28].



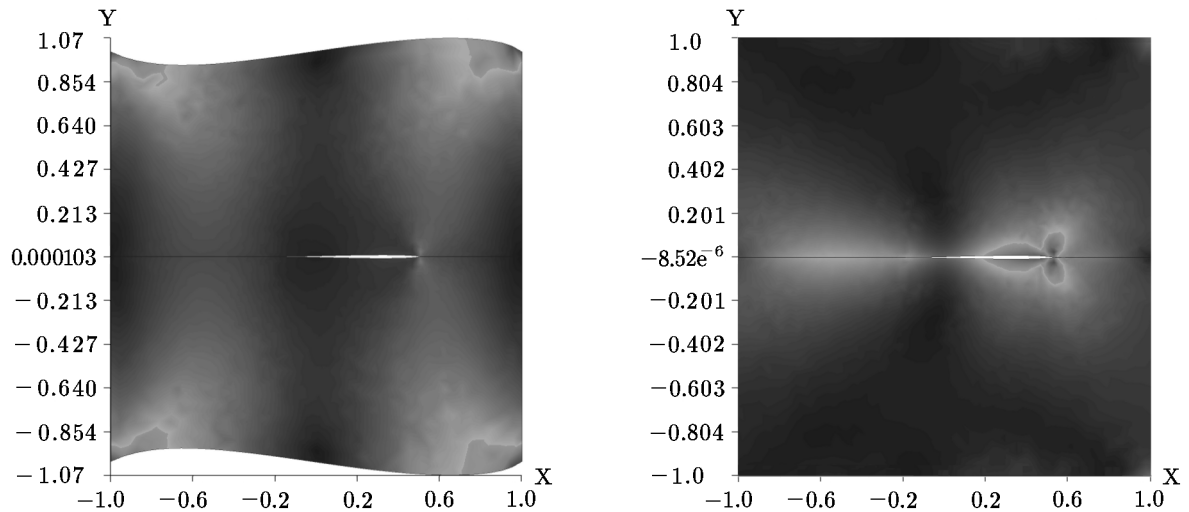
**Пример 1.** *Частичное смыкание берегов трещины.* Будем считать, что к первому телу (материальные параметры с индексом 1) приложена внешняя нагрузка  $f = 10^{-3}\mu_1x$  на  $\Gamma_N^-$  и  $f = -10^{-3}\mu_1x$  на  $\Gamma_N^+$ , в то время как другое тело свободно от нагрузок, т.е.  $g = 0$  на  $\Gamma_N^- \cup \Gamma_N^+$ .

Обозначим через  $P$  число вершин треугольников, лежащих на  $\Sigma$ , через  $M$  — число вершин треугольников на внешней границе  $\partial\Omega$ . Положим  $\theta = 65$ . В таблице 1 приведены результаты выполнения алгоритма, приведенного в п. 5, для различных триангуляций подобластей  $\Omega_-$  и  $\Omega_+$ :  $h_{\min}^\pm$  и  $h_{\max}^\pm$  обозначают минимальный и максимальный размер ячейки триангуляции,  $Nod^\pm$  — число вершин треугольников,  $Triang^\pm$  — число треугольников в областях  $\Omega_\pm$ ,  $iter$  — количество итераций алгоритма до достижения условия останова.

**Таблица 1.** Результаты вычислений

$P$	$M$	$h_{\min}^-$	$h_{\max}^-$	$h_{\min}^+$	$h_{\max}^+$	$Nod^-$	$Triang^-$	$Nod^+$	$Triang^+$	$iter$
12	32	0.172	0.358	0.202	0.358	68	106	67	104	843
24	48	0.081	0.260	0.085	0.239	163	276	164	268	1164
48	80	0.041	0.155	0.041	0.151	498	906	498	906	1416
96	144	0.018	0.084	0.021	0.086	1733	3296	1716	3262	1909
200	256	0.0091	0.045	0.0098	0.047	6056	11782	6133	11936	2402

На рисунке 1 изображены деформированные тела с увеличивающим коэффициентом 500 по обеим осям и распределения напряжений Мизеса (слева — тело, к которому приложены нагрузки, справа — тело без нагрузок).



**Рис. 1.** Частичное смыкание берегов трещины

На рис. 2 приведены графики зависимостей числа итераций от значения параметра релаксации  $\theta$  для двух разбиений области  $\Omega$ :  $P/M = 12/32$  (график mesh1) и  $P/M = 48/80$  (график mesh2). Из графиков видно, что при увеличении  $\theta$  количество итераций уменьшается. При этом для первой сетки (mesh1) алгоритм начинает расходиться при  $\theta = 78$ , а для второй сетки (mesh2) алгоритм расходится уже при  $\theta = 75$ . Кроме того, отметим, что для значений параметра  $\theta < 10$  алгоритм сходится, но число итераций значительно возрастает.

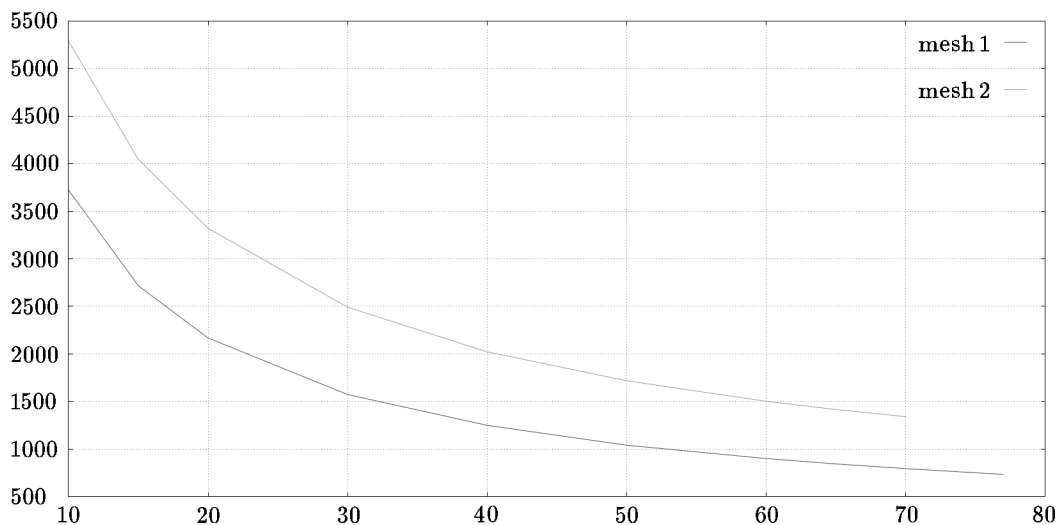


Рис. 2. График зависимости количества итераций от параметра  $\theta$

Таким образом, сравнивая два графика, можно дать следующие рекомендации для выбора оптимального значения параметра релаксации  $\theta$ : сначала необходимо протестировать алгоритм на грубой сетке, при которой время вычислений значительно меньше, а затем использовать полученное значения параметра  $\theta$  на мелкой сетке.

Во введение говорилось, что в случае линейных краевых условий на берегах трещины возможно получать такие решения, при которых берега трещины проникают друг в друга. На рис. 3 изображено деформированное тело (слева — область после деформации и распределения напряжений Мизеса, справа — график скачка вдоль линии склейки тел  $\Sigma$ ), к которому приложена та же нагрузка, но без выполнения условия непроникания берегов трещины. Триангуляция области соответствует значениям параметров  $P = 96$ ,  $M = 144$ , при этом количество итераций  $iter = 1931$ .

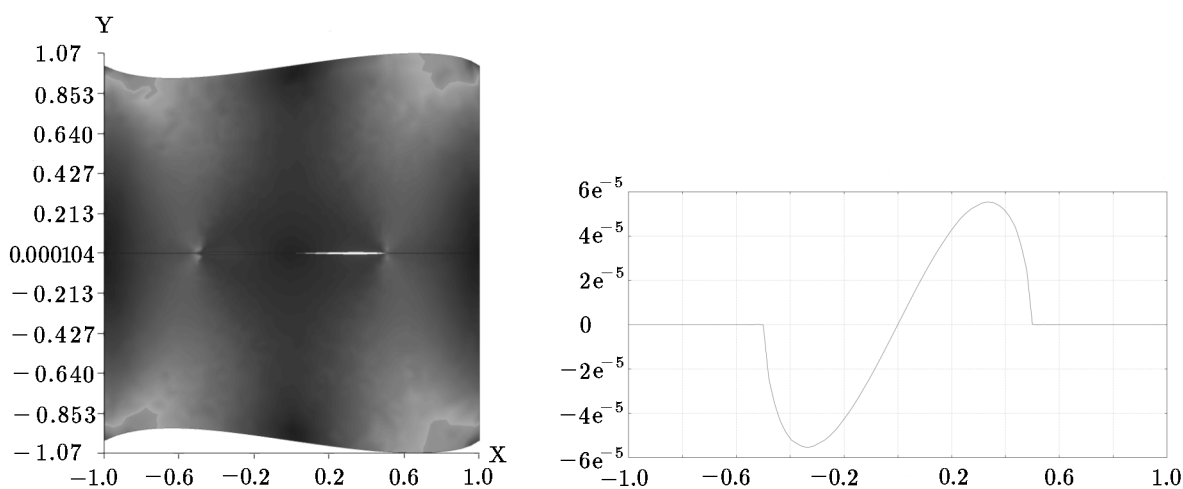


Рис. 3. Линейная задача

**Пример 2.** Полное раскрытие берегов трещины. Будем считать, что на  $\Gamma_N^\pm$  приложены следующие силы: для первого тела  $f = -10^{-3}\mu_1$  на  $\Gamma_N^-$  и  $f = 10^{-3}\mu_1$  на  $\Gamma_N^+$ ; второе тело свободно от нагрузок, т. е.  $g = 0$  на  $\Gamma_N^- \cup \Gamma_N^+$ .

Конфигурации тел после деформаций (с увеличивающимся коэффициентом 100 по обеим осям) и распределения напряжений Мизеса изображены на рис. 4 (слева — первое тело, справа — второе). В этом примере  $P = 96$ ,  $M = 144$ , количество итераций  $iter = 2113$ .

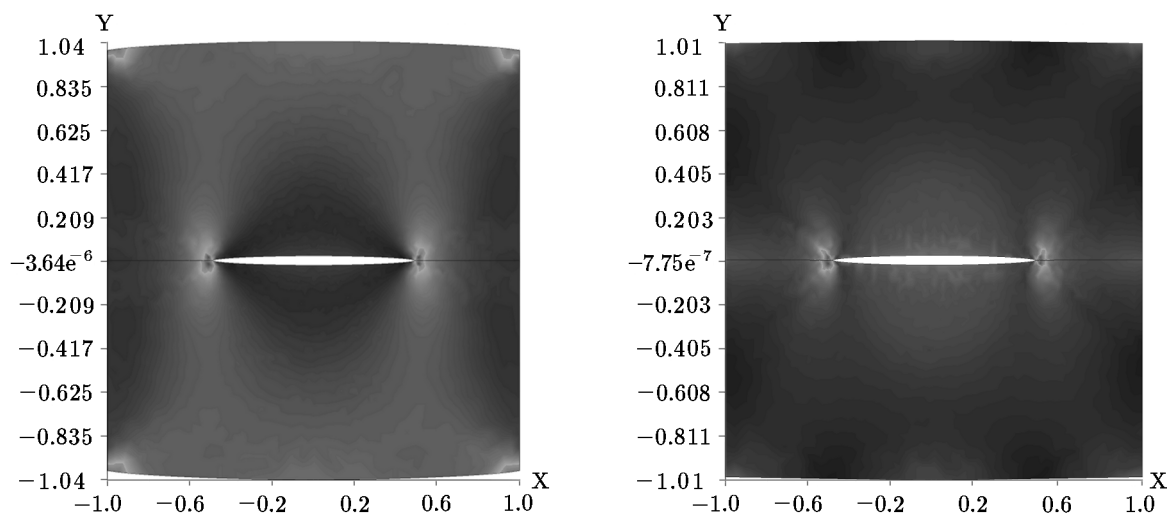


Рис. 4. Полное раскрытие берегов трещины

## Литература

1. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. — М.: Физматлит, 2010.
2. Khlodnev A.M., Kovtunen V.A. Analysis of Cracks in Solids. — Southampton, Boston: WIT-Press, 2000.
3. Khlodnev A.M., Kozlov V.A. Asymptotics of solutions near crack tips for Poisson equation with inequality type boundary conditions // Z. Angew. Math. Phys. — 2008. — Vol. 59. — P. 264–280.
4. Lazarev N.P., Rudoy E.M. Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition // Z. Angew. Math. Mech. — 2014. — Vol. 94, № 9. — P. 730–739.
5. Андерссон Л.-Э., Хлуднев А.М. Трещина, выходящая на контактную границу. Метод фиктивных областей и инвариантные интегралы // Сиб. журн. индустр. математики. — 2008. — Т. 11, № 3. — С. 15–29.
6. Knees D., Schröder A. Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints // Math. Meth. Appl. Sci. — 2012. — Vol. 35. — P. 1859–1884.
7. Rudoy E.M. Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body // Z. Angew. Math. Phys. — 2015. — Vol. 66, № 4. — P. 1923–1937.
8. Rudoy E.M. First-order and second-order sensitivity analyses for a body with a thin rigid inclusion // Math. Meth. Appl. Sci. — 2015. — (DOI: 10.1002/mma.3332).
9. Shcherbakov V.V. The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // Z. Angew. Math. Mech. — 2016. — (DOI: 10.1002/zamm.201500145).

10. **Khludnev A.M.** On crack problem with overlapping domain // *Z. Angew. Math. Mech.*—2008.— Vol. 88, № 8.— P. 650–660.
11. **Khludnev A.M.** Crack on the boundary of two overlapping domains // *Z. Angew. Math. Phys.*—2010.— Vol. 61.— P. 341–356.
12. **Хлуднев А.М.** О равновесии двухслойной упругой конструкции с трещиной // *Сиб. журн. индустр. математики.*—2013.— Т. 16, № 2.— С. 144–153.
13. **Рудой Е.М.** Метод декомпозиции области для модельной задачи теории трещин с возможным контактом берегов // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.*—2015.— Т. 55, № 2.— С. 310–321.
14. **Rudoy E.M.** Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition // *ESAIM: M2AN.*—2016.— Vol. 50, № 4.— P. 995–1009.
15. **Kovtunen V.A.** Numerical simulation of the non-linear crack problem with nonpenetration // *Math. Meth. Appl. Sci.*—2004.— Vol. 27, № 2.— P. 163–179.
16. **Hintermüller M., Kovtunen V., and Kunisch K.** The primal-dual active set method for a crack problem with non-penetration // *IMA J. Appl. Math.*—2004.— Vol. 69, № 1.— P. 1–26.
17. **Вторушин Е.В.** Численное исследование модельной задачи для уравнения Пуассона с ограничениями типа неравенств в области с разрезом // *Сиб. журн. индустр. математики.*—2005.— Т. 8, № 1.— С. 41–49.
18. **Вторушин Е.В.** Численное исследование модельной задачи деформирования упругопластического тела с трещиной при условии возможного контакта берегов // *Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.*—Новосибирск, 2006.— Т. 9, № 4.— С. 335–344.
19. **Quarteroni A., Valli A.** *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations.*—Clarendon Press, 1999.
20. **Лаевский Ю.М., Мацокин А.М.** Методы декомпозиции решения эллиптических и параболических краевых задач // *Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.*—Новосибирск, 1999.— Т. 2, № 4.— С. 361–372.
21. **Астрханцев Г.П.** Метод декомпозиции области для задачи об изгибе неоднородной пластины // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.*—1998.— Т. 38, № 10.— С. 1758–1766.
22. **Рукавишников А.В.** Метод декомпозиции области и численный анализ для одной задачи гидродинамики // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.*—2014.— Т. 54, № 9.— С. 1515–1536.
23. **Bayada G., Sabil J., and Sassi T.** Convergence of a Neumann–Dirichlet algorithm for two-body contact problems with non local Coulomb’s friction law // *ESAIM: M2AN.*—2008.— Vol. 42.— P. 243–262.
24. **Рудой Е.М.** Численное решение задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жестким включением // *Сиб. журн. индустр. математики.*—2016.— Т. 19, № 2.— С. 74–87.
25. **Ekeland I., Temam R.** *Convex Analysis and Variational Problems.*—SIAM, 1999.
26. **Ito K., Kunisch K.** *Lagrange Multiplier Approach to Variational Problems and Applications.*—SIAM, 2008.
27. **Allaire G.** *Numerical Analysis and Optimization: An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation.*—Oxford University Press, 2007.
28. **Сьярле Ф.** *Метод конечных элементов для математических задач.*—М.: Мир, 1980.

*Поступила в редакцию 28 апреля 2016 г.,  
в окончательном варианте 7 июня 2016 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Khudnev A.M.** Zadachi teorii uprugosti v nekladkikh oblastiakh. — М.: Fizmatlit, 2010.
2. **Khudnev A.M., Kovtunen V.A.** Analysis of Cracks in Solids. — Southampton, Boston: WIT-Press, 2000.
3. **Khudnev A.M., Kozlov V.A.** Asymptotics of solutions near crack tips for Poisson equation with inequality type boundary conditions // Z. Angew. Math. Phys. — 2008. — Vol. 59. — P. 264–280.
4. **Lazarev N.P., Rudoy E.M.** Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition // Z. Angew. Math. Mech. — 2014. — Vol. 94, № 9. — P. 730–739.
5. **Andersson L.-E., Khudnev A.M.** Treshchina, vykhodyashchaya na kontaktnuyu granicu. Metod fiktivnykh oblastey i invariantnye integraly // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2008. — Т. 11, № 3. — S. 15–29.
6. **Knees D., Schröder A.** Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints // Math. Meth. Appl. Sci. — 2012. — Vol. 35. — P. 1859–1884.
7. **Rudoy E.M.** Shape derivative of the energy functional in a problem for a thin rigid inclusion in an elastic body // Z. Angew. Math. Phys. — 2015. — Vol. 66, № 4. — P. 1923–1937.
8. **Rudoy E.M.** First-order and second-order sensitivity analyses for a body with a thin rigid inclusion // Math. Meth. Appl. Sci. — 2015. — (DOI: 10.1002/mma.3332).
9. **Shcherbakov V.V.** The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // Z. Angew. Math. Mech. — 2016. — (DOI: 10.1002/zamm.201500145).
10. **Khudnev A.M.** On crack problem with overlapping domain // Z. Angew. Math. Mech. — 2008. — Vol. 88, № 8. — P. 650–660.
11. **Khudnev A.M.** Crack on the boundary of two overlapping domains // Z. Angew. Math. Phys. — 2010. — Vol. 61. — P. 341–356.
12. **Khudnev A.M.** O ravnovesii dvukhsloynoy uprugoy konstrukcii s treshchinoy // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2013. — Т. 16, № 2. — S. 144–153.
13. **Rudoy E.M.** Metod dekompozicii oblasti dlya model'noy zadachi teorii treshchin s vozmozhnym kontaktom beregov // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2015. — Т. 55, № 2. — S. 310–321.
14. **Rudoy E.M.** Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition // ESAIM: M2AN. — 2016. — Vol. 50, № 4. — P. 995–1009.
15. **Kovtunen V.A.** Numerical simulation of the non-linear crack problem with nonpenetration // Math. Meth. Appl. Sci. — 2004. — Vol. 27, № 2. — P. 163–179.
16. **Hintermüller M., Kovtunen V., and Kunisch K.** The primal-dual active set method for a crack problem with non-penetration // IMA J. Appl. Math. — 2004. — Vol. 69, № 1. — P. 1–26.
17. **Vtorushin E.V.** Chislennoe issledovanie model'noy zadachi dlya uravneniya Puassona s ogranicheniyami tipa neravenstv v oblasti s razrezom // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2005. — Т. 8, № 1. — S. 41–49.
18. **Vtorushin E.V.** Chislennoe issledovanie model'noy zadachi deformirovaniya uprugoplasticheskogo tela s treshchinoy pri uslovii vozmozhnogo kontakta beregov // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2006. — Т. 9, № 4. — S. 335–344.
19. **Quarteroni A., Valli A.** Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. — Clarendon Press, 1999.
20. **Laevskiy Yu.M., Matsokin A.M.** Metody dekompozicii resheniya ellipticheskikh i parabolicheskikh kraevykh zadach // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 1999. — Т. 2, № 4. — S. 361–372.

21. **Astrkhancev G.P.** Metod dekompozicii oblasti dlya zadachi ob izgibe neodnorodnoy plastiny // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1998. — Т. 38, № 10. — S. 1758–1766.
22. **Rukavishnikov A.V.** Metod dekompozicii oblasti i chislennyy analiz dlya odnoy zadachi gidrodinamiki // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2014. — Т. 54, № 9. — S. 1515–1536.
23. **Bayada G., Sabil J., and Sassi T.** Convergence of a Neumann–Dirichlet algorithm for two-body contact problems with non local Coulomb’s friction law // ESAIM: M2AN. — 2008. — Vol. 42. — P. 243–262.
24. **Rudoy E.M.** Chislennoe reshenie zadachi o ravnovesii uprugogo tela s otsloivshimsya tonkim zhestkim vklyucheniem // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2016. — Т. 19, № 2. — S. 74–87.
25. **Ekeland I., Temam R.** Convex Analysis and Variational Problems. — SIAM, 1999.
26. **Ito K., Kunisch K.** Lagrange Multiplier Approach to Variational Problems and Applications. — SIAM, 2008.
27. **Allaire G.** Numerical Analysis and Optimization: An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation. — Oxford University Press, 2007.
28. **S’yarle F.** Metod konechnykh elementov dlya matematicheskikh zadach. — M.: Mir, 1980.