

- мерного проточного химического реактора с реакцией типа автокаталитической // ФГВ.— 1983.— Т. 19, № 1.
3. Рязанцев Ю. С., Шевцова В. М. О числе стационарных режимов адиабатического проточного химического реактора с автокаталитической реакцией // ФГВ.— 1984.— Т. 20, № 5.
 4. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.— М.: Мир, 1983.
 5. Марсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М.: Мир, 1980.
 6. Кафаров В. В. Методы кибернетики в химии и химической технологии.— М.: Химия, 1976.
 7. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.

г. Бийск

Поступила 11/XII 1989 г.

УДК 532.522:532.135

А. Р. Давыдов, В. М. Левин, В. П. Первадчук, Н. М. Труфанова

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ РАСПЛАВОВ ПОЛИМЕРОВ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАНАЛАХ

Одной из стадий технологического процесса производства многослойных пленок, бикомпонентных (в том числе и оптических) волокон является совместная экструзия двух или более расплавов полимеров через формирующий канал. При этом имеет место слоистое или стратифицированное течение [1]. Наиболее полно исследован участок установившегося стратифицированного течения, где профиль скорости потока и положение границ раздела слоев жидкостей неизменны по длине канала [1—4]. Меньшее число работ посвящено изучению начального участка совместного течения, где, как показано в эксперименте [5] и в теоретическом конечно-элементном анализе [6], координаты границы раздела существенно изменяются.

В данной работе предлагаются результаты численного исследования двухслойного течения несмешивающихся вязкоупругих жидкостей. Приводятся математическая модель течения, метод численной реализации и анализируются результаты расчетов.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассматривается стационарное осесимметричное двухслойное течение вязкоупругих жидкостей равных плотностей в цилиндрическом канале. В переменных вихрь ω и функция тока ψ , которые связаны с компонентами вектора скорости v_r и v_z так, что

$$\omega = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad v_z = \frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

дифференциальные уравнения, определяющие математическую модель течения, имеют вид [7]

$$(1.1) \quad \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] r^2 - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\omega}{r} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\omega}{r} \right) \right) + S_w r^2 = 0;$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \omega = 0,$$

где r, z — координаты; ρ — плотность; μ — вязкость полимеров.

В уравнении для напряженности вихря (1.1) источниковый член определяется выбранным реологическим уравнением состояния (РУС). Используем в качестве РУС модель Де Витта, предсказывающую аномалию вязкости жидкостей, а также появление в установившемся течении первой и второй разностей нормальных напряжений [1]:

$$(1.3) \quad \tau_{ij} + \lambda D_j \tau_{ij} / (D_j t) = \mu d_{ij}.$$

Здесь λ — время релаксации жидкостей; τ_{ij} , d_{ij} — компоненты тензора дивергента напряжений и тензора скоростей деформации; $D_J/D_J t$ — производная Яумана. С учетом (1.3) выражение для S_w запишем как

$$S_w = -2 \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial r \partial z} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2} \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] + \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (\lambda u_1) + \\ + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) (\lambda u_2) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\lambda u_3) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\lambda u_2) + \frac{1}{r^2} \lambda u_2,$$

где

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial r} (v_r (\tau_{rr} - \tau_{zz})) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z (\tau_{rr} - \tau_{zz})) + \frac{v_r}{r} (\tau_{rr} - \tau_{zz}) - 2\omega \tau_{rz},$$

$$u_2 = \frac{\partial}{\partial z} (v_z \tau_{rz}) + \frac{\partial}{\partial r} (v_r \tau_{rz}) + \frac{v_r}{r} \tau_{rz} + \frac{1}{2} \omega (\tau_{rr} - \tau_{zz}),$$

$$u_3 = \frac{\partial}{\partial z} (v_z (\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr})) + \frac{\partial}{\partial r} (v_r (\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr})) + \frac{v_r}{r} (\tau_{\theta\theta} - \tau_{rr}) + \omega \tau_{rz}.$$

Уравнения (1.1)–(1.3) будут справедливы для обеих жидкостей с учетом μ , λ и положения жидкости относительно границы раздела F . В неявной форме уравнение поверхности раздела имеет вид

$$(1.4) \quad F(r, z) = 0.$$

Математическую формулировку этого уравнения уточним после рассмотрения граничных условий задачи.

Будем считать, что на входе в зону совместного течения отдельные потоки жидкостей гидродинамически развиты, а на выходе канала выполняются условия установившегося двухслойного течения. Также выполняются условия осесимметричности течения, непроницаемости стенок канала и прилипания жидкости к ним.

На поверхности раздела предполагается равенство скоростей соприкасающихся жидких частиц и равенство напряжений, действующих со стороны первой и второй жидкости (влиянием поверхностного натяжения в виду его малости пренебрегаем) [8]:

$$(1.5) \quad \mathbf{v}^a = \mathbf{v}^b, \quad \mathbf{r} \in F;$$

$$(1.6) \quad \mathbf{S}_n^a = \mathbf{S}_n^b, \quad \mathbf{r} \in F$$

(\mathbf{v}^a и \mathbf{v}^b — векторы скоростей, а \mathbf{S}_n^a и \mathbf{S}_n^b — векторы напряжений на границе раздела жидкостей, ориентированной нормалью \mathbf{n}).

Условие (1.6) можно записать через компоненты тензоров напряжений в проекциях на нормаль \mathbf{n} и касательную \mathbf{t} к поверхности раздела:

$$(1.7) \quad [(-p^a \delta_{ij} + \tau_{ij}^a) n_i] n_i^T = [(-p^b \delta_{ij} + \tau_{ij}^b) n_i] n_i^T;$$

$$(1.8) \quad [(-p^a \delta_{ij} + \tau_{ij}^a) n_i] t_i^T = [(-p^b \delta_{ij} + \tau_{ij}^b) n_i] t_i^T.$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера; p^a , p^b — гидравлическое давление в слоях; n_i^T , t_i^T — транспонированные матрицы векторов.

Из условия (1.5) следует, что поверхность раздела есть поверхность тока. Величину функции тока на ней определим из условий постоянства расходов обеих жидкостей Q^a и Q^b :

$$(1.9) \quad Q^a = 2\pi \int_0^{R_z(z)} v_z^a r \, dr;$$

$$(1.10) \quad Q^b = 2\pi \int_{R_z(z)}^{R_2} v_z^b r \, dr$$

($R_z(z)$ — координаты поверхности раздела, R_2 — радиус канала).

Можно принять, что на осп канала функция тока равна нулю, а на поверхности раздела ее значения непрерывны, т. е. $\psi^a(R_z(z), z) = \psi^b(R_z(z), z)$. Тогда, из условий (1.9), (1.10) получим значения функции тока: на поверхности раздела

$$(1.11) \quad \psi(R_z(z), z) = \rho Q^a / 2\pi;$$

на стенке канала

$$(1.12) \quad \psi(R_2, z) = \rho(Q^a + Q^b) / 2\pi.$$

Отсюда вытекает, что граница раздела фаз определяется условием (1.11), которое, таким образом, является уравнением для нахождения координат поверхности раздела жидкостей $R_z(z)$ в двухслойном осесимметричном потоке.

Граничные условия для вихря $\omega^{a,b}(R_z(z), z)$ можно получить, раскладывая в ряд функцию тока в направлении нормали к поверхности раздела и учитывая соотношения (1.5), (1.6), (1.8). Однако реализация этих условий весьма затруднительна.

Поэтому воспользуемся приближенным методом со сглаживанием коэффициентов [9]. Сущность метода состоит в том, что граница раздела фаз явно не выделяется, так как разрывные на ней функции заменяются на непрерывные в пределах малой окрестности этой границы. При этом не требуется постановка граничных условий на поверхности раздела (1.5), (1.6), так как они выполняются автоматически в силу введенной непрерывности функций.

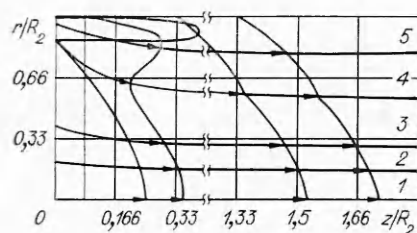
Возможность применения этого метода для исследования процессов стратифицированного течения жидкостей физически обоснована диффузией расплавов полимеров при совместном течении. Поэтому логично принять, что в пределах окрестности границы раздела вязкости и времена релаксации изменяются от значений во внутреннем слое до значений во внешнем слое. Сглаженные функции μ и λ должны быть непрерывны и иметь непрерывные производные. Поэтому для сопряжения используем полиномы — параболы третьего или пятого порядка. Таким образом, распределение вязкости будет следующим:

$$(1.13) \quad \mu(r, z) = \begin{cases} \mu^a(r, z), & r \leq R_z(z) - \delta, \\ \mu^0(r, z), & R_z(z) - \delta \leq r \leq R_z(z) + \delta, \\ \mu^b(r, z), & r \geq R_z(z) + \delta \end{cases}$$

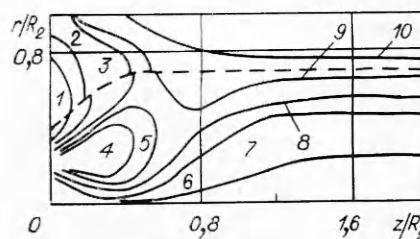
($\mu^0(r, z)$ и δ — вязкость и полутолщина граничного слоя). Аналогичен закон распределения и для времени релаксации. Заметим, что поскольку координаты $R_z(z)$ находятся по значениям функции тока (1.11), то сглаживание фактически ведется по ψ , а интервал δ соответствует определенному диапазону значений ψ . Решая краевую задачу для уравнений со сглаженными коэффициентами, получим приближенное решение исходной краевой задачи, которое будет тем более точным, чем меньше ширина зоны сглаживания. Но при решении задачи методом сеток интервал 2δ должен включать в себя по оси r не менее пяти узлов расчетной сетки, а шаг сетки внутри этого интервала желателен принимать постоянным.

Для получения разностных аналогов дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) используем интегральный метод [7]. Систему алгебраических уравнений решаем итерационным методом Либмана. Координаты поверхности раздела $R_z(z)$ определяются по условию (1.11) дополнительными итерациями.

Численное решение поставленной задачи в области установившегося течения сравнивалось с аналитическим [2], а на начальном участке частное решение (для ньютоновских жидкостей) — с результатами [6]. Максимальное расхождение результатов по полю скоростей не превышало 5%. Расчеты проводились в диапазоне чисел Рейнольдса $Re = 10^{-2} \div 10^{-5}$ и чисел Вайссенберга $We = 2 \cdot 10^{-1} \div 10^{-3}$ для обоих потоков.



Р и с. 1



Р и с. 2

2. Анализ полученных результатов. На рис. 1 представлено поле скоростей двухслойного потока жидкостей с расходами $Q^a = Q^b = 60 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{с}$, вязкостями $\mu^a = 4000 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\mu^b = 6300 \text{ Па}\cdot\text{с}$ и временами релаксации $\lambda^a = \lambda^b = 10^{-3} \text{ с}$ в канале $R_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Радиус канала, из которого поступает внутренний расплав A со скоростью $v_z(0, 0) = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$, $R_1 = 0,87R_2$. Линии 1–5 отвечают $\psi \cdot 10^6 = 0; 1; 3,8; 9,55; 16,7 \text{ кг/с}$. В поле скоростей можно выделить два участка. Первый, на котором происходит перестройка профиля скорости потока и где линии тока не параллельны стенке канала, по аналогии с однослойными течениями назовем участком гидродинамической стабилизации (ГДС). Вторым, где линии тока параллельны друг другу и стенке, а профиль скорости неизменен по длине канала, является участком установившегося течения.

Используя уравнение (1.11), определим границу раздела слоев. Она совпадает с линией тока $\psi = 9,55 \cdot 10^{-6} \text{ кг/с}$. Поверхность раздела жидкостей не является продолжением поверхности внутреннего канала. Ее координаты изменяются по длине определенным образом до своего постоянного значения в зоне установившегося течения, которое зависит только от отношения расходов и отношения вязкостей жидкостей на границе раздела [3]. Радиус внутреннего канала R_1 определяет лишь форму поверхности раздела на начальном участке.

На входе в зону совместного течения жидкости имеют существенно различные профили скорости. При слиянии потоков происходят ускорение частиц приграничных слоев жидкостей и одновременно изменение координат поверхности раздела. В двухслойном потоке возникают значительные деформации. По мере продвижения жидкостей по каналу деформации в слоях выравниваются и в области установившегося течения их различие определяется лишь реологическими свойствами материалов [3].

Представляется, что многие дефекты полимерных слоистых изделий (нестабильность границы раздела, нарушение адгезии между слоями) являются результатом определенного напряженно-деформированного состояния потока на начальном участке. Рассмотрим распределение касательных напряжений в двухслойном потоке (рис. 2). Параметры течения здесь те же, что и для рис. 1, только $Q^a = 60 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{с}$, $Q^b = 15 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{с}$, а $R_1 = 0,4R_2$. Кривые 1–10 отвечают $\tau_{rz} = 0; 0,01; 0,0125; 0,03; 0,02; 0,005; 0,01; 0,012; 0,014; 0,016 \text{ МПа}$. На начальном участке, где напряжения изменяются в осевом и в радиальном направлении, значения τ_{rz} разрывны на поверхности раздела. Однако величина скачка незначительна и уменьшается по длине канала до нуля в области установившегося течения, как и предсказывает формула (1.8). Отметим существование зоны положительных значений τ_{rz} , ограниченной кривой 1 (рис. 2), а также высокую интенсивность изменения напряжений на начальном участке.

Для практики важно знать длину участка ГДС L . При тении вязких жидкостей ее обычно оценивают по изменению профиля скорости потока или по участку релаксации касательных напряжений. Расчеты, проведенные для двухслойных течений ньютоновских жидкостей, показали, что для значений Re потока порядка $10^{-3} \div 10^{-6}$ L составляет $(1,0 \div$

$\div 2,0)R_2$ в зависимости от радиуса R_1 на входе. При течении вязкоупругих жидкостей длиной L будет размер участка релаксации нормальных напряжений. Для жидкостей, описываемых моделью Де Витта, с увеличением We наблюдается рост L на 10–15 % по сравнению с потоками ньютоновских жидкостей.

Длину участка ГДС можно оценить и по распределению давления в двухслойном потоке. На рис. 3 представлены кривые изменения давления на границе раздела ньютоновских жидкостей по длине канала в за-

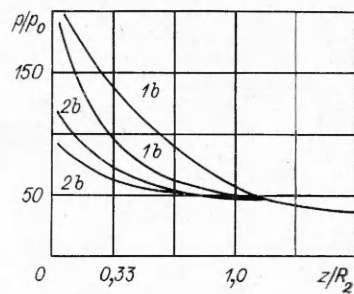


Рис. 3 (1b, 2b внизу следует читать 1a, 2a).

висимости от радиуса внутреннего канала R_1 . Здесь $Q^a = 60 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{с}$, $Q^b = 30 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{с}$, $\mu^a = 4000 \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\mu^b = 2000 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Кривые 1a, 1b соответствуют давлениям $p^a(R_z(z), z)$ и $p^b(R_z(z), z)$ при $R_1 = 0,4R_2$, а кривые 2a, 2b — давлениям при $R_1 = 0,65R_2$. Как и следует из граничных условий (1.7), в общем случае поле давлений разрывно на поверхности раздела. Но в области установившегося течения, когда линия поверхности раздела слоев параллельна оси z и нормальные напряжения в ньютоновских жидкостях нулевые, давления p^a, p^b на границе раздела равны. Из рис. 3 видно, что во втором случае, когда координаты $R_z(z)$ практически не меняются по длине канала (для данных отношений вязкостей и отношений расходов в установившемся течении $R_z = 0,67R_2$), участок ГДС имеет меньшие размеры, чем в первом. При этом величина перепада давления во втором случае также меньше, что связано с меньшими затратами энергии на перестройку профиля скорости двухслойного потока.

Таким образом, условия на входе в зону совместного течения во многом определяют характер двухслойного течения на начальном участке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хан Ч. Д. Реология в процессах переработки полимеров. — М.: Химия, 1979.
2. Первадчук В. П., Лялькина Г. Б., Казаченко Т. А. Стационарное двухслойное течение вязкоупругих расплавов полимеров в цилиндрическом канале // ИФЖ. — 1989. — Т. 56, № 1.
3. Давыдов А. Р., Первадчук В. П., Труфанова Н. М., Янков В. И. Исследование двухслойного течения расплавов полистирола и полиметилметакрилата в цилиндрическом канале при соэкструзии // Химические волокна. — 1989. — № 3.
4. Панов А. К., Дорохов И. Н. Многослойное течение расплавов полимеров в плоскощелевом канале // ДАН СССР. — 1985. — Т. 284, № 4.
5. Ануфриев В. А., Лукач Ю. Е., Петухов А. Д., Яхно Д. М. Экспериментальное исследование начального участка при двухслойном течении вязких жидкостей // Гидравлика и гидротехника. — Киев: Техника, 1977. — Вып. 24.
6. Подгаец Р. М. Конечно-элементный анализ многослойного течения несмешивающихся жидкостей // Краевые задачи. — Пермь: Изд-во Перм. политехн. ин-та, 1985.
7. Численные методы исследования течения вязкой жидкости / А. Д. Госмен, В. М. Пан, А. К. Ранчел и др. — М.: Мир, 1972.
8. Шкадов В. Я., Запрянов З. Д. Течения вязкой жидкости. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
9. Самарский А. А., Моисеенко Б. Д. Экономическая схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // ЖВММФ. — 1965. — Т. 5, № 5.

г. Пермь, г. Тверь

Поступила 5/IV 1989 г.,
в окончательном варианте — 26/I 1990 г.

УДК 532.59

А. В. Марченко

О РЕЗОНАНСНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН В ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ

В работе исследуются нелинейные взаимодействия волн в тяжелой жидкости конечной глубины, на поверхности которой плавает тонкая вязкоупругая пластина, моделирующая ледяной покров [1]. Источником возмущений в жидкости является переменное поле внешнего давления, перемещающееся по поверхности ледяного покрова.