

Авторы благодарны С. П. Курдюмову за обсуждение работы, Т. И. Пущкаревой — за помощь в проведении экспериментов, Л. Н. Пузыреву — за разработку конструкции и Ю. Н. Печаеву — за изготовление установки.

Поступила 20 III 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L i p S. C., R e s l e r E. L., K a n t r o w i t z A., Electrical Conductivity of Highly Ionized Argon Produced by Shock Waves. *J. Appl. Phys.*, 1955, vol. 26, No. 1.
2. Ф е д у л о в В. И., Е ф р е м о в а Г. Д. Изучение магнитного метода измерения электропроводности ионизированных газов. *Теплофизика высоких температур*, 1956, т. 4, № 5, сер. 615—620.
3. B r i k s c h u l t e H., M u n t e n b r u c h H. Interferometrische Untersuchungen an elektromagnetisch beschleunigten Stoßwellen. *Z. für Naturforschung*, 1965, Bd. 20a, H. 2, S. 196—202.
4. М а к а р о в Ю. В., М а к с и м о в А. М. Спектроскопические исследования в электромагнитной ударной трубе. *ЖТФ*, 1965, т. 35, № 4, стр. 658—666.
5. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А., З а к л я з ь м и н с к и й Л. А., В о л о с е в и ч П. П., Д е г т я р е в Л. М., К у р д ю м о в С. П., П о п о в Ю. П., С о к о л о в В. С., Ф а в о р с к и й А. П. Нелинейный эффект образования самоподдерживающегося высокотемпературного слоя газа, в нестационарных процессах магнитной гидродинамики. *Докл. АН СССР*, 1967, т. 173, № 4, стр. 808—811.
6. P a t r i c k K. M., B r o g a n T. R. One — dimensional flow of an ionized gas through a magnetic field. *J. Fluid. Mech.* 1959, vol. 5, No. 2. (рус. перев.: *Вопросы ракетной техники*, 1959, No. 8).
7. Г р е б е н щ и к о в С. Е., Р а й з е р М. Д., Р у х а д з е А. А., Ф р а н к А. Г. Отражение и преломление ударных волн в магнитной гидродинамике. *ЖТФ*, 1961, т. 31, № 5.
8. P a i n H. Z., S m u P. R. Magnetic Field Interactions with Shock Ionized Argon. *Proc. Phys. Soc.*, 1960, vol. 76, No. 492, p. 849—856.
9. Д е м и ч е в В. Ф., С т р у н н и к о в В. М. Взаимодействие плазменных ступок большой плотности с магнитными полями. *Докл. АН СССР*, 1963, т. 150, № 2, стр. 523—526.

#### К РАСЧЕТУ ТРУБЧАТОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ МАГНИТНОЙ ПРОБКЕ

*В. Н. Данилов (Москва)*

Решение, полученное методом усреднения [1], позволяет рассчитать винтовой пучок в слабонеоднородном поле. Здесь описывается приближенное решение для трубчатого винтового пучка в слабой осесимметричной магнитной пробке [2] с учетом поля пространственного заряда. Решение строится методом последовательных приближений по отношению  $\epsilon_*$  характерной ширины пучка  $a_*$  к характерному размеру неоднородности внешних полей  $L_*$  в предположении: пучок может быть представлен в виде двух подпотоков с однозначным и безвихревым полем обобщенного импульса  $p$  в каждом  $p = \nabla \chi_{(1,2)}$ . Получено первое приближение в общем случае и вторые приближения для пучков с малым и с большим пространственным зарядом.

1. Основные уравнения. Представляя обобщенный импульс  $p_{(1,2)}$  и плотность заряда  $\rho_{(1,2)}$  двухпоточного пучка в виде

$$p_{(1,2)} = \nabla v \pm \nabla w, \quad \rho_{(1,2)} = 1/2 (\rho \pm \delta) \quad (1.1)$$

можно записать следующие уравнения для нерелятивистского осесимметричного пучка в цилиндрических координатах  $(r, \phi, z)$ :

$$w_r^2 + w_z^2 = \Phi \equiv 2\eta\phi - v_r^2 - v_z^2 - A^2, \quad w_r v_r + w_z v_z = 0 \quad (1.2)$$

$$w_r \equiv \partial w / \partial r, \quad w_z \equiv \partial w / \partial z, \quad v_r \equiv \partial v / \partial r, \quad v_z \equiv \partial v / \partial z$$

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r w_r + \frac{\partial}{\partial z} w_z \right\} (\rho, \delta) + \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r + \frac{\partial}{\partial z} v_z \right\} (\delta, \rho) = 0 \quad (1.3)$$

$$\Delta \phi = 4\pi\rho, \quad \Delta A = \frac{A}{r^2}, \quad \Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.4)$$

Здесь  $\eta > 0$  — отношение заряда к массе электрона,  $\phi$  — потенциал электрического поля,  $\rho > 0$  — полная плотность заряда пучка,  $(c/\eta) rA$  — единственная азимутальная компонента потенциала магнитного поля отсчитывается от катода, на по-

верхности которого ( $K$ ) по предположению  $A_K = 0$ ,  $c$  — скорость света. Уравнения (1.2) эквивалентны двум интегралам энергии, а (1.3) — двум уравнениям неразрывности, выписанным согласно (1.1) для первого и второго подпотоков.

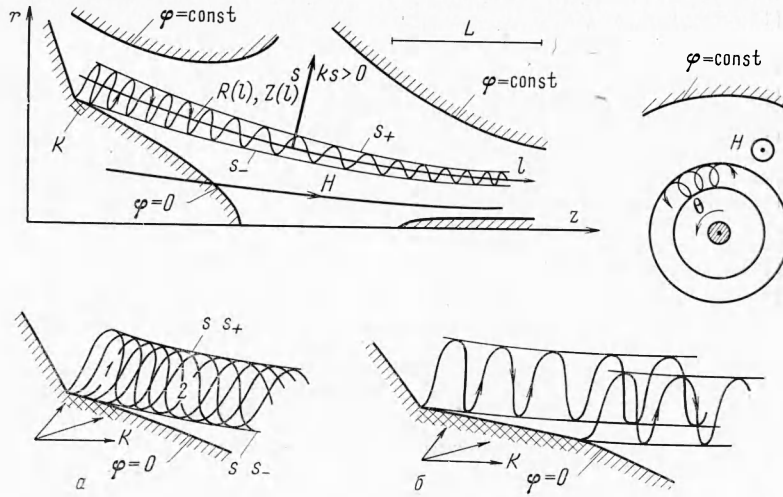
1.1°. Чтобы явно выделить малый параметр задачи  $\varepsilon_*$ , можно перейти в (1.2) — (1.4) к системе координат  $s, \vartheta, l$ , связанной с пучком

$$r = R(l) + sZ', \quad z = Z(l) - sR', \quad Z' \equiv dZ/dR, \quad R' \equiv dR/dl \quad (1.5)$$

где  $l$  — длина дуги вдоль  $\vartheta = \text{const}$  на осевой поверхности ( $s = 0$  — оси), поверхности  $l = \text{const}$  — суть конуса ортогональные поверхности  $s = \text{const}$ . Метрика системы  $s, \vartheta, l$  определяется так [2]:

$$dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + dz^2 = ds^2 + (R + sZ')^2 d\vartheta^2 + (1 - ks)^2 dl^2, \quad k \equiv R''/Z' \quad (1.6)$$

Здесь  $k(l)$  — кривизна оси в меридиональной плоскости. Пусть осевая поверхность достаточно гладка и расположена внутри пучка, так что  $s_+ \leq a_*$  — есть выражение для внешней, а  $s_-(l) \geq -a_*$  — выражение для внутренней границы трубчатого пучка (фиг. 1).



Фиг. 1

В координатах  $s, \vartheta, l$  уравнения (1.2) — (1.4) принимают вид

$$w_s^2 + \varepsilon^2 \frac{w_l^2}{\sigma^2} = \Phi \equiv 2\eta\varphi - v_s^2 - \frac{v_l^2}{\sigma^2} - A^2, \quad v_s = -\varepsilon \frac{v_l w_l}{\sigma^2 w_s} \quad (1.7)$$

$$w = \int_{s_-}^s w_s ds + w_-, \quad w_l = \frac{\partial}{\partial l} w, \quad v_l = V + \varepsilon \frac{\partial}{\partial l} \int_0^s v_s ds \quad (1.8)$$

$$v\sigma(\rho w_s + \delta v_s) = I - \varepsilon \frac{Q'}{R}, \quad v\sigma(\delta w_s + \rho v_s) = \Sigma - \frac{\varepsilon J'}{2\pi R} \quad (1.9)$$

$$Q \equiv \int_{s_-}^s (\delta v_l + \varepsilon \rho w_l) \frac{v}{\sigma} R ds, \quad J \equiv 2\pi \int_{s_-}^s (\rho v_l + \varepsilon \delta w_l) \frac{v}{\sigma} R ds \quad (1.10)$$

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho, \quad \Delta A = \varepsilon^2 \frac{A}{r^2}, \quad \sigma \equiv 1 - \varepsilon ks, \quad v \equiv 1 + \varepsilon k_2 s \quad (1.11)$$

$$\Delta \equiv \frac{1}{v\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} v\sigma \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\varepsilon^2}{R} \frac{\partial}{\partial l} R \frac{v}{\sigma} \frac{\partial}{\partial l} \right\}, \quad k_2 \equiv \frac{Z'}{R}, \quad Q' \equiv \frac{\partial Q}{\partial l} \quad (1.12)$$

Здесь и ниже штрихом обозначена производная по  $l$  при фиксированном  $s$ . В уравнениях неразрывности (1.9) произведено интегрирование по  $s$ , так что  $I, \Sigma$ , а равно и  $V, w_-$  — произвольные функции  $l$ .

В системе (1.7) — (1.12) расставлен указатель малости  $\varepsilon$  в тех местах, где параметр  $\varepsilon_*$  появляется в результате перехода к безразмерным величинам

$$s/a_*, \quad l/L_*, \quad kL_*, \quad R/L_*, \quad \varepsilon_* \equiv a_*/L_* \quad (1.13)$$

Тем самым выделяется случай трубчатого пучка с большим внутренним радиусом  $R$ , движущегося в магнитном поле с большим размером неоднородности  $L_*$ .

1.2°. На границах пучка можно записать условия исчезновения осцилляционной скорости  $w_s, w_l$ , по которой различаются подпотоки

$$w_- = 0, \quad w_+ = w_*, \quad \Phi_- = \Phi_+ = 0 \quad (1.14)$$

и условия непрерывности полного тока пучка

$$\varepsilon J_+' = 2\pi R \Sigma, \quad 0 < l < l_*; \quad J_+ = J_*, \quad \Sigma = 0, \quad l > l_* \quad (1.15)$$

Здесь и ниже индексами  $+$  — отмечаются значения величин на внешней и внутренней границе соответственно, звездочкой отмечаются константы задачи. Функция  $\Sigma$  определяет источники на внутренней границе пучка, которая по предположению на участке  $0 < l < l_*$  совпадает с поверхностью катода ( $K$ ). Как нетрудно установить с помощью (1.9),  $\Sigma$  равна  $(v\sigma)_K$ , где  $j$  — нормальная компонента плотности тока эмиссии.

В рамках двухпоточного приближения можно выбрать катод в виде узкой полоски с шириной  $l_*$  равной пролету по оси  $l$  крайнего левого по схеме на фиг. 1, а электрона. При этом нужно «спивать» область однопоточного течения 1, где  $\delta = \rho$  на траектории крайнего электрона с областью двухпоточного течения 2 в свободном пучке, где  $\Sigma = 0$ . Однако условия формирования можно выбрать так, что  $V \lesssim \varepsilon_*^3$  в области 1, тогда с точностью до  $\varepsilon^3$  можно пренебречь узкой областью 1 и рассматривать второе условие (1.15). Если выбрать катод шире, пучок будет многопоточным (схема  $\delta$  на фиг. 4). Однако при  $V \lesssim \varepsilon^3, l < l_*$  равенство нулю скорости на катоде будет выполнено для обоих подпотоков с точностью до  $\varepsilon^3$  и с той же точностью можно заменить реальный многопоточный пучок двухпоточным с условием (1.15) в области катода  $0 < l < l_*$ .

1.3°. Решение системы (1.7) — (1.12) можно искать в виде рядов по степеням  $\varepsilon$  методом последовательных приближений. Так с точностью до  $\varepsilon^3$  для азимутальной скорости  $A$  из (1.11) легко получается

$$\begin{aligned} A &= \Omega s + \Gamma + \varepsilon B_H s^2 + \varepsilon^2 (C_H s^3 + D_H s^2), \quad 2B_H \equiv (k - k_z) \Omega \quad (1.16) \\ 2D_H &\equiv \frac{\Gamma}{R^2} - \frac{(R\Gamma)'}{R}, \quad 6C_H \equiv \left[ 2(k^2 - k k_z + k_z^2) + \frac{1}{R^2} \right] \Omega - \frac{(R\Omega)'}{R} \\ &\Omega = \Omega(l), \quad \Gamma = \Gamma(l), \quad \Omega + \varepsilon k_z \Gamma = (\eta/c) H_l^0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

где  $H_l^0$  — касательная компонента напряженности магнитного поля на оси ( $s = 0$ ). Однако второе приближение для всей задачи выглядит слишком громоздко. Для упрощений удобно условиться, что перед каждым параметром в (1.7) — (1.12), (1.16) стоит указатель малости  $\mu$ :  $\mu(w)$  — перед  $w$ ,  $\mu(V)$  — перед  $V$ , ..., например, из (1.7), (1.9), (1.15) следует:

$$\mu(v_s) = \varepsilon, \quad \mu(\Sigma) = \varepsilon, \quad \mu(\delta) = \varepsilon \quad (1.18)$$

Задаваясь конкретным  $\mu$ , можно выделять простые случаи режимов движения пучка, так  $\mu(\rho) = \varepsilon$ , если  $4\pi\eta\rho$  порядка  $\varepsilon_*\Omega^2$ .

2. Первое приближение. С точностью до  $\varepsilon^2$  уравнения (1.7) — (1.12) ввиду (1.16), (1.18) сводятся к двум

$$w_s^2 = 2\eta\phi - V^2 - 2(\Omega s + \Gamma)^2 - 2\varepsilon k s V^2 - \varepsilon(k - k_z)(\Omega s + \Gamma)\Omega s^2 \quad (2.1)$$

$$\partial\phi/\partial s = \left( E + 4\pi I \int w_s^{-1} ds \right) [1 + \varepsilon(k - k_z)s], \quad E = E(l) \quad (2.2)$$

Здесь  $E(l)$  — нормальная компонента напряженности поля на оси. Уравнения (2.1), (2.2) в переменных  $\tau = \tau(s, l)$ ,  $l$  принимают вид

$$\begin{aligned} s'' + s &= \eta(\partial\phi/\partial s)\Omega^{-2} - \Gamma/\Omega - \varepsilon k V^2 \Omega^{-2} - \varepsilon(k - k_z)(\Gamma/\Omega + 3/2s)s \\ \eta(\partial\phi/\partial s) &= (\alpha\tau\Omega^2 + \eta E) [1 + \varepsilon(k - k_z)s], \quad \alpha \equiv 4\pi\eta I \Omega^{-3} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$s' \equiv \partial s / \partial \tau = w_s / \Omega, \quad \tau' \equiv \partial \tau / \partial l = -(\partial s / \partial l)(\Omega / w_s) \quad (2.4)$$

В результате получается одно уравнение для  $s(\tau, l)$

$$s'' + s = \alpha\tau + \lambda + \varepsilon(k - k_z)s(\alpha\tau + \lambda - 3/2s), \quad \lambda\Omega^2 \equiv \eta E - \Omega\Gamma - \varepsilon k V^2 \quad (2.5)$$

Решение (2.5) с точностью до  $\varepsilon^2$  можно записать так:

$$s = \alpha\tau + \beta s_\tau + \lambda(1 - c_\tau) + \varepsilon(k - k_z) [(\lambda^2 - \beta^2)(1 - c_\tau - 1/2s_\tau^2) + \alpha^2(1 - c_\tau - 1/2\tau^2) - 1/2\alpha\beta(\tau s_\tau - \tau^2 c_\tau) + 1/2\alpha\lambda(\tau^2 s_\tau + \tau c_\tau - 2\tau + s_\tau) - 2\lambda^2(1 - c_\tau - 1/2\tau s_\tau) + \beta\lambda(\tau c_\tau - s_\tau c_\tau)], \quad \beta = \beta(l), \quad \lambda = \lambda(l) \quad (2.6)$$

$$w_s/\Omega \equiv s' = \alpha + \beta c_\tau + \lambda s_\tau + \varepsilon(k - k_z) [(\lambda^2 - \beta^2)(s_\tau - s_\tau c_\tau) - \alpha^2(\tau - s_\tau) - 1/2\alpha\beta(s_\tau - \tau c_\tau + \tau^2 s_\tau) + 1/2\alpha\lambda(\tau s_\tau + \tau^2 c_\tau + 2c_\tau - 2) - \lambda^2(s_\tau - \tau c_\tau) + \beta\lambda(c_\tau - 1 + 2s_\tau^2 - \tau s_\tau)] \quad (2.7)$$

$$s_\tau \equiv \sin \tau, \quad c_\tau \equiv \cos \tau, \quad s_\theta \equiv \sin \theta, \quad c_\theta \equiv \cos \theta \quad (2.8)$$

2.1°. Пусть ось расположена симметрично по  $\tau$

$$\tau_+ = -\tau_- = \theta(l), \quad \tau(s=0) = 0, \quad s_\pm = s(\pm\theta, l) \quad (2.9)$$

Наложение последних условий (1.14) на (2.7) дает

$$\alpha + \beta c_\theta = -\varepsilon(k - k_z)\lambda [1/2\alpha(\theta s_\theta + \theta^2 c_\theta + 2c_\theta - 2) + \beta(c_\theta - 1 + 2s_\theta^2 - \theta s_\theta)] \quad (2.10)$$

$$\lambda s_\theta/\Omega = -\varepsilon(k - k_z) [(\lambda^2 - \beta^2)(s_\theta - s_\theta c_\theta) - \alpha^2(\theta - s_\theta) - 1/2\alpha\beta(s_\theta - \theta c_\theta + \theta^2 s_\theta) - \lambda^2(s_\theta - \theta c_\theta)]$$

Из (2.10) следует  $\mu(\lambda) = \varepsilon$ , если  $\mu(s_\theta) = 1$ . В этом случае условия (1.14), (1.15),

(2.9) с точностью до  $\varepsilon^2$  дают

$$s_\pm = \pm a_0 + \varepsilon(k - k_z)\Delta a, \quad a_0 \equiv \beta(s_\theta - \theta c_\theta)$$

$$\Delta a \equiv \beta^2 [c_\theta^2 - 3/2c_\theta + 3/2\theta c_\theta^2(1 - c_\theta)s_\theta^{-1} - 1/2\theta^2(c_\theta + 1)c_\theta + 1/2 + 1/2\theta s_\theta c_\theta]$$

$$\alpha = -\beta c_\theta$$

$$\xi = \beta^2 (3/2\theta c_\theta^2 s_\theta^{-1} - c_\theta^2 - 3/2c_\theta - 1/2\theta^2 c_\theta + 1) \quad (2.11)$$

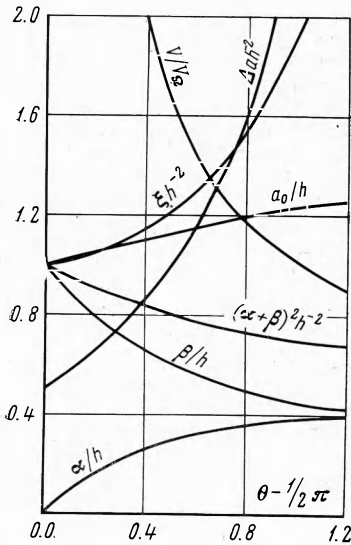
$$\beta^2 [\theta(1 + 2c_\theta^2) - 3s_\theta c_\theta] = w_*/\Omega, \quad \alpha R V \theta \equiv \eta J_+ \Omega^{-2}$$

$$\lambda \equiv \varepsilon \xi (k - k_z), \quad 1/2\pi \leq \theta < \pi$$

На фиг. 2 представлены графики безразмерных отношений, зависящих только от  $\theta$

$$\frac{\beta}{h}, \quad \frac{a_0}{h}, \quad \frac{\Delta a}{h^2}, \quad \frac{V}{V_\Omega}, \quad h^2 \equiv \frac{2w_*}{\pi\Omega}$$

$$V_\Omega \equiv \frac{R\Omega^2}{\eta J_+} h \left( \frac{\alpha}{h} + \frac{\beta}{h} \right)^2 \quad (2.12)$$



Фиг. 2

Последняя величина пропорциональна вращательной энергии электрона  $\mathcal{E}_\perp$ . С увеличением пространственного заряда ( $\theta \rightarrow \pi$ ) величина  $2\eta\mathcal{E}_\perp/(\Omega h)^2$  убывает от 1 до  $2/3$ . Зависимость параметров пучка от нарастающего поля магнитной пробки ясна из (2.12), где  $\Omega$  с точностью до  $\varepsilon$  есть циклотронная частота (1.17).

2.2°. Случай  $\mu(s_\theta) \ll \varepsilon$  выглядит проще, если расположить ось на внутренней границе пучка

$$\tau_- = s_- = 0, \quad \beta = -\alpha \quad (2.13)$$

Условия (1.14), (1.15) согласно (2.6), (2.7), (2.13) дают

$$s_+ = \{\alpha(\tau - s_\tau) + \lambda(1 - c_\tau) + \varepsilon^{1/2}(k - k_z) [\alpha^2(\tau s_\tau - \tau^2 + s_\tau^2 - \tau^2 c_\tau) + \alpha\lambda(s_\tau - \tau c_\tau + \tau^2 s_\tau + 2s_\tau c_\tau - 2\tau) + \lambda^2(2c_\tau - 2 - s_\tau^2 + 2\tau s_\tau)]\}_+ \\ \{s'\}_+ = \{\alpha(1 - c_\tau) + \lambda s_\tau + \varepsilon^{1/2}(k - k_z) [\alpha^2(s_\tau - 2\tau - \tau c_\tau + \tau^2 s_\tau + 2s_\tau c_\tau) + \alpha\lambda(3\tau s_\tau + \tau^2 c_\tau - 4s_\tau^2) + \lambda^2(2\tau c_\tau - 2s_\tau c_\tau)]\}_+ \quad (2.14)$$

$$w_+ = \Omega \{ \alpha^2 (3/2\tau - 2s_\tau + 1/2s_\tau c_\tau) + \alpha\lambda (1 - c_\tau)^2 + 1/2\lambda^2 (\tau - s_\tau c_\tau) + \varepsilon (k - k_z) [\alpha^3 (3\tau s_\tau - \tau^2 c_\tau + 2c_\tau - 2 - 1/2\tau^2 s_\tau^2 + 1/2s_\tau^2 + 2/3c_\tau^2 - 2/3 - 1/2\tau^2) + \alpha^2\lambda (\tau^2 s_\tau - \tau^2 s_\tau c_\tau + \tau c_\tau - s_\tau + s_\tau c_\tau - 2\tau + 2s_\tau^3 + \tau c_\tau^2) + \lambda^2\alpha (2\tau s_\tau - 2\tau s_\tau c_\tau + 1/2\tau^2 s_\tau^2 - 4 + 6c_\tau - 2c_\tau^3) + \lambda^3 (\tau s_\tau^2 - 1/2\tau + 1/2s_\tau c_\tau - 2/3s_\tau^3)] \}_+ = w_* \quad (2.15)$$

$$J_+ = 1/2 (\Omega^2 / \eta) \alpha V \{ \tau + 2\varepsilon k [\alpha (1/2\tau^2 - c_\tau + 1) + \lambda (\tau - s_\tau)] \}_+ \quad (2.16)$$

Из (2.14) — (2.16) легко получить для малых  $x$

$$\tau_+ \equiv 2(\pi - \varepsilon x), \quad x = \pi(k - k_z) [\lambda - 3/2\alpha^2 / \lambda + \pi\alpha] \quad (2.17)$$

$$3\alpha^2 + \lambda^2 = w_* / (\pi\Omega) + \varepsilon(k - k_z) (\lambda^3 + 6\pi\alpha^3)$$

$$s_+ = \pi\alpha - \varepsilon\lambda(k - k_z)(4\pi\alpha^2 + 3\alpha\lambda), \quad J_+ = (\Omega^2 / \eta) \alpha V \{ \pi + \varepsilon [2\pi k (\lambda + \pi\alpha) - x] \}$$

Следует отметить, что в особой точке на границе

$$\partial\Phi / \partial s = \Phi = 0 \quad (s'' = s' = 0) \quad (2.18)$$

возможно ветвление границы пучка, а следовательно, и самого пучка. Если (2.18) выполнено на конечном отрезке, например, нижней границы, то возможен гидромический режим, в котором решение (2.14) — (2.16) при  $\tau < 0$  описывает второй пучок, примыкающий снизу к первому на границе  $s = 0$ . В этой области  $\lambda = 0$ , и возможен ток через границу ( $\Sigma \neq 0$ ).

3. Малый пространственный заряд, второе приближение. Положив  $\mu(1) = \varepsilon$  и в соответствии с (1.9), (1.8)

$$\mu(v_s) = \varepsilon, \quad \mu(\Sigma) = \mu(\delta) = \varepsilon^2, \quad \mu(\rho) = \mu(\alpha) = \varepsilon \quad (3.1)$$

Из (1.9), (1.11) с помощью (2.2), (2.4) нетрудно получить

$$[1 - \varepsilon(k - k_z)s - \varepsilon^2 k k_z s^2] \eta \frac{\partial\Phi}{\partial s} = \eta E + \varepsilon\lambda\Omega^2 - \varepsilon^2 (\eta / R) \int (R\Phi)' ds \quad (3.2)$$

3.1°. Нулевое приближение, вытекающее в случае (3.1) из (1.7) — (1.12), (1.16), (2.4), (2.9), (1.14), имеет вид

$$s = \beta s_\tau, \quad w_s = \Omega\beta c_\tau, \quad w = 1/2\Omega\beta^2 (\tau + s_\tau c_\tau), \quad \theta = 1/2\pi, \quad \beta = \beta(l) \quad (3.3)$$

Используя (3.3), (1.7) — (1.12), (1.16), (2.4) и условия (1.14), (1.15), нетрудно вычислить следующие величины:

$$\tau' = -k_\beta s\Omega / w_s, \quad w_l = -w_s k_\beta s, \quad v_s = V k_\beta s, \quad k_\beta \equiv \beta' / \beta \quad (3.4)$$

$$v_l = V + \varepsilon^2 1/2 (V k_\beta)' s^2 \quad (3.4)$$

$$(R\Phi)' = (RU)' + (s / \eta) [(\Omega\Gamma)'R]', \quad 2\eta U \equiv \Gamma^2 + V^2 + \Omega^2\beta^2 \quad (3.5)$$

$$J = 2\pi R I (V / \Omega) (\tau - \tau_-), \quad Q = \Sigma R (V / \Omega) (T - 1/2 T^2) (\tau_+ - \tau_-) - 1/2 IR k_\beta (s^2 - s_-^2), \quad T \equiv (\tau - \tau_-) / (\tau_+ - \tau_-)$$

$$R\nu\sigma\rho w_s = IR - \varepsilon^2 [(R\Sigma V / \Omega)' (T - 1/2 T^2) (\tau_+ - \tau_-) - 1/2 (R I k_\beta)' s^2 + 1/2 (R I k_\beta s_-^2)'], \quad \delta w_s = \Sigma (1 - T) \quad (3.6)$$

$$w_s^2 = 2\eta\phi - (\Omega s + \Gamma)^2 - V^2 - \varepsilon 2s [kV^2 + (\Omega s + \Gamma) B_H s] - \varepsilon^2 \{ [V^2 (k_\beta^2 + 3k^2) + V (V k_\beta)'] s^2 + 2(\Omega s + \Gamma) (C_H s^3 + D_H s^2) + B_H^2 s^4 + w_l^2 \} \quad (3.7)$$

Дифференцирование (3.7) по  $s$  приводит с учетом (2.4), (3.2), (3.5), (1.16) к уравнению для функции  $s(\tau, l)$

$$s'' + s = \varepsilon [\alpha\tau + (\xi - 3/2s^2) (k - k_z)] + \varepsilon^2 (k - k_z) s\alpha\tau - \varepsilon^2 (A_w s + B_w s^2 + C_w s^3) \quad (3.8)$$

$$\eta E - \Omega\Gamma - \varepsilon k V^2 \equiv \varepsilon \xi (k - k_z) \Omega^2 \quad (3.8)$$

$$\Omega^2 A_w \equiv (\eta / R) (RU)' - (k - k_z)^2 \xi \Omega^2 + V^2 (k_\beta^2 + 2k^2 + k k_z + k_\beta') +$$

$$+ V V' k_\beta + \Gamma^2 R^{-2} - (\Gamma / R) (R\Gamma)' + \Omega^2 k^2 \beta^2, \quad k_z \equiv Z' / R$$

$$\Omega^2 B_w = 2\Omega\Gamma R^{-2} - \Omega\Gamma'' - \Omega\Gamma' k_R + \Omega'\Gamma', \quad k_R \equiv R' / R$$

$$C_w \equiv 1/6 (11k^2 - 14k k_z + 11k_z^2) - 2/3 R^{-2} - 2k_\beta^2 - 2/3 [\Omega'' / \Omega + (\Omega' / \Omega) k_R]$$

3.2°. Решение (3.8) с точностью до  $\varepsilon^2$  имеет вид

$$s = \beta s_\tau + \varepsilon \{ \alpha (\tau - s_\tau) + (k - k_z) [(\xi - \beta^2)(1 - c_\tau) + 1/2 \beta^2 s_\tau^2] \} \quad (3.9)$$

Анализ первого приближения (3.9) в условиях (1.14) показывает, что можно положить

$$\theta = 1/2 \pi + \varepsilon x, \quad \mu(x) = 1, \quad (\zeta - \beta^2)(k - k_z) = \varepsilon \zeta \beta, \quad \mu(\zeta) = 1 \quad (3.10)$$

Решая (3.8) с учетом (3.9), (3.10), нетрудно получить

$$s = \beta s_\tau + \varepsilon [\alpha (\tau - s_\tau) + 1/2 (k - k_z) \beta^2 s_\tau^2] + \varepsilon^2 \beta [\alpha (k - k_z) (2 - 2c_\tau - s_\tau^2 - 1/2 \tau s_\tau + 1/2 \tau^2 c_\tau) + \zeta (1 - c_\tau) - 1/2 A_w (s_\tau - \tau c_\tau) - 2/3 B_w \beta (1 - c_\tau - 1/2 s_\tau^2) - 1/4 D_w \beta^2 (s_\tau^3 - 3/2 \tau c_\tau + 3/2 s_\tau c_\tau^2)] \quad (3.11)$$

$$s' = \beta c_\tau + \varepsilon [\alpha (1 - c_\tau) + (k - k_z) \beta^2 s_\tau c_\tau] + \varepsilon^2 \beta [\alpha (k - k_z) (3/2 s_\tau - 2 s_\tau c_\tau + 1/2 \tau c_\tau - 1/2 \tau^2 s_\tau) + \zeta s_\tau - 1/2 A_w \tau s_\tau - 2/3 B_w \beta (s_\tau - s_\tau c_\tau) - 3/8 D_w \beta^2 s_\tau (\tau - s_\tau c_\tau)] \\ D_w \equiv c_w + 3/2 (k - k_z)^2 \quad (3.12)$$

Условия (1.14), (2.9) и (3.10) — (3.14) позволяют найти

$$s_\pm = \pm \{ \beta + \varepsilon (1/2 \pi - 1) \alpha - \varepsilon^2 1/2 \beta (A_w + 1/2 D_w \beta^2 - \alpha^2 \beta^{-2}) \} + \\ + 1/2 \varepsilon (k - k_z) \beta^2 + \varepsilon^2 \beta [ (1/8 \pi^2 - 1/4 \pi + 1/2) \alpha (k - k_z) + 1/3 B_w \beta ] \quad (3.13)$$

$$x = \alpha / \beta (1 + \varepsilon \alpha / \beta) - \varepsilon^{1/4} \pi (A_w + 3/4 D_w \beta^2) \quad (3.14)$$

$$\zeta = 1/2 (1/4 \pi^2 - 1) \alpha (k - k_z) + 2/3 B_w \beta \quad (3.15)$$

Далее из (1.8), (3.10), (3.11), (3.14) можно вычислить инвариант  $w_+$  и из (1.10), (3.4), (3.6), (3.11), (3.15) ток  $J_+$

$$w_+ / \Omega = 1/2 \pi \beta^2 + \varepsilon (4 - \pi) \alpha \beta + \varepsilon^2 [ (3/2 \pi - 4) \alpha^2 + 1/8 \pi \beta^4 (k - k_z)^2 - 1/4 \pi \beta^2 (A_w + 3/8 D_w \beta^2) ] \quad (3.16)$$

$$J_+ = 2\pi^2 R I (V / \Omega) \{ 1 + \varepsilon (2 / \pi) x + \varepsilon^2 \beta^2 [ 2k^2 - 1/2 k k_z - k_\beta^2 + 1/4 k_\beta (V / V - I' / I - R' / R) ] \} + \varepsilon^2 \pi [ 1/2 \Sigma R k_\beta \beta^2 - 2/3 \pi^2 (V / \Omega) (\Sigma R V / \Omega) ] \quad (3.17)$$

Полученные формулы позволяют рассчитать все параметры рассматриваемого пучка с точностью до  $\varepsilon^2$ , если известно положение оси.

Из (3.8), (3.10), (3.2), (3.5), (1.16) получается соотношение

$$\eta (\Psi_R Z' - \Psi_Z R') = \varepsilon k 2 \eta \Psi_{s=0} - \varepsilon k_z \beta^2 \Omega^2 + \varepsilon^2 \zeta \beta \Omega^2 \quad (3.18)$$

$$2 \eta \Psi \equiv 2 \eta \varphi - A^2, \quad \Psi_R \equiv (\partial \Psi / \partial r)_{s=0}, \quad \Psi_Z \equiv (\partial \Psi / \partial z)_{s=0}, \quad \Omega = (\partial A / \partial s)_{s=0}$$

которое является уравнением осевой поверхности. В нулевом приближении ось, очевидно, проходит по силовой линии потенциала  $\Psi$  без учета пространственного заряда. В следующих приближениях должно быть учтено поле пространственного заряда в  $\Psi$  и члены в правой части (3.18), определенные в (3.14) — (3.17). Чтобы пучок не отражался от пробки и не ветвился необходимо отсутствие областей, где  $2 \eta \Psi (R, Z) < \Omega^2 \beta^2$ , и отсутствие особых точек поля  $\Psi$  на оси, в которых  $\Psi_R = \Psi_Z = 0$ .

3.3°. В отсутствии пространственного заряда поле представимо в виде, аналогичном (1.16)

$$\varphi = U + E s + \varepsilon B_H s^2 + \varepsilon^2 (C_E s^3 + D_E s^4), \quad U = U(l), \quad E = E(l) \quad (3.19)$$

$$2 B_E \equiv (k - k_z) E, \quad 2 D_E \equiv -(R U)' / R$$

$$6 C_E \equiv 2 (k^2 - k k_z + k_z^2) E - (R E)' / R$$

Переход к переменной  $\tau$  по (2.4) излишен. Формулы (3.3), (3.4), (3.6), (3.7) при этом остаются в силе, если под  $\beta$ ,  $\tau$  понимать параметры в подстановке для всех приближений

$$s \equiv \beta s_\tau, \quad s_\pm = \pm \beta, \quad \tau_\pm = \pm 1/2 \pi, \quad \beta = \beta(l) \quad (3.20)$$

Из (3.7), (3.4), (3.19), (1.14), (3.20) следует:

$$w_s = \Omega (\beta^2 - s^2)^{1/2} \{1 + 1/2 \varepsilon (k - k_z) s + 1/2 \varepsilon^2 (A_\Phi + B_\Phi s + C_\Phi s^2)\} \quad (3.21)$$

$$A_\Phi \Omega^2 = V^2 (k_\beta^2 + 2k^2 + k k_z + k_\beta') + V V' k_\beta + (2\Omega C_H - B_H^2) \beta^2 + 2\Gamma D_H - \\ - 2\eta D_E, \quad B_\Phi \Omega^2 \equiv 2\Omega D_H + 2\Gamma C_H - 2\eta C_E, \quad C_\Phi \equiv 2C_H / \Omega - k_\beta^2 \\ V^2 = 2\eta U - \Gamma^2 - \Omega^2 \beta^2 - \varepsilon^2 A_\Phi \beta^2 \Omega^2 \quad (3.22)$$

$$\eta E - \Omega \Gamma = \varepsilon k (2\eta U - \Gamma^2) - \varepsilon^{1/2} (k + k_z) \Omega^2 \beta^2 + 1/2 \varepsilon^2 B_w \Omega^2 \beta^2 \quad (3.23)$$

где (3.23), аналогично (3.18), будет уравнением оси, проходящей здесь по центру пучка. Полуширина пучка  $\beta$  определяется инвариантом  $w_*$

$$\beta^2 = h^2 \{1 - 1/2 \varepsilon^2 (A_\Phi + 1/4 C_\Phi h^2)\}, \quad h^2 \equiv (2/\pi) (w_* / \Omega) \quad (3.24)$$

Ток свободного пучка ( $\Sigma = 0$ ) определяется из (3.6), (3.20), (3.21)

$$J_+ = 2\pi^2 R (V / \Omega) \{1 - 1/2 \varepsilon^2 A_\Phi + \varepsilon^2 \beta^2 [k^2 + 1/2 k k_z - k_\beta^2 + 1/8 (k - k_z)^2 - 1/4 C_\Phi + \\ + 1/4 k_\beta (V' / V - I' / I - R' / R)]\} \quad (3.25)$$

Для средней скорости переноса заряда (отношения тока пучка к заряду на единицу длины) в первом приближении из (1.16), (3.6), (3.21), (3.23) получается

$$\langle v_l \rangle = V, \quad \langle A \rangle = \eta E / \Omega - \varepsilon^{1/2} k (2V^2 + \beta^2 \Omega^2) / \Omega, \quad \eta (\partial H / \partial s)_{s=0} = \varepsilon k \Omega$$

Этот результат совпадает с формулой (25.46) работы [1] для скорости движения ларморовского центра в предположении  $\mu(E) = \varepsilon$ , которое использовалось в [1].

4. Большой пространственный заряд. При помощи решения (2.14) можно выделить следующий режим:

$$\tau_+ = 2\pi + \sqrt{\varepsilon} (p \pm q), \quad \mu(\lambda) = \sqrt{\varepsilon} \quad (\tau_- = s_- = 0) \quad (4.1)$$

$$s = \alpha (\tau - s_\tau) + \sqrt{\varepsilon} \lambda [(1 - c_\tau) + \varepsilon^{1/2} (k - k_z) \alpha (s_\tau - \tau c_\tau + \tau^2 s_\tau - 2\tau + 2s_\tau c_\tau)] + \\ + \varepsilon^{1/2} (k - k_z) \alpha^2 (\tau s_\tau - \tau^2 + s_\tau^2 - \tau^2 c_\tau) + \varepsilon^2 s_2$$

$$s^* = \alpha (1 - c_\tau) + \sqrt{\varepsilon} \lambda [s_\tau + \varepsilon^{1/2} (k - k_z) \alpha (3\tau s_\tau + \tau^2 c_\tau - 4s_\tau^2)] + \\ + \varepsilon^{1/2} (k - k_z) \alpha^2 (s_\tau - 2\tau - \tau c_\tau + \tau^2 s_\tau + 2s_\tau c_\tau) + \varepsilon^2 s_2^* \quad (4.2)$$

Этот режим удастся рассчитать с точностью до  $\varepsilon^{5/2}$ . Условия (1.14), согласно (4.1), (4.2), определяют два корня  $\tau_+$

$$p \pm q = -\kappa - \sqrt{\varepsilon} 2\pi^2 (k - k_z) \alpha + \varepsilon \kappa [2/3 \kappa^2 + \pi (k - k_z) \alpha] \\ q^2 = \kappa^2 + 6\pi (k - k_z) \alpha - \varepsilon [\pi^2 (30 + 4\pi^2) (k - k_z)^2 \alpha^2 + 4/3 \kappa^4 + \\ + 6\pi \kappa^2 (k - k_z) \alpha] - \varepsilon (2/\alpha) s_2^* (2\pi), \quad \kappa \equiv \lambda / \alpha \quad (4.3)$$

Из (2.15) с учетом (4.1) определяется инвариант  $w_*$

$$w_* = \pi \Omega [3\alpha^2 + \varepsilon \lambda^2 - \varepsilon 6\pi (k - k_z) \alpha^3] + \varepsilon^2 w_2 (2\pi) \quad (4.4)$$

Из (1.10), (3.4), (3.6), (4.2) вычисляется ток пучка

$$J_+ = 2\pi^2 I R (V / \Omega) \{2 + (\sqrt{\varepsilon} / \pi) (p \pm q) (1 + \varepsilon 4\pi k \alpha) + \varepsilon 4k (\pi \alpha + \varepsilon^{1/2} \lambda) + \\ + \varepsilon^2 (8/3 \pi^2 + 5) \alpha^2 [2k^2 + k k_z + k_\alpha' + 1/2 k_\alpha (V' / V + I' / I + R' / R)] - \\ - \varepsilon^2 2\pi [4/3 \pi^2 (V / \Omega) (R \Sigma V / \Omega)' + (2/3 \pi^2 + 5/4) R \Sigma k_\alpha \alpha^2]\}$$

Поправки  $s_2, s_2^*, w_2$  в (4.2) — (4.4) определяются вторым приближением, которое находится ниже.

4.1°. В рамках нулевого приближения можно воспользоваться (3.4), (3.6), (3.7), если согласно (4.1), (4.2), заменить  $\tau_+$  на  $2\pi$ ,  $k_\beta$  — на  $k_\alpha \equiv \alpha' / \alpha$ . При помощи (2.4), (4.2), (3.4), (3.6), (3.7) из (1.11) определяется поле

$$\eta (\partial \Phi / \partial s) = (\alpha \tau \Omega^2 + \eta E) [1 + \varepsilon (k - k_z) s + \varepsilon^2 (k^2 - k k_z + k_z^2) s^2] + \\ + \varepsilon^2 \alpha \Omega^2 \{1/2 \alpha^2 (R I k_\alpha)' (R I)^{-1} (1/3 \tau^3 + 2\tau c_\tau - 2s_\tau + 1/2 \tau - 1/2 s_\tau c_\tau) - \\ - 1/2 (R \Sigma V / \Omega)' (R I)^{-1} [\tau^2 - \tau^3 (6\pi)^{-1}]\} - \varepsilon^2 (\eta / R) \int (R \Phi)' ds \quad (4.5)$$

$$\eta \int (R \Phi)' ds = 1/3 (R \Omega \Omega)' s^3 + 1/2 [(\Omega \Gamma)' R]' s^2 + 1/2 [(V^2 + \Gamma^2)' R]' s + \\ + 1/2 \Omega \alpha^3 [(R \Omega \Omega)' (9/4 \tau + 7/4 s_\tau c_\tau - 3s_\tau - \tau c_\tau - 1/2 \tau s_\tau^2 + 2/3 s_\tau^3) - \\ - R \Omega k_\alpha (s_\tau - \tau c_\tau + \tau^2 s_\tau - 5/2 \tau s_\tau^2 - 1/4 \tau + 1/4 s_\tau c_\tau + 4/3 s_\tau^3)]$$

Дифференцирование (3.7) по  $s$  с учетом (2.4), (4.1), (4.5) приводит к уравнению

$$\begin{aligned}
 s_2'' + s_2 = & 1/2 (k - k_z) \lambda^2 (4c_\tau - 3c_\tau^2 - 1) + B_\rho \alpha^2 (2\tau s_\tau - s_\tau^2) - \\
 & - \tau^2 \alpha [B_\rho \alpha + 1/2 \alpha^2 \Lambda_\Sigma] + \alpha^3 \{1/2 (k - k_z)^2 (2\tau^3 c_\tau - 3\tau^2 s_\tau c_\tau) - \\
 & - \tau [2k_\alpha^2 + 9/8 \Lambda_R + 1/8 \Lambda_\Omega - 1/4 \Lambda_I + A_\rho \alpha^{-2}] + \tau^3 [(k - k_z)^2 + \\
 & + \Lambda_\Sigma (12\pi)^{-1} + 1/6 \Lambda_I - C_\rho] + s_\tau [2k_\alpha^2 + 3/2 \Lambda_R + 1/2 \Lambda_\Omega - \Lambda_I + A_\rho \alpha^{-2}] + \\
 & + \tau c_\tau [2k_\alpha^2 + 1/2 \Lambda_R - 1/2 \Lambda_\Omega + \Lambda_I] - s_\tau c_\tau [2k_\alpha^2 + 7/8 \Lambda_R - 1/8 \Lambda_\Omega + 1/4 \Lambda_I] + \\
 & + \tau s_\tau^2 [3k_\alpha^2 + 1/4 \Lambda_R - 5/4 \Lambda_\Omega - 3C_\rho - 1/2 (3k^2 - 2kk_z + 3k_z^2)] + \tau^2 s_\tau [1/2 \Lambda_\Omega + \\
 & + 3C_\rho - k_\alpha^2 - 1/2 (3k + 3k_z^2 - 8kk_z)] + s_\tau^3 [-2k_\alpha^2 - 1/3 \Lambda_R + 2/3 \Lambda_\Omega + C_\rho + \\
 & + 1/2 (5k^2 - 8kk_z + 5k_z^2)]\} \\
 \Lambda_\Sigma \equiv & (R\Sigma V / \Omega)' (RI\alpha^2)^{-1}, \quad \Lambda_R \equiv (R\Omega)' (R\Omega)^{-1}, \quad \Lambda_\Omega \equiv (\Omega' / \Omega) k_\alpha \\
 \Lambda_I \equiv & (RIk_\alpha)' (RI)^{-1}, \quad k_\alpha \equiv \alpha' / \alpha, \quad k_z \equiv Z' / R, \quad k_R \equiv R' / R \\
 A_\rho \Omega^2 \equiv & V^2 (2k^2 + kk_z + k_\alpha^2 + k_\alpha') + VV' (k_\alpha + k_R) + (VV')' + \Gamma^2 R^{-2} + (\Gamma')^2 \\
 B_\rho \Omega \equiv & 2\Gamma R^{-2} + (\Omega' / \Omega) \Gamma - \Gamma'' + \Gamma' k_R \\
 6C_\rho \equiv & 5k^2 - 8kk_z + 5k_z^2 + 4R^{-2} + 2 [(\Omega' / \Omega)^2 - (\Omega' / \Omega) k_R + \Omega'' / \Omega]
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

4.2°. Решение уравнения (4.6) удобно записать в виде

$$\begin{aligned}
 s_2 = & 1/2 (k - k_z) \lambda^2 (2\tau s_\tau + 2c_\tau - 2 - s_\tau^2) + B_\rho \alpha^2 (1/2 \tau s_\tau - 1/2 \tau^2 c_\tau - 2/3 + 2/3 c_\tau + 1/3 s_\tau^2) - \\
 & - (\tau^2 - 2c_\tau + 2) \alpha F [\tau^2] + \alpha^3 \{(\tau^3 + 6s_\tau - 6\tau) F [\tau^3] - (\tau - s_\tau) F [\tau] + \\
 & + 1/2 (s_\tau - \tau c_\tau) F [s_\tau] + 1/4 (\tau^2 s_\tau + \tau c_\tau - s_\tau) F [\tau c_\tau] - 1/3 (s_\tau - s_\tau c_\tau) F [s_\tau c_\tau] + \\
 & + 1/3 (2\tau - 2/3 s_\tau - \tau s_\tau^2 - 4/3 s_\tau c_\tau) F [\tau s_\tau^2] + 1/4 (\tau^2 s_\tau - s_\tau + \tau c_\tau - 2/3 \tau^3 c_\tau) F [\tau^2 s_\tau] + \\
 & + 1/4 (s_\tau^3 - 3/2 \tau c_\tau + 3/2 s_\tau c_\tau^2) F [s_\tau^3] + 1/2 (k - k_z)^2 [1/4 (3 - 3\tau^2 + \tau^4) s_\tau + \\
 & + 1/4 (2\tau^3 - 3\tau) c_\tau + 4/3 (\tau - 2\tau s_\tau^2 - s_\tau c_\tau) + \tau^2 s_\tau c_\tau + 14/3 (s_\tau - s_\tau c_\tau)]\}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь  $F [f]$  означают коэффициенты в квадратных скобках уравнения (4.6), расположенные после функций  $f$ . Решение (4.7) позволяет найти поправки в (4.3), (4.4)

$$\begin{aligned}
 s_2' (2\pi) = & \pi \{2 (k - k_z) \lambda^2 - \alpha^2 B_\rho - 4\alpha F [\tau^2]\} + \pi^2 \alpha^3 \{F [\tau c_\tau] + 12F [\tau^3] - \\
 & - F [\tau^2 s_\tau] + (k - k_z)^2 (4\pi^2 + 3/2)\} \\
 w_2 (2\pi) / \Omega = & - 2\pi^2 \alpha^2 \{B_\rho \alpha + 4F [\tau^2]\} + \pi \alpha^4 \{2/3 F [s_\tau c_\tau] - 6F [\tau] + 4 (4\pi^2 - 15) F [\tau^3] - \\
 & - 3/2 F [s_\tau] - (2/3 \pi - 1) F [\tau c_\tau] + 20/9 F [\tau s_\tau^2] - 15/16 F [s_\tau^3] - (4/3 \pi^2 - 5/4) F [\tau^2 s_\tau] + \\
 & + 1/4 [62 \pi^2 - 550/18] (k - k_z)^2\}
 \end{aligned}$$

Из (4.1), (4.2), (4.7) следует выражение для верхней границы

$$\begin{aligned}
 s_+ = & 2\pi \alpha - \varepsilon 4\pi^2 (k - k_z) \alpha^2 + \varepsilon^{1/2} [1/2 \alpha x^3 - 3\pi (k - k_z) \alpha (\lambda + \alpha x) + 1/2 \lambda x^2] + \\
 & + \varepsilon^2 \pi^2 \alpha \{(k - k_z) x (2\lambda + \alpha x) - 2\alpha B_\rho - 4F [\tau^2]\} + \varepsilon^2 \alpha^3 \pi \{(8\pi^2 - 12) F [\tau^3] - 2F [\tau] - \\
 & - F [s_\tau] + 1/2 F [\tau c_\tau] + 4/3 F [\tau s_\tau^2] - (4/3 \pi^2 - 1/2) F [\tau^2 s_\tau] - 3/4 F [s_\tau^3] + \\
 & + (k - k_z)^2 (2\pi^2 + 7/12)\}
 \end{aligned}$$

Рассмотренный пример при выборе оси по (2.9) будет выглядеть сравнительно просто и точность получается выше. Однако при сделанном выборе оси для потенциала  $\varphi_-$  и напряженности поля  $E_-$  на нижней границе получаются простые выражения

$$E_- = E, \quad 2\eta\varphi_- = \Gamma^2 + V^2$$

Автор благодарит А. В. Гапонова за предложение задачи и А. Н. Иевлеву за помощь.

Поступила 27 XII 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958, § 25.
2. Kirstein P. T. A Paraxial Formulation of the Equations for Space — Charge Flow in a Magnetic Field, J. Electron. and Control, 1960, vol. 8, No. 3.
3. Гапонов А. В., Гольденберг А. Л., Григорьев Д. П., Орлов И. М., Панкратов Т. Б., Петелин М. И. «Индукционное синхронное излучение электронов в полых резонаторах». ЖЭТФ, Письма в редакцию, 1965, т. 2, вып. 9.