

16. Цейтлин М. Г., Кошелева А. А. О вибрационном нагружении в грунт и извлечении из него длинных свай и труб // Основания, фундаменты и механика грунтов.— 1984.— № 3.
17. Нигматулин Р. И., Холин Н. Н. К модели упругопластической среды с дислокационной кинетикой пластического деформирования // Изв. АН СССР. МТТ.— 1974.— № 4.
18. Вовк А. А., Замышляев Б. В., Евтерев Л. С. и др. Поведение грунтов под действием импульсных нагрузок.— Киев: Наук. думка, 1984.

г. Ташкент

Поступила 4/X 1991 г.

УДК 533.6.011.72

В. С. Суров, В. М. Фомин

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВСЯЯНОЙ КАПЛИ С СИЛЬНОЙ ВЗДУШНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

При взаимодействии со слабой ударной волной (УВ) каплю допустимо рассматривать как твердую частицу. Дифракция воздушной УВ на твердых телах исследовалась теоретически и экспериментально в [1—3]. Для корректного описания взаимодействия с сильной УВ необходимо учесть деформацию капли. В [4—6] в предположении несжимаемости газа теоретически изучались процессы при взаимодействии газового потока с деформируемой каплей. В [7] предложен метод расчета взаимодействия капли воды с плоской воздушной УВ, при этом принято допущение, что капля в процессе ее деформации принимает форму сплюснутого в направлении потока эллипсоида вращения (условие сфероидальности также использовалось в [4, 5]). В [8—13] экспериментально исследовалось воздействие воздушных волн на капли различных жидкостей.

**1. Постановка задачи, математическая модель.** Пусть на каплю жидкости, покоящуюся в газе, набегают плоская УВ. В общем случае движение жидкости и окружающего ее газа описывается полными уравнениями Навье — Стокса

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) - \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{H}_{ij} = 0,$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{V}) + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot (\mathbf{H}_{ij} \mathbf{V}) = 0,$$

$$\mathbf{H}_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right],$$

$$e = \rho \left( \varepsilon + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right), \quad \mathbf{q} = -k \nabla T, \quad p = p(\varepsilon, \rho)$$

с граничными условиями сопряжения на контактной поверхности, положение которой заранее неизвестно и должно определяться в ходе решения. Здесь  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{V}$  — вектор скорости;  $\mathbf{g}$  — вектор массовой силы;  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $p$  — давление;  $e$  — полная энергия единицы объема среды;  $k$  — коэффициент теплопроводности;  $T$  — температура;  $t$  — время. Уравнения (1.1) записываются для каждой из взаимодействующих сред.

Рассмотрим приближенное решение задачи. Ввиду кратковременности процесса взаимодействия не будем учитывать тепловые явления, кроме того, пренебрежем вязкостью жидкости и газа, а также действием массовых сил. В этом случае взаимодействие описывается уравнениями

Эйлера

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho_i y_i^{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i u_i y_i^{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_i v_i y_i^{\omega}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_i u_i y_i^{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_i u_i^2 + p) y_i^{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_i u_i v_i y_i^{\omega}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_i v_i y_i^{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i u_i v_i y_i^{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_i v_i^2 + p) y_i^{\omega}}{\partial y} - \omega p &= 0, \\ \frac{\partial \rho_i e_i y_i^{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_i e_i + p) u_i y_i^{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_i e_i + p) v_i y_i^{\omega}}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

которые записаны для плоских ( $\omega = 0$ ) и с осевой симметрией ( $\omega = 1$ , направление нормали к фронту падающей УВ совпадает с направлением оси симметрии  $Oy$  капли) течений. Здесь  $u$  и  $v$  — компоненты вектора скорости  $V$  вдоль осей  $x$  и  $y$ ; индекс  $i$  принимает значения 1 и 2, которые относятся соответственно к газу и жидкости.

Уравнения (1.2) рассматривались совместно с уравнениями состояния газа и жидкости, имеющими вид

$$(1.3) \quad p = (\kappa_1 - 1) \rho_1 \varepsilon_1, \quad p = (\kappa_2 - 1) \rho_2 \varepsilon_2 + c_{02}^2 (\rho_2 - \rho_{02}),$$

где  $\kappa_1 = 1,4$ ;  $\kappa_2 = 5,59$ ;  $c_{02} = 1515$  м/с;  $\rho_{02} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

При заданном числе Маха падающей ударной волны ( $M = D/c_0$ ,  $D$  — скорость перемещения фронта УВ) массовая скорость газа  $v_s$ , плотность  $\rho_s$  и давление  $p_s$  за ее фронтом определялись из выражений

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \frac{v_s}{c_0} &= \frac{M^2 + \frac{p_0}{\rho_0 c_0^2} \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{\rho_0 c_0^2}{p_0} M^2\right)^2 + \kappa_1^2 - 1} - \kappa_1 \right]}{(\kappa_1 + 1) M}, \\ \rho_s &= \frac{\rho_0 c_0 M}{c_0 M - v_s}, \quad p_s = p_0 + \rho_0 v_s c_0 M, \end{aligned}$$

которые следуют из соотношений Ренкина — Гюгонио ( $c_0$  — скорость звука, индексом 0 отмечены параметры в невозмущенном газе).

Взаимодействие капли с УВ условно можно разделить на начальную и основную стадии. С момента касания фронта падающей воздушной УВ поверхности капли по ней распространяется УВ. Как видно из одномерных расчетов, например, для воздушной УВ с  $M = 11$  скорость движения УВ, распространяющейся по капле, равна 1630 м/с, а массовая скорость жидкости за ее фронтом составляет 67 м/с. За время, в течение которого воздушная УВ пройдет расстояние, равное диаметру капли  $d_0$ , передняя часть капли сместится на  $0,02d_0$ , а изменение поперечного размера капли, как следует из теоретической модели Burger'a [9], составит  $0,01d_0$ . Из приведенных данных видно, что на начальной или «волновой» стадии капля практически не «чувствует» действия воздушной УВ. Наиболее существенна вторая стадия, в течение которой из-за неравномерного распределения давления на поверхности капли происходят ее ускорение и деформация.

Для более полного представления о процессах, происходящих при взаимодействии, рассмотрим подробнее начальную стадию дифракции УВ на сферической капле сжимаемой жидкости.

При взаимодействии воздушной УВ со сферической каплей жидкости система уравнений совместности, описывающая течение жидкости и газа в окрестности точки контакта фронта падающей УВ с поверхностью капли в подвижной системе координат, связанной с точкой контакта (рис. 1, а), имеет вид

$$(1.5) \quad \begin{aligned} v_{n1} \sin \varphi - c_0 M \sin (\alpha + \varphi) &= 0, \quad v_{t1} \sin \varphi - \\ - c_0 M \cos (\alpha + \varphi) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v'_{t1} \cos(\alpha - \gamma) - v_{t1} \sin(\alpha - \gamma) &= 0, \quad \rho'_1 v'_{n1} - \rho_0 v_{n1} = 0, \\
p + \rho'_1 (v'_{n1})^2 - p_s - \rho_s v_{n1}^2 &= 0, \\
\varepsilon'_1 + (v'_{n1})^2/2 + p/\rho'_1 - \varepsilon_s - v_{n1}^2/2 - p_s/\rho_s &= 0, \\
p - (\kappa_1 - 1) \rho'_1 \varepsilon'_1 = 0, \quad v_{n2} + v \cos(\beta + \vartheta) = 0, \quad v_{t2} + v \sin(\beta + \vartheta) &= 0, \\
v^2 = (c_0 M \operatorname{ctg} \varphi)^2 + (c_0 M - v_s)^2, \quad (c_0 M - v_s) \operatorname{tg} \vartheta - & \\
- c_0 M \operatorname{ctg} \varphi &= 0, \\
v_{n2} \cos(\beta + \gamma) - v_{t2} \sin(\beta + \gamma) &= 0, \\
\rho'_2 v'_{n2} - \rho_{02} v_{n2} = 0, \quad p + \rho'_2 (v'_{n2})^2 - \rho_{02} v_{n2}^2 &= 0, \\
\varepsilon'_2 + (v'_{n2})^2/2 + p/\rho'_2 - \varepsilon_{02} - v_{n2}^2/2 - p_0/\rho_{02} &= 0, \\
p - (\kappa_2 - 1) \rho'_2 \varepsilon'_2 - c_{02}^2 (\rho'_2 - \rho_{02}) &= 0,
\end{aligned}$$

где индексами  $n$  и  $t$  обозначены нормальные и касательные составляющие векторов скоростей к присоединенным УВ; параметры, помеченные штрихами, относятся к величинам за отраженной и преломленной УВ. В случае «жесткой» капли система уравнений (1.5) после преобразований приводится к уравнению

$$\begin{aligned}
(1.6) \quad \frac{2\kappa_1 p}{\rho_s v_s^2} + \cos(\alpha + \vartheta) [(\kappa_1 - 1) \cos(\alpha + \vartheta) + & \\
+ (\kappa_1 + 1) \sin(\alpha + \vartheta) \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)] &= 0.
\end{aligned}$$

Укажем приближенный способ решения системы (1.5), существенно упрощающий расчеты. Для этого воспользуемся выражениями

$$(1.7) \quad c_0 M \sin(\alpha + \varphi) - c_1 \sin \varphi = 0, \quad c_0 M \sin(\beta - \varphi) - c_2 \sin \varphi = 0,$$

связывающими углы наклона отраженной и преломленной УВ с параметрами задачи, которые следуют из принципа Гюйгенса [14]. Скорости распространения возмущений  $c_1$  и  $c_2$  оценим из соотношений

$$c_1 \approx \sqrt{c_0^2 + [(\kappa_1 + 1) v_s/4]^2} + (\kappa_1 - 3) v_s/4, \quad c_2 \approx c_{02}.$$

После вычисления углов  $\alpha$  и  $\beta$  по формулам (1.7) остальные параметры в явном виде определяются из (1.5). Значение давления у точки контакта получим из выражения

$$p \approx p_s + \rho_s v_{n1} [(v_{n1} - v_{t1}) \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)],$$

которое вытекает из (1.5) и приближенного равенства  $\gamma \approx \varphi$ .

Точное решение системы уравнений (1.5) получено с использованием итерационного метода Ньютона. Отметим, что приближенное решение

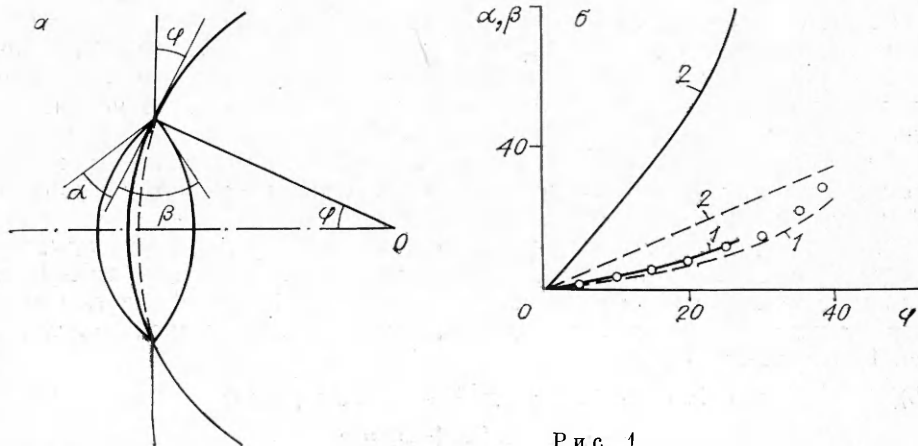


Рис. 1

задачи для рассматриваемых чисел Маха практически совпадает с точным.

На рис. 1, б приведены зависимости углов наклона присоединенных ударных волн  $\alpha$  и  $\beta$  (кривые 1, 2) от угла контакта  $\varphi$  для УВ с  $M = 2$  (сплошные линии), полученные в расчетах. Кружками отмечено решение для «жесткой» сферы ( $M = 2$ ), полученное из (1.6). Видно, что каплю до угла контакта  $\varphi < \varphi_* \approx 27^\circ$  можно считать «жесткой» частицей. Здесь  $\varphi_*$  — критический угол, т. е. такой максимальный угол  $\varphi$ , при котором еще существует решение системы уравнений (1.5). Заметим, что  $\varphi_*$  меньше критического угла  $\varphi_{**}$  для «жесткой» сферы, отделяющего регулярную стадию отражения от маховской. Это связано с тем, что при  $\varphi > \varphi_*$  скорость возмущений, распространяющихся по капле, превосходит скорость движения точки контакта фронта падающей УВ с поверхностью капли, следовательно, конфигурация с тремя УВ (падающей, отраженной и преломленной), присоединенными к точке контакта, существовать не может. В этом случае вместо преломленной УВ формируется волна разрежения. Отметим, что жидкость в волне разрежения ввиду ее большой инерционности и малости времени взаимодействия ускоряется незначительно, так что каплю можно считать твердой частицей и при углах контакта, превышающих критический.

С увеличением  $M$  падающей УВ значение  $\varphi_*$  асимптотически приближается к углу  $\varphi_{**}$  для «жесткой» сферы и, начиная с  $M = 3$ , практически совпадает с ним, стремясь к его предельному значению  $\sim 39^\circ$ . На рис. 1, б штриховыми линиями отмечены зависимости для УВ с  $M = 5$ .

Из проведенного анализа следует, что сжимаемость жидкости, которую необходимо учитывать на волновой стадии взаимодействия, в целом оказывается не столь существенна, поэтому капля в дальнейшем полагалась несжимаемой. Таким образом, общая система уравнений (1.1) приводится к двум группам уравнений: Эйлера (1.2) для газа и Навье — Стокса

$$(1.8) \quad \frac{\partial u y^\omega}{\partial x} + \frac{\partial v y^\omega}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u y^\omega}{\partial t} + \frac{\partial u^2 y^\omega}{\partial x} + \frac{\partial u v y^\omega}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 u y^\omega}{\partial x^2} + y^\omega \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \omega \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{y^\omega \partial p}{\rho_0 \partial x} - g_x y^\omega = 0,$$

$$\frac{\partial v y^\omega}{\partial t} + \frac{\partial u v y^\omega}{\partial x} + \frac{\partial v^2 y^\omega}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 v y^\omega}{\partial x^2} + y^\omega \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \omega \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\omega v}{y^\omega} \right) + \frac{y^\omega \partial p}{\rho_0 \partial y} - g_y y^\omega = 0$$

для капли. Здесь  $\nu$  — кинематическая вязкость ( $\nu = \mu/\rho_0$ ); обозначения те же, что и в (1.1), (1.2).

**2. Численное решение.** Для решения системы уравнений (1.2) использовался метод С. К. Годунова [15], а для (1.8) — метод [16]. Деформация капли определялась с применением одной из модификаций метода маркеров [16].

Так как плотность газа значительно меньше плотности жидкости, на контактной границе использованы упрощенные граничные условия. Расчет каждого временного шага сопряженной задачи разбивался на два этапа: сначала решалась «внешняя» задача обтекания капли газом, при этом контактная граница полагалась непроницаемой для газа подвижной поверхностью; затем по известному внешнему давлению, полученному на первом полушаге, рассчитывалось течение жидкости, на этом этапе контактная поверхность считалась «свободной» границей. Из условий устойчивости допустимый временной шаг для газа в 5—10 раз меньше соответствующего шага для жидкости, поэтому, как правило, одному шагу расчета движения жидкости предшествовало несколько газодинамических. Используемые «расщепленные» граничные условия позволяют без труда учесть силы поверхностного натяжения как лапласову добавку к внешнему давлению, рассчитанному на первом полушаге. Отметим, что для рассматриваемых здесь сильных УВ и крупных капель силы поверхностного натяжения более чем на порядок меньше аэродинами-

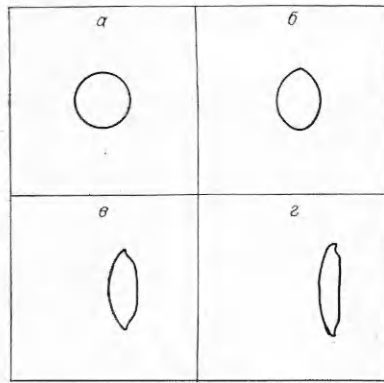


Рис. 2

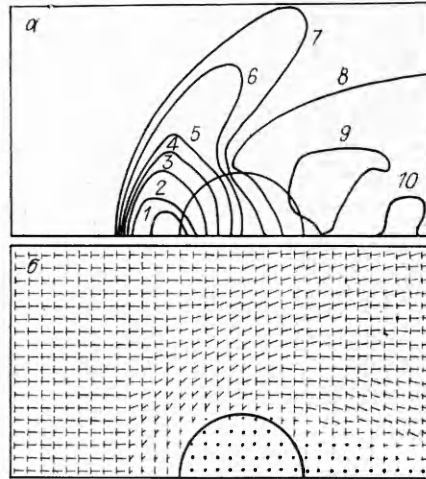


Рис. 3

ческих и поэтому не оказывали существенного влияния на процесс взаимодействия.

Была проведена серия расчетов взаимодействия капли воды, первоначально имеющей сферическую форму ( $d_0 = 2$  мм) с УВ. Число Маха варьировалось от 3 до 15. Ниже приведены данные расчетов для УВ с  $M = 11$ . Для других  $M$  результаты качественно подобны.

На рис. 2, *a — z* показаны положения маркеров, характеризующие деформацию капли, полученные соответственно к моментам времени  $t = 0; 4,7; 8,7; 11,5$  мкс. Видно, что капля с течением времени деформируется, сжимаясь в направлении оси симметрии и расширяясь в радиальном.

На рис. 3, *a, б* представлены характерные фрагменты полей давления и скоростей, полученные к моменту времени  $t = 1,9$  мкс. На рис. 3, *a* цифрами 10 и 1 отмечены изобары с минимальным 0,02 и максимальным 0,53 МПа значениями давления, остальные изолинии распределены равномерно с шагом 0,05 МПа. Видно, что картина взаимодействия сходна с обтеканием твердого тела. Перед каплей также формируется отходящая УВ, однако ее форма и положение в отличие от твердого тела изменяются с течением времени из-за деформации и ускорения капли.

Взаимодействие капли с сильной УВ характеризуется интенсивным срывом мельчайших частичек (брызг) с ее лобовой поверхности. Капля оказывается окутанной облаком брызг [8—13]. В этих условиях в эксперименте достаточно сложно точно определить действительную конфигурацию капли. На рис. 4 приведены траектории движения частичек жидкости размерами 1 и 25 мкм (отмечены соответственно штриховыми и сплошными линиями), срываемых с различных точек лобовой поверхности капли. Решение траекторной задачи при известных газодинамических параметрах вблизи капли получено численным интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений движения методом Рунге — Кутты:

$$(2.1) \quad \frac{du_l}{dt} = \frac{3}{8} \frac{c_x \rho_g}{r_h \rho_l} (u_g - u_l) |u_g - u_l|, \quad \frac{dv_l}{dt} = \frac{3}{8} \frac{c_y \rho_g}{r_h \rho_l} (v_g - v_l) |v_g - v_l|.$$

Здесь  $r_h$  — радиус частички; индексами  $g$  и  $l$  отмечены параметры, относящиеся к газу и жидкости; коэффициенты сопротивления  $c_x$  и  $c_y$  рассчитывались по соотношениям Хендерсона из [17]. Траектории мелких частичек с диаметром до 5 мкм практически совпадают с линиями тока газа. С увеличением диаметра капелек их траектории оказываются расположенными дальше от поверхности капли, что связано с их большей инерционностью. Величина отхода траектории частички от капли также зависит от ее начального положения в момент отрыва.

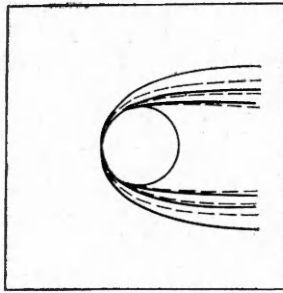


Рис. 4

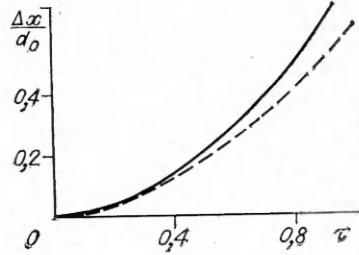


Рис. 5

На рис. 5 приведены зависимости относительного смещения капли ( $\Delta x/d_0$ ) вдоль оси симметрии от безразмерного времени  $\tau = t/t_0$ , где  $t_0 = d_0 v_s^{-1} (\rho_2/\rho_s)^{0.5}$ . Сплошной линией изображена кривая  $\Delta x/d_0 = 0,8 \tau^2$ , аппроксимирующая экспериментальные результаты [8, 13], а штриховой — полученная в расчетах. Заметное отклонение расчетных данных от опытных наблюдается с момента времени  $t = 2,9$  мкс, что, по-видимому, связано с учетом потерь массы капли из-за ее «обдира».

Качественно близкие результаты приведены в [18]. Учет сжимаемости капли накладывает довольно обременительные ограничения на временной шаг, поэтому практические результаты могут быть получены лишь для больших чисел Маха. Отметим также, что в отличие от [18], где для расчета движения жидкости использовались уравнения Эйлера (1.2), внутри капли зоны с отрицательными напряжениями отсутствовали во все время расчета.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Колган В. П., Фонарев А. С. Установление обтекания при падении ударной волны на цилиндр и сферу // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1972. — № 5.
2. Арутюнян Г. М., Карчевский А. В. Отраженные ударные волны. — М.: Машиностроение, 1973.
3. Баженова Г. В., Гвоздева О. Г. Нестационарные взаимодействия ударных и детонационных волн в газах. — М.: Наука, 1986.
4. Клячко Л. А. К теории дробления капли потоком газа // Инж. журн. — 1963. — Т. 3, вып. 3.
5. Волынский М. С., Липатов А. С. Деформация и дробление капель в потоке газа // ИФЖ. — 1970. — Т. 18, № 5.
6. Гонор А. Л., Золотова Н. В. Торможение и деформация жидкой капли в потоке газа // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1981. — № 2.
7. Митрофанов В. В. Уравнение деформации жидкой капли в потоке газа за ударной волной // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./РАН, Спб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1979. — Вып. 39.
8. Reinecke W. G., Waldman G. D. An investigation of water drop disintegration in the region behind strong shock waves // Proc. 3rd Int. Conf. Rain Erosion and Related Phenomena. — Hampshire: Hartley-Whitney, 1970.
9. Бузуков А. А. Разрушение капель и струй воздушной ударной волной // ПМТФ. — 1963. — № 2.
10. Ranger A. A., Nicholls J. A. Aerodynamic shattering of liquid drops // AIAA J. — 1969. — V. 7, N 27.
11. Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Когарко С. М. Разновидности дробления капель в ударных волнах и их характеристики // ИФЖ. — 1974. — Т. 27, № 1.
12. Бельский Б. М., Евсеев Г. А. Экспериментальное исследование разрушения капли под действием газа, движущегося за ударной волной // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1974. — № 2.
13. Бойко В. М., Папырин А. П., Поплавский С. В. О динамике дробления капель в ударных волнах // ПМТФ. — 1987. — № 2.
14. Lesser M. B. Analytic solution of liquid-drop impact problems // Proc. Roy. Soc. London. — 1981. — V. A377, N 1770.
15. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976.
16. Harlow F. H., Shannon J. P. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids. — 1965. — V. 8, N 12.
17. Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. Н., Фомин В. М. Сверхзвуковые двух-

фазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц.— Новосибирск: Наука, 1980.

18. Суров В. С., Агеев С. Г. Численное моделирование взаимодействия сферической капли воды с сильной ударной волной // Моделирование в механике/АН СССР, Сиб. отд-ние, ВЦ, ИТПМ.— 1990.— Т. 4(21), № 3.

г. Челябинск  
г. Новосибирск

Поступила 5/III 1990 г.,  
в окончательном варианте — 15/I 1992 г.

УДК 533.6.01

А. Н. Богданов, В. А. Куликовский

## СТАЦИОНАРНЫЕ СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВОЗБУЖДЕННОГО ГАЗА ОКОЛО ТОНКИХ ТЕЛ

Обычный приближенный метод решения задачи обтекания тела в классической газодинамике основан на том, что тело считается тонким и вводится малый параметр — относительная толщина тела  $\delta$  [1—6].

Стационарному сверхзвуковому обтеканию тонких тел релаксирующим газом посвящены работы [7, 8], где основной (не возмущенный телом) поток предполагался равновесным, а его параметры — постоянными величинами. Наличие в потоке тонкого тела приводило в том числе и к возникновению слабой неравновесности, которую можно рассматривать как возмущение равновесного состояния.

В настоящей работе изучается обтекание тонких плоских тел и тел вращения стационарным сверхзвуковым потоком колебательно-возбужденного газа, релаксирующего вниз по течению к равновесию. Выделение энергии при релаксации колебательного возбуждения молекул вызывает торможение сверхзвукового потока, что может привести к «тепловому кризису» (нарушению стационарного режима течения) [9]. Во избежание «теплового кризиса» следует ограничить величину начальной относительной неравновесности. Таким образом, в данной задаче в дополнение к  $\delta$  удаётся ввести еще один малый параметр — относительную неравновесность  $\epsilon$ . Решение задачи представляется в виде асимптотического разложения по имеющимся малым параметрам.

1. Плоское или осесимметричное стационарное течение газа с учетом колебательной релаксации будем описывать системой уравнений

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (\rho u)_x + (\rho v)_y + \nu \rho v/y &= 0, \quad \rho(uu_x + vv_y) + p_x = 0, \\ \rho(uv_x + vv_y) + p_y &= 0, \\ u\rho_x + v\rho_y - a^2(u\rho_x + v\rho_y) &= -\rho(\gamma - 1)(ue_{kx} + ve_{ky}), \\ ue_{kx} + ve_{ky} &= \omega(e_k^* - e_k), \end{aligned}$$

где  $x, y$  — пространственные координаты;  $\nu = 0$  и  $1$  для плоских и осесимметричных течений;  $\rho, p$  и  $a$  — плотность, давление и заморозенная скорость звука;  $u, v$  — проекции скорости газа на оси  $x, y$ ;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\omega$  — обратное время релаксации колебательных степеней свободы;  $e_k$  и  $e_k^*$  — энергия колебательных степеней свободы и её равновесное значение; индексы  $x$  и  $y$  означают дифференцирование по соответствующей индексу координате.

Для величин  $e_k^*$  и  $\omega$  примем соотношения [10]

$$\omega = k_1 p \exp(-k_2 T^{-1/3}), \quad e_k^* = \theta_k R / (\exp(\theta_k/T) - 1).$$

Здесь  $T$  — температура поступательных степеней свободы;  $\theta_k$  — характеристическая колебательная температура;  $R$  — газовая постоянная;  $k_1, k_2$  — положительные постоянные, зависящие от свойств газа. Конкретные значения  $k_i$  даны в [10].