

ВНЕДРЕНИЕ ЖЕСТКОГО КОНУСА В ПЛАСТИЧЕСКИ ОРТОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Исследуется жесткопластическое течение пластически ортотропного материала, когда жесткий шероховатый конус внедряется с постоянной скоростью в полупространство. Материал полупространства считается несжимаемым, идеально жесткопластическим и подчиняется соотношениям пластически ортотропного тела Мизеса — Хилла [1]. Принимается, что главные оси анизотропии совпадают с осями сферической системы координат, центр которой закреплен к вершине конуса. Аналогичная задача для изотропного материала рассмотрена в [2], внедрение жесткого клина в анизотропное полупространство — в [3], вдавливание жесткого штампа в анизотропную пластическую среду — в [4]. Исследование проникания тонкого твердого тела в трансверсально-изотропную среду проведено в [5]. В [6] изучено внедрение жесткого цилиндрического тела в пластически анизотропную трубу.

В настоящей работе определена сила давления при внедрении жесткого конуса в пластически ортотропное полупространство, найдены зона распределения пластических деформаций и форма свободной поверхности вытесненной части материала полупространства. На численном примере показано существенное влияние анизотропии на распределение пластической зоны.

1. Пусть жесткий конус внедряется в полупространство. Полагаем, что пластическая область, образующаяся вокруг жесткого конуса с углом $\theta = \alpha$, ограничивается некоторой конической поверхностью с углом $\theta = \beta$, положение которой подлежит определению в ходе решения задачи (рис. 1). Принимаем, что область пластического течения ограничивается поверхностью $r = R(\theta)$, свободной от внешних нагрузок, форму которой также следует определить. В этой области свойства материала считаются пластически ортотропными, появляющимися вследствие пластической деформации материала (деформационная анизотропия). На контактной конической поверхности возникает касательное напряжение, значение которого главным образом зависит от шероховатости этой поверхности.

Так как вращение жесткого конуса вокруг своей оси отсутствует или боковая поверхность конуса в окружном направлении идеально гладкая, то кольцевая компонента скорости перемещения равна нулю, откуда $\gamma_{r\varphi} = \gamma_{\theta\varphi} = 0$, $\tau_{r\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0$.

Дифференциальные уравнения равновесия в сферической системе координат для нашей задачи имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta + 3\tau_{r\theta}] = 0.$$

Зависимости между компонентами тензора скоростей деформаций, скоростей перемещений и напряжений:

$$(1.2) \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \Omega [H_0 (\sigma_r - \sigma_\theta) + G_0 (\sigma_r - \sigma_\varphi)],$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \Omega [F_0 (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) + H_0 (\sigma_\theta - \sigma_r)],$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} + \frac{v}{r} \operatorname{ctg} \theta = \Omega [G_0 (\sigma_\varphi - \sigma_r) + F_0 (\sigma_\varphi - \sigma_\theta)],$$

$$2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} = \Omega N_0 \tau_{r\theta}.$$

Условие текучести Мизеса — Хилла [1] запишем как

$$(1.3) \quad F_0 (\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + G_0 (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + H_0 (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + N_0 \tau_{r\theta}^2 = 1.$$

Исходя из (1.2), (1.3), компоненты напряжений представим в форме

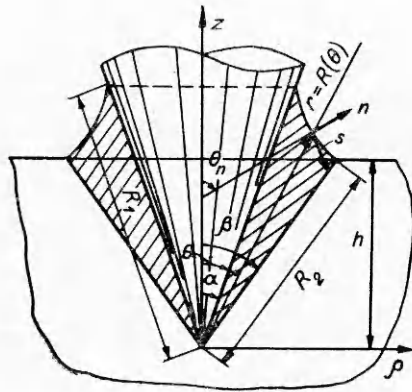
$$(1.4) \quad \sigma_r = \sigma_\theta + (F\varepsilon_r - G\varepsilon_\theta)/\Omega, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta - [H\varepsilon_r + (G + H)\varepsilon_\theta]/\Omega,$$

$$\tau_{r\theta} = 2N\gamma_{r\theta}/\Omega,$$

$$\text{где} \quad \Omega = [(F + H)\varepsilon_r^2 + 2H\varepsilon_r\varepsilon_\theta + (G + H)\varepsilon_\theta^2 + 4N\gamma_{r\theta}^2]^{1/2},$$

$F = F_0/\Delta$, $G = G_0/\Delta$, $H = H_0/\Delta$, $N = 1/N_0$, $\Delta = F_0G_0 + G_0H_0 + H_0F_0$.
На контактной поверхности между конусом и средой задаем условия

$$(1.5) \quad \tau_{r\theta} = m, \quad v = V_0 \sin \alpha \quad (\theta = \alpha).$$



Р и с. 1

Здесь V_0 — заданная скорость внедрения конуса; m — положительная постоянная, значение которой считается заданным и зависит от характера и степени шероховатости конической поверхности в радиальном направлении.

На граничной поверхности пластической зоны $\theta = \beta$ принимаем нормальную скорость перемещения непрерывной, а тангенциальную — разрывной. Тогда полагаем [7]

$$(1.6) \quad v = 0, \quad \gamma_{r\theta} \rightarrow -\infty \quad (\theta = \beta).$$

Далее имеем условие сохранения количества масс: объем внедренной части конуса должен равняться объему вытесняемого материала.

2. В пластической области компоненты напряжений и скоростей перемещений можно выразить через неизвестную функцию $f(\theta)$:

$$(2.1) \quad \sigma_r = \sigma_\theta + \frac{G}{\sqrt{N(G+H)}} \sqrt{N-\tau^2}, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta + \sqrt{\frac{G+H}{N}} \sqrt{N-\tau^2}, \quad \tau_{r\theta} = \tau, \\ u = -f' \sin \theta - 2f \cos \theta, \quad v = 2f \sin \theta, \quad w = 0.$$

Тогда из уравнений (1.1) следует выражение

$$(2.2) \quad \sigma_\theta = -p_1 + A \ln \frac{r}{R_1} - 3 \int_\alpha^\theta \tau d\theta + \sqrt{\frac{G+H}{N}} \int_\alpha^\theta \sqrt{N-\tau^2} \operatorname{ctg} \theta d\theta$$

и уравнение для определения функции $\tau(\theta)$:

$$(2.3) \quad \tau' = -A - \tau \operatorname{ctg} \theta + \frac{H-G}{\sqrt{N(G+H)}} \sqrt{N-\tau^2}$$

(A и p_1 — произвольные постоянные, $R_1 = R(\alpha)$).

Для решения уравнения (2.3) имеем граничные условия

$$(2.4) \quad \tau(\alpha) = m, \quad \tau(\beta) = -\sqrt{N}.$$

Второе условие в (2.4) получается, если рассматривать граничную коническую поверхность $\theta = \beta$ между пластической и жесткой зонами как поверхность скольжения.

Функцию $f(\theta)$ находим из дифференциального уравнения

$$(2.5) \quad f'' + \left(3 \operatorname{ctg} \theta - \sqrt{\frac{G+H}{N}} \frac{\tau}{\sqrt{N-\tau^2}} \right) f' = 0$$

с граничными условиями

$$(2.6) \quad f(\alpha) = V_0/2, \quad f(\beta) = 0,$$

решением которого будет

$$(2.7) \quad f(\theta) = \frac{V_0}{2} \frac{I(\theta)}{I(\alpha)}, \quad I(\theta) = \int_\theta^\beta \exp \left(\sqrt{\frac{G+H}{N}} \int_\alpha^\theta \frac{\tau d\theta}{\sqrt{N-\tau^2}} \right) \frac{d\theta}{\sin^3 \theta}.$$

Тогда выражения скоростей перемещений примут вид

$$(2.8) \quad u = \frac{V_0}{2I(\alpha) \sin^2 \theta} \exp \left(\sqrt{\frac{G+H}{N}} \int_\alpha^\theta \frac{\tau d\theta}{\sqrt{N-\tau^2}} \right) - V_0 \frac{I(\theta)}{I(\alpha)} \cos \theta, \\ v = V_0 \sin \theta I(\theta)/I(\alpha), \quad w = 0.$$

3. Рассмотрим равновесие конусообразной трубы, занимающей пластическую область $r \leq \xi \leq R(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ (рис. 2). Приравняв нулю сумму проекций всех сил, действующих на поверхностях мысленно выделенного тела в направлении оси $\theta = 0$, получим

$$(3.1) \quad \int_r^{R_1} [\sigma_\theta(r, \alpha) \sin \alpha - m \cos \alpha] \sin \alpha r dr - \int_r^{R_2} [\sigma_\theta(r, \beta) \sin \beta + \\ + \sqrt{N} \cos \beta] \sin \beta r dr - \int_\alpha^\beta [\sigma_r(r, \theta) \cos \theta - \tau_{r\theta}(\theta) \sin \theta] r^2 \sin \theta d\theta = 0.$$

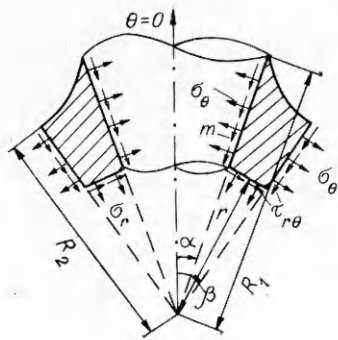


Рис. 2

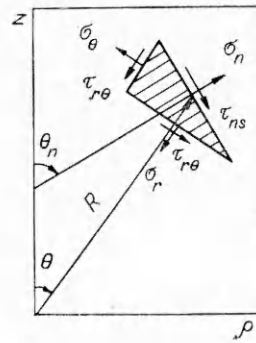


Рис. 3

Здесь $R_2 = R(\beta)$. Подставляя в (3.1) выражения компонент напряжений и производя интегрирование, находим

$$P_1 = \frac{m \sin 2\alpha + \sqrt{N} v^2 \sin 2\beta}{2(v^2 \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)} + \frac{v^2 \sin^2 \beta (D + A \ln v)}{v^2 \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} - \frac{A}{2},$$

$$v = \frac{R_2}{R_1}, \quad D = -3 \int_{\alpha}^{\beta} \tau d\theta + \sqrt{\frac{G+H}{N}} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{N - \tau^2} \operatorname{ctg} \theta d\theta.$$

Кроме функций $f(\theta)$, $\tau(\theta)$ и параметра A остается также определить функцию $R(\theta)$ и параметр β . Из условия равновесия элемента вблизи свободной поверхности $r = R(\theta)$ в меридиональной плоскости на площадке с нормалью n (рис. 3) имеем [8]

$$(3.2) \quad \sigma_n = \sigma_r(R, \theta) \cos^2 \theta_* + \sigma_\theta(R, \theta) \sin^2 \theta_* + \tau_{r\theta}(\theta) \sin 2\theta_*,$$

$$\tau_{ns} = [\sigma_\theta(R, \theta) - \sigma_r(R, \theta)] \sin \theta_* \cos \theta_* + \tau_{r\theta}(\theta) \cos 2\theta_*,$$

где $\theta_* = \theta_n - \theta$, а θ_n — угол между нормалью n и положительным направлением z . Пусть параметрическое уравнение линии пересечения свободной поверхности с меридиональной плоскостью задано в виде $\rho = \rho(\theta)$, $z = z(\theta)$. Тогда

$$(3.3) \quad \sin \theta_n = -z' / \sqrt{\rho'^2 + z'^2}, \quad \cos \theta_n = \rho' / \sqrt{\rho'^2 + z'^2}.$$

Вводя функцию

$$(3.4) \quad R(\theta) = h \exp [\chi(\theta)] / \cos \beta$$

($h = V_0 t = R_2 \cos \beta$, h — заданная глубина, t — время внедрения) и переходя к полярной системе координат $\rho = R \sin \theta$, $z = R \cos \theta$, из (3.3) получим

$$(3.5) \quad \operatorname{tg} \theta_n = (\operatorname{tg} \theta - \chi') / (1 + \chi' \operatorname{tg} \theta).$$

Аналогично с [2] составим выражение $T = \sigma_r^2 + \tau_{ns}^2$ и определим R из условий минимума T по θ_n . Дифференцированием и использованием (3.2) находим

$$(3.6) \quad \partial T / \partial \theta_n = 2(\sigma_r + \sigma_\theta) \tau_{ns}.$$

В рассматриваемой задаче, полагая $\sigma_r + \sigma_\theta < 0$ и приравнявая нулю (3.6), имеем $\tau_{ns} = 0$.

Тогда

$$(3.7) \quad \theta_n = \theta + (1/2) \operatorname{arctg} [2\tau_{r\theta} / (\sigma_r - \sigma_\theta)].$$

Для этих значений θ_n из (3.6) вытекает

$$\partial^2 T / \partial \theta^2 = -(\sigma_r + \sigma_\theta) \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2} > 0.$$

Следовательно, функция T получает минимальное значение при таком определении θ_n . На поверхности $r = R(\theta)$ $\tau_{ns} = 0$, а нормальное напряжение

$$(3.8) \quad \sigma_n(\theta) = \sigma_\theta(R, \theta) + (1/2) [\sigma_r - \sigma_\theta + \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}].$$

Подставляя (3.7) в (3.5), определяем χ' , а затем, учитывая выражения для компонент напряжений (2.1), получим

$$\chi(\theta) = 2 \int_{\theta}^{\beta} \frac{\tau d\theta}{\sqrt{\frac{G^2}{G+H} + \left[4 - \frac{G^2}{N(G+H)}\right] \tau^2 + \frac{G}{\sqrt{N(G+H)}} \sqrt{N - \tau^2}}}.$$

Из (3.4) находим форму вытесненной части поверхности

$$(3.9) \quad R(\theta) = \frac{h}{\cos \beta} \exp \left\{ 2 \int_{\theta}^{\beta} \frac{\tau d\theta}{\sqrt{\frac{G^2}{G+H} + \left[4 - \frac{G^2}{N(G+H)} \right] \tau^2 + \frac{G}{\sqrt{N(G+H)}} \sqrt{N-\tau^2}}} \right\}.$$

Соответственно имеем

$$(3.10) \quad v = \exp \left\{ -2 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\tau d\theta}{\sqrt{\frac{G^2}{G+H} + \left[4 - \frac{G^2}{N(G+H)} \right] \tau^2 + \frac{G}{\sqrt{N(G+H)}} \sqrt{N-\tau^2}}} \right\}.$$

Условие сохранения количества масс дает

$$\int_h^{R_1 \cos \alpha} \rho^2 dz = \frac{1}{3} R_1^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} \exp(3\chi) \sin^3 \theta (1 - \chi' \operatorname{ctg} \theta) d\theta = \frac{1}{3v^3} \sin^3 \alpha \cos \alpha.$$

Исключая χ' при помощи интегрирования по частям, приходим к уравнению

$$(3.11) \quad \frac{1}{2} \sin^2 \beta \cos \beta = \int_{\alpha}^{\beta} \exp \left\{ 6 \int_{\theta}^{\beta} \frac{\tau d\theta}{\sqrt{\frac{G^2}{G+H} + \left[4 - \frac{G^2}{N(G+H)} \right] \tau^2 + \frac{G}{\sqrt{N(G+H)}} \sqrt{N-\tau^2}}} \right\} \sin \theta d\theta,$$

которое вместе с (2.3), (2.4) определяет функцию τ и параметры β и A .

Сила давления конуса на среду

$$P = -2\pi \sin \alpha \int_0^{R_1} [\sigma_{\theta}(r, \alpha) \sin \alpha - m \cos \alpha] r dr.$$

Условное напряжение, приходящееся на основание внедренной части конуса, т. е. $p = \bar{P}' / (\pi \bar{R}_1^2 \sin^2 \alpha)$, назовем удельным давлением. После вычисления интеграла находим

$$p = \frac{m \sin 2\alpha + \sqrt{N} v^2 \sin 2\beta}{2(v^2 \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha)} + \frac{v^2 \sin^2 \beta (D + A \ln v)}{v^2 \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha} + m \operatorname{ctg} \alpha.$$

Согласно полученному решению, поверхность $r = R(\theta)$ «нагружена» нормальными распределенными силами $\sigma_n(\theta)$. Из (3.8), (3.9) вытекает

$$\begin{aligned} \sigma_n = -p_1 + \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{G^2}{G+H} + \left[4 - \frac{G^2}{N(G+H)} \right] \tau^2 + \frac{G}{\sqrt{N(G+H)}} \sqrt{N-\tau^2}} \right\} - \\ - 3 \int_{\alpha}^{\theta} \tau d\theta - 2A \int_{\alpha}^{\theta} \frac{\tau d\theta}{\sqrt{\frac{G^2}{G+H} + \left[4 - \frac{G^2}{N(G+H)} \right] \tau^2 + \frac{G}{\sqrt{N(G+H)}} \sqrt{N-\tau^2}}} + \\ + \sqrt{\frac{G+H}{N}} \int_{\alpha}^{\theta} \sqrt{N-\tau^2} \operatorname{ctg} \theta d\theta. \end{aligned}$$

Влияние этих нагрузок на напряженное состояние пластической области вдали от свободной поверхности полагаем несущественным. Зависимость между силой давления и глубиной внедрения имеет вид

$$P = \frac{\pi p \sin^3 \alpha}{v^3 \cos^2 \beta} h^2.$$

Численное решение задачи (2.3), (2.4), (3.11) получается с помощью следующего простого алгоритма. Для выбранного значения параметра β решается двухточечная краевая задача (2.3), (2.4). Затем проверяется условие (3.11). Путем варьирования β достигается удовлетворение условия (3.11). В итоге определяются τ , β и A . На основании численных расчетов на рис. 4 построены графики $\beta(\alpha)$ и $p(\alpha)$ для изотропного (штриховая линия) и анизотропного (сплошная) материалов для параметров анизотропии $G/N = 6$, $H/N = 2,5$ при $m = 0,5$. В случае изотропного материала $G/N = H/N = 2$. Графики показывают существенное влияние анизотропии на распределение пластической зоны и удельное давление конуса на среду.

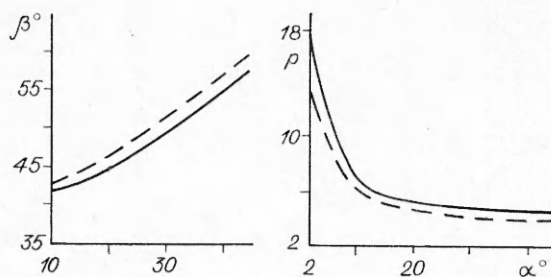


Рис. 4

Проведено также численное изучение границ изменения α . При $\alpha \rightarrow \pi/2$ $\beta \geq \pi/2$, что недопустимо согласно постановке задачи, так как $R_2 \rightarrow \infty$. Это зависит также от параметров анизотропии и значения m . Для всех рассмотренных в численных исследованиях возможных значений параметров анизотропии при $\alpha < 80^\circ$ такое явление не наблюдалось, т. е. полученное решение для этих α вполне применимо.

Автор благодарит М. А. Задояна за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Р. Математическая теория пластичности. — М.: Гостехиздат, 1956.
2. Задоян М. А. Вдавливание жесткого конуса в идеальное жесткопластическое полупространство // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1984.
3. Новиков С. С. Внедрение жесткого клина в анизотропное полупространство // Исследования в области пластичности и обработки металлов давлением. — Тула: ТПИ, 1980.
4. Дудукаленко В. В. О вдавлении жесткого штампа в анизотропную пластическую среду // ПММ. — 1960. — Т. 24, № 5.
5. Багдоев А. Г., Ванцян А. А. Исследование проникания тонкого твердого тела в трансверсально-изотропную среду // Изв. АН АрмССР. Механика. — 1987. — № 4.
6. Акопян А. Г. Внедрение жесткого цилиндрического тела в пластически анизотропную трубу // Изв. АН АрмССР. Механика. — 1986. — № 5.
7. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.
8. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. — М.: Наука, 1978.

г. Ереван

Поступила 29/IX 1989 г.,
в окончательном варианте — 25/IV 1990 г.

УДК 539.375

Е. В. КОВАЛЕНКО

РАСЧЕТ ИЗНОСА ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ С ТОНКИМ ПОРИСТО-УПРУГИМ ВКЛАДЫШЕМ

В рамках модели Био пористо-упругой среды рассматривается контактная задача с износом для тонкого кольца, поры которого заполнены вязкой сжимаемой жидкостью. По внешнему контуру кольцо соединено с недеформируемой обоймой, а по части внутренней поверхности контактирует с валом, вращающимся вокруг своей оси. Предполагается, что износ вала пренебрежимо мал по сравнению с износом втулки, инерционными эффектами в кольце можно пренебречь, сила трения связана с контактным давлением законом Кулона. Получены явные асимптотические разложения для основных характеристик контактного взаимодействия (осадки точек кольца под валом, угла контакта, контактного давления), справедливые при малом и большом временах. Выявлены диапазоны их стыковки.

1. Рассмотрим плоскую (случай плоской деформации) контактную задачу об изнашивании тонкого кольца (втулки подшипника скольжения) внутреннего радиуса R и наружного R_2 . По внешнему контуру кольцо соединено с недеформируемой обоймой, а по части внутренней поверхности контактирует с валом радиуса $R_1 = R - \Delta$ ($\Delta/R_2^{-1} \ll 1$, $\Delta/R_2^{-1} \ll 1$), вращающимся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω и передающим на втулку усилие $F(t) = PH(t)$, где $H(t)$ — функция Хевисайда