

УДК 533.6.011

**ЭФФЕКТИВНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА
ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ
В ТРАНСЗВУКОВОМ ДИАПАЗОНЕ СКОРОСТЕЙ ****М. А. Найда, А. С. Фонарев**Центральный аэрогидродинамический институт,
140160 Жуковский-3 Московской области*

Определение интегральных аэродинамических характеристик — одна из главных целей любой аэродинамической задачи. В настоящей работе описывается новый эффективный алгоритм расчета волнового сопротивления тел вращения в трансзвуковом потоке идеального газа в рамках теории малых возмущений.

При численном исследовании задач обтекания обычным методом вычисления аэродинамических коэффициентов является интегрирование распределения давления по поверхности тела. Следует отметить, что на точность данного способа определения интегральных характеристик могут повлиять погрешности численного расчета, особенно в носовой и хвостовой областях. Как показывают расчеты, при нахождении коэффициентов подъемной силы и момента влияние этих локальных ошибок незначительно и традиционный способ приемлем как для стационарных, так и для нестационарных задач.

Иначе обстоит дело с определением волнового сопротивления. Известно [1, 2], что ошибки интегрирования, связанные как с погрешностями численного анализа, так и с нарушениями предположений трансзвуковой теории малых возмущений в отдельных точках на теле, могут привести при обычном подходе к неверным результатам вплоть до получения отрицательных значений коэффициента сопротивления. Поэтому в настоящей работе используется другой метод определения волнового сопротивления тел, менее чувствительный к ошибкам интегрирования. Идея замены процедуры интегрирования давления по поверхности тела другой, не использующей интегрирование в местах возможного нарушения предположений трансзвуковой теории малых возмущений, была предложена в [2] и к настоящему времени получила развитие в исследованиях, в которых разработаны методы определения как стационарного, так и нестационарного волнового сопротивления при околозвуковых скоростях.

Так, в [1, 2] предложен способ нахождения волнового сопротивления в стационарном потоке около тонких профилей и крыльев с помощью интегрирования вдоль скачков уплотнения, замыкающих сверхзвуковые зоны. Данный метод представляется менее чувствительным к ошибкам численного интегрирования, связанным с особенностями теории малых возмущений. Кроме того, как отмечено в [1], в рассматриваемых режимах вязкость влияет главным образом на положение и интенсивность ударной волны лишь у ее основания. Верхняя же часть ударной волны, формируемая сжатием волн сжатия, не зависит от взаимодействия ударной волны с пограничным слоем. Локальные ошибки, обусловленные нарушением предпосылок теории малых возмущений (например, в окрестности

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01207П).

затупленного носка тела), также мало влияют на положение и интенсивность скачков, замыкающих сверхзвуковые зоны.

Аналогичный подход к определению стационарного волнового сопротивления использовался в [3], где полагалось, что контурный интеграл от продольной составляющей количества движения вдоль скачков равен контурному интегралу по поверхности тела.

В [4, 5] проведено обобщение метода на случай нестационарного плоского трансзвукового потока и получены зависимости от времени аэродинамических характеристик профилей крыла для различных переходных процессов, таких, например, как взаимодействие профиля с порывом ветра, с движущейся ударной волной и т. д.

Полученные в цитированных выше работах результаты расчетов сопротивления для профилей показывают хорошее согласование с экспериментальными данными, что свидетельствует о надежности и эффективности метода. Представляет большой интерес распространить этот метод расчета волнового сопротивления на случай обтекания осесимметричных тел, имеющих некоторые особенности и не рассмотренный в литературе. В данной работе получена формула сопротивления для тел вращения в стационарном трансзвуковом потоке, разработан численный алгоритм расчета трансзвукового обтекания тел вращения (осесимметричный аналог метода переменных направлений с монотонным алгоритмом Энгквиста — Ошера), проведено сравнение численных расчетов волнового сопротивления некоторых тел вращения с экспериментальными результатами. В рамках трансзвукового правила эквивалентности получены численные результаты для сопротивления сложной трехмерной конфигурации летательного аппарата удлиненной формы в околосзвуковом диапазоне скоростей и проведено их сравнение с экспериментальными.

1. Постановка задачи. Задача о трансзвуковом обтекании удлиненного тела вращения может быть рассмотрена в рамках нелинейной трансзвуковой теории малых возмущений. При этом для получения стационарных решений будем исходить из нестационарного уравнения, которое запишем в безразмерном виде

$$A \varphi_{xt} = B \varphi_{xx} + \frac{1}{r} (r \varphi_r)_r \quad (1.1)$$

$$(A = 2 M_\infty^2, \quad B = 1 - M_\infty^2 - (\gamma + 1) M_\infty^2 \varphi_x).$$

Здесь φ — потенциал возмущенной скорости, отнесенный к скорости набегающего потока U_∞ и длине обтекаемого тела L ; независимые пространственные переменные (продольная координата x и поперечная r) отнесены к L ; время t отнесено к L/U_∞ ; γ — показатель адиабаты; M_∞ — число Маха невозмущенного потока.

В качестве граничных условий на бесконечности для уравнения (1.1) используются так называемые неотражающие условия, предложенные в [6] для плоского трансзвукового течения. Выведение этих соотношений основано на анализе характеристического уравнения, получаемого из уравнения трансзвуковой теории малых возмущений. Поскольку характеристическое уравнение в осесимметричном случае имеет точно такой же вид, как и в плоском, то можно воспользоваться результатами [6] для получения асимптотических соотношений на больших расстояниях в случае осевой симметрии:

$$\varphi_t - B \varphi_x / A = 0, \quad x \rightarrow -\infty; \quad \varphi_x = 0, \quad x \rightarrow \infty; \quad \varphi_r + \sqrt{B} \varphi_x = 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Граничное условие на теле требует особого рассмотрения. Поскольку в цилиндрической системе координат существует особенность в исходном

уравнении при $r = 0$, граничное условие на теле сносить на ось симметрии некорректно, его следует задавать на некоторой цилиндрической поверхности малого радиуса, разделяя всю область решения на внешнюю и внутреннюю и проводя соответствующее сращивание решений.

Известно [7], что течение вблизи осесимметричного тела во внутренней области описывается уравнением

$$(r\varphi_r)_r = 0.$$

Проинтегрировав его один раз, получим

$$r\varphi_r = f(x), \quad (1.2)$$

где $f(x)$ — пока произвольная функция. Ее можно найти, используя условие непротекания на поверхности тела $\varphi_r = R'(x)$ ($R(x)$ — форма тела вращения). Таким образом,

$$f(x) = RR'(x).$$

Окончательно граничное условие для внешней области запишем в виде

$$\lim_{r \rightarrow 0} r\varphi_r = \frac{S'(x)}{2\pi}$$

($S(x)$ — площадь поперечного сечения обтекаемого тела).

При численном решении задачи данное соотношение ставится на поверхности цилиндра достаточно малого радиуса r_* . Конкретная величина r_* определяет границу сращивания решений и должна выбираться из условия, что дальнейшее ее уменьшение практически не влияет на распределение давления по телу, получаемое при решении краевой задачи. Используемая процедура выбора оптимальной величины в зависимости от числа Маха набегающего потока и толщины тела описана в [8, 9].

2. Метод расчета волнового сопротивления. Прежде чем применить интегральную теорему импульсов для расчета волнового сопротивления тела вращения методом интегрирования по скачку, выполним некоторые преобразования. Это необходимо сделать, так как в осесимметричном случае выражение для давления на теле в предположении теории малых возмущений отличается от плоского случая и, кроме того, процедура интегрирования аналогично плоскому случаю здесь неприменима из-за особенностей осевой структуры течения.

Выражение для коэффициента давления в предположении малости возмущений записывается в виде

$$c_p = -2u - v^2.$$

Поперечная составляющая скорости на теле известна из граничных условий, для определения продольной составляющей проинтегрируем еще раз соотношение (1.2):

$$\varphi = \frac{S'_x}{2\pi} \ln r + g(x).$$

Здесь $g(x)$ — функция, определяемая из сращивания с решением внешней задачи. Для продольной составляющей скорости получаем

$$u = \varphi_x = \frac{S''_{xx}}{2\pi} \ln r + g'_x. \quad (2.1)$$

Поскольку краевая задача предполагается решенной, т. е. поле возмущенной скорости известно, то известно и распределение продольной составляющей u_* на поверхности воображаемого цилиндра при $r = r_*$. Сращивая

внутреннее и внешнее решения при $r = r_*$, найдем значение g' в (2.1) и тем самым искомое распределение продольной составляющей скорости по поверхности тела:

$$u(x, R) = \frac{S''_{xx}}{2\pi} \ln \frac{R}{r_*} + u_*.$$

Теперь можно определить коэффициент волнового сопротивления тела как интеграл от давления на теле:

$$c_x = - \int_{-0,5}^{0,5} 2\pi R R'_x \left(2u_* + \frac{S'_{xx}}{\pi} \ln \frac{R}{r_*} + (R'_x)^2 \right) dx.$$

Учтем условие (1.2) и запишем это выражение в виде суммы двух интегралов:

$$c_x = -4\pi \int_{-0,5}^{0,5} r_* u_* v_* dx - 2\pi \int_{-0,5}^{0,5} \left(\frac{S''_{xx}}{\pi} \ln \frac{R}{r_*} + (R'_x)^2 \right) R R'_x dx. \quad (2.2)$$

Второе слагаемое можно проинтегрировать:

$$2\pi \int_{-0,5}^{0,5} \left(\frac{S''_{xx}}{\pi} \ln \frac{R}{r_*} + (R'_x)^2 \right) R R'_x dx = \frac{(S'_x)^2}{2\pi} \ln \frac{R}{r_*} \Big|_{x=-0,5}^{x=0,5}. \quad (2.3)$$

Поскольку в рамках трансзвуковой теории малых возмущений рассматриваются только тонкие и, как правило, замкнутые тела, то слагаемые (2.3) обращаются в нуль, так как предел $R^2 \ln R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow 0$ в носовой и хвостовой частях тела. В случае же тела с радиусом в донной части, не равным нулю, добавка сопротивления — член при $x = 0,5$ — может быть не равна нулю. В этом случае ее можно вычислить в соответствии с (2.3). Таким образом, в выражении для сопротивления (2.2) неизвестным остается первое слагаемое, которое и необходимо определить.

Как уже отмечалось, расчет волнового сопротивления тела путем интегрирования давления по телу из-за погрешностей часто приводит к неверному результату вплоть до получения отрицательного значения. Чтобы избежать этого, применим подход, подобный предложенному в [2] для плоского случая. Рассмотрим систему, состоящую из стационарного аналога уравнения (1.1) и уравнения, выражающего условие отсутствия завихренности в потоке:

$$\begin{aligned} r(1 - M_\infty^2)u_x - r(\gamma + 1)M_\infty^2 u u_x^2 + (rv)_r &= 0, \\ u_r - v_x &= 0. \end{aligned}$$

Умножая первое уравнение системы на u , а второе на rv и складывая их, получим соотношение, имеющее дивергентную форму:

$$\left(r \left(\frac{1 - M_\infty^2}{2} u^2 - \frac{\gamma + 1}{3} M_\infty^2 u^3 - \frac{v^2}{2} \right) \right)_r + (r u v)_r = 0.$$

Беря от этого выражения двойной интеграл по всей расчетной области течения и сводя его при помощи формулы Грина к криволинейному интегралу по замкнутому контуру (рис. 1), находим

$$\oint r \left(\frac{1 - M_\infty^2}{2} u^2 - \frac{\gamma + 1}{3} M_\infty^2 u^3 - \frac{v^2}{2} \right) dr - r u v dx = 0. \quad (2.4)$$

При $M_\infty \leq 1$ асимптотика дальнего поля течения такова [1], что интегралы по внешним границам стремятся к нулю при удалении границ расчетной области к бесконечности и (2.4) можно записать как

$$\int_s r \left[\frac{1 - M_\infty^2}{2} u^2 - \frac{\gamma + 1}{3} M_\infty^2 u^3 - \frac{v^2}{2} \right] dr - \int_s r [u v] dx - \int_{-0,5}^{0,5} u_* v_* r_* dx = 0,$$

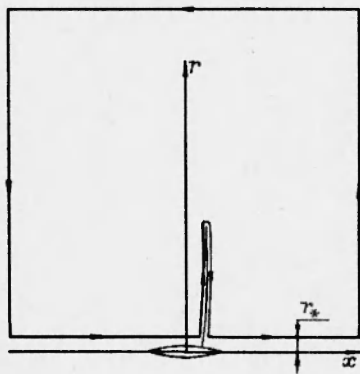


Рис. 1

где индекс s обозначает интегрирование вдоль ударной волны или нескольких ударных волн, а квадратные скобки — скачок заключенной в них величины при переходе через ударную волну. Полученное выражение означает, что первое слагаемое в выражении (2.2) с точностью до множителя 4π может быть выражено через интегралы по скачку. Подынтегральные выражения в интегралах по скачку отличаются от соответствующих выражений для плоского течения [1] только наличием независимой координаты r , которая непрерывна при переходе через скачок. Опуская промежуточные выкладки, аналогичные выкладкам [1], приведем

окончательный результат в виде

$$\int_{-0,5}^{0,5} u_* v_* r_* dx = -M_\infty^2 \frac{\gamma + 1}{12} \int_s r [u]^3 dr,$$

и тем самым

$$c_x = 4\pi \frac{\gamma + 1}{12} M_\infty^2 \int_s r [u]^3 dr. \quad (2.5)$$

В отличие от первого интеграла в выражении (2.2), величина которого получается как малая разность близких по значению величин и поэтому содержит недопустимо большие погрешности (как уже отмечалось, результат может оказаться даже отрицательным), интеграл (2.5) всегда положителен, так как подынтегральная функция положительна по физическому смыслу задачи.

3. Численный метод и результаты расчета. Поставленная краевая задача для уравнения (1.1) решалась численно методом установления по времени. Для этого разработан осесимметричный вариант неявного метода переменных направлений с использованием монотонного алгоритма Энгквиста — Ошера. Ранее этот метод был реализован в [10–12] для расчета плоских нестационарных трансзвуковых течений. Использование метода переменных направлений позволяет разбить задачу на два этапа. На первом этапе осуществляется проход по всем горизонтальным линиям расчетной сетки в x -направлении и вычисляется промежуточное значение потенциала, которое затем используется на втором этапе (проход по всем вертикальным линиям в r -направлении) для получения значения потенциала на следующем временном слое. Отметим, что данный метод не является итерационным, а значение потенциала на следующем временном слое вычисляется при непосредственном использовании значения потенциала на предыдущем временном слое через промежуточный потенциал

путем решения системы линейных уравнений в то время, как само дифференциальное уравнение нелинейно.

Несмотря на то что разыскивается стационарное решение уравнения (1.1), граничное условие на левой границе содержит нестационарный член. Однако именно такое граничное условие способствует тому, что возмущение от тела, достигшее входной границы, не отражается обратно внутрь расчетной области, чем достигается большая скорость установления стационарного решения.

Численные расчеты проводились на прямоугольной сетке, состоящей из 121 узла в x -направлении и 81 в r -направлении. Сетка сгущается в областях передней и задней кромок и разрежается при подходе к внешним границам расчетной области, которые расположены на расстоянии 30 длин тела во всех направлениях. На теле, расположенном симметрично оси x ($|x| \leq 0,5$), имеется 81 узел.

В качестве начальных условий, как правило, использовалось поле потенциала от близкого варианта. При этом новое решение достигалось примерно за 120–150 итераций. Для получения самого первого варианта начальное поле потенциала задавалось нулевым, число Маха постепенно увеличивалось до заданного трансзвукового значения. В этом случае стационарное решение достигалось за 180–200 итераций.

Для расчета сопротивления методом интегрирования вдоль скачков был разработан алгоритм их нахождения по резкому уменьшению местного сверхзвукового числа Маха в поле потока. Описанный алгоритм применен для расчета стационарного волнового сопротивления тел вращения простой формы и в рамках трансзвукового правила эквивалентности волнового сопротивления схематизированного гиперзвукового летательного аппарата достаточно сложной конфигурации.

Приведем результаты численного расчета стационарного волнового сопротивления трех тел вращения с относительной толщиной 10 % в трансзвуковом диапазоне чисел Маха M_∞ от 0,9 до 1,07. Каждое тело состоит из трех частей: носовой, близкой к эллипсоиду вращения, центральной, представляющей собой цилиндр, и хвостовой, имеющей веретенообразную форму. Хвостовая часть у всех трех тел одинаковая и составляет половину их длины. Носовая часть у первого тела занимает 20 % всей длины, у второго — 30 %, у третьего — 40 %. Сопряжение носовой части с центральной и центральной с хвостовой у всех трех тел гладкое, т. е. производная функции $R(x)$ в этих точках непрерывна. Обтекание данных тел достаточно подробно изучено экспериментально в [13], где приведены описание их геометрических форм и данные по волновому сопротивлению.

На рис. 2–4 представлены рассматриваемые тела и зависимости их волнового сопротивления от числа Маха: сплошная кривая — результат численного расчета, штриховая — эксперимент [13]. Видно вполне удовлетворительное согласование численных и экспериментальных данных. Отметим, что численный алгоритм позволяет рассчитывать не только дозвуковые режимы $M_\infty < 1$, но и сверхзвуковые со значениями M_∞ , немного превышающими единицу. Соответственно в этих случаях перед телом появляются головные ударные волны или присоединенные скачки уплотнения и рассматриваемый алгоритм расчета сопротивления должен включать интегрирование и вдоль этих волн.

На рис. 2–4 штрихпунктирной кривой приведен результат расчета сопротивления методом интегрирования распределения давления по телу, полученного при численном решении поставленной краевой задачи для уравнения (1.1). Видно, что эти результаты значительно отличаются как от экспериментальных, так и от полученных путем интегрирования вдоль скачков; к тому же в достаточно большом диапазоне значений M_∞ они фи-

зически неверны. Этот факт находится в согласии с [2], где также получались отрицательные значения волнового сопротивления для профилей при интегрировании численных значений распределения давления по их контуру.

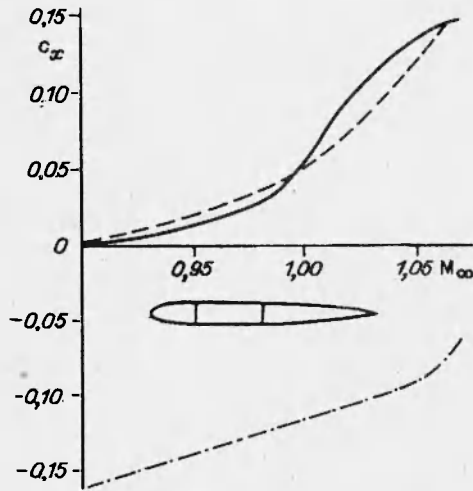


Рис. 2

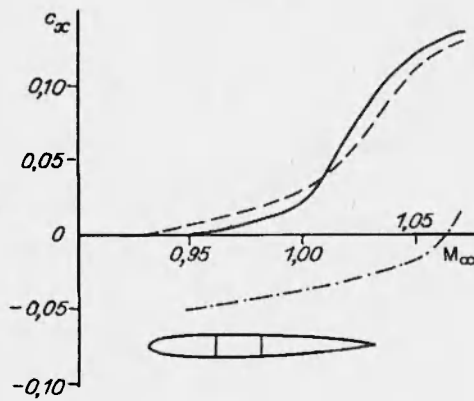


Рис. 3

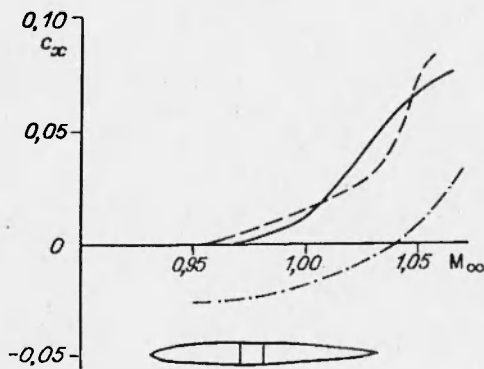


Рис. 4

Разработанный метод был применен для расчета волнового сопротивления схематизированного гиперзвукового летательного аппарата с использованием трансзвукового правила эквивалентности, из которого следует, что волновое сопротивление удлиненного тела сложной конфигурации совпадает в первом приближении с сопротивлением тела вращения, имеющего одинаковое с реальным телом распределение площадей поперечного сечения. На рис. 5 изображены рассматриваемый схематизированный летательный аппарат и соответствующее ему эквивалентное тело вращения, которое имеет кормовой срез. Его обтекание в донной части не может быть изучено методами теории малых возмущений. Поэтому тело рассматривалось как полубесконечное с присоединенной к нему сзади цилиндрической державкой постоянного радиуса, а давление, действующее на донную часть, принималось равным статическому давлению в набегающем потоке. Отметим, что обычно экспериментальные результаты, получаемые при разных условиях трубных испытаний в донной части (различия в размерах и конструкции державок и т. д.) с помощью специальных методик, также приводятся к унифицированному донному давлению, равному статическому давлению на входе в рабочую часть аэродинамической трубы.

При расчете сопротивления эквивалентного тела вращения учитывалось, что радиус тела в кормовой части $R \neq 0$ при $x = 0,5$ и второе слагаемое в формуле (2.2) не равно нулю, однако расчет показал, что оно на два порядка меньше первого слагаемого.

На рис. 5 приведена зависимость волнового сопротивления от числа Маха рассматриваемого летательного аппарата и эквивалентного ему тела вращения. Экспериментальная штриховая кривая получена в ЦАГИ и соответствует волновому сопротивлению модели летательного аппарата, рассчитанному как разность значения полного сопротивления при заданном числе Маха и при $M_\infty = 0,7$ для докритического режима обтекания. Штрихпунктирная кривая отвечает сопротивлению, вычисленному методом интегрирования по телу. Видно, что значения волнового сопротивления, вычисленные методом интегрирования по скачку (сплошная кривая) в этом случае значительно ближе к экспериментальным, чем в случае интегрирования по телу. Следует учесть, что модель рассматриваемого летательного аппарата достаточно сложная, она имеет, в частности, мотогондолу с протоком и, кроме того, соответствует толстому эквивалентному телу вращения (толщина 14 %). Это, по-видимому, и является источником погрешностей в расчетной кривой, в частности в положении максимума сопротивления в сверхзвуковом диапазоне скоростей.

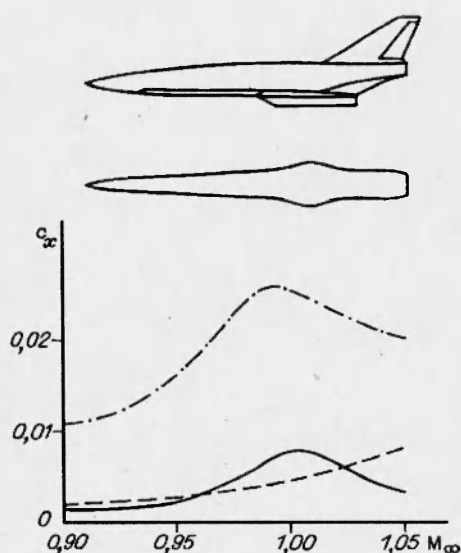


Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989.
2. Murman E. M., Cole J. D. Inviscid drag at transonic speeds. N. Y., 1974. (Paper/AIAA; N 74-0540).
3. Steger J. L., Baldwin B. S. Shock waves and drag in the numerical calculation of compressible, irrotational transonic flow // AIAA J. 1973. V. 11, N 7.
4. Фонарев А. С. Aerodynamics of wing airfoils in nonstationary transonic flows // Russian J. of Computational Mech. 1993. N 4.
5. Фонарев А. С. Профиль в трансзвуковом потоке при воздействии порывов ветра и слабых ударных волн // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 3.
6. Kwak D. Nonreflecting far-field boundary conditions for unsteady transonic flow computation // AIAA J. 1981. V. 19, N 11.
7. Эшли Х., Лэндал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969.
8. Krupp J. A., Murman E. M. The numerical calculation of steady transonic flow past thin airfoils and slender bodies. N. Y., 1971. (Paper / AIAA; N 71-0556).
9. Третьякова И. В., Фонарев А. С. Влияние проницаемых границ трансзвукового потока на обтекание тел вращения // Учен. зап. ЦАГИ. 1978. Т. 9, № 6.
10. Ballhaus W. F., Goorjian P. M. Implicit finite-difference computations of unsteady transonic flows about airfoils // AIAA J. 1977. V. 15, N 12.
11. Goorjian P. M., Meagher M. E., Buskirk R. V. Monotone switches in implicit algorithms for potential equations applied to transonic flows // AIAA J. 1985. V. 23, N 4.

12. **Goorjian P. M., Buskirk R. V.** Implicit calculations of transonic flow using monotone methods. N. Y., 1981. (Paper / AIAA; N 81-0331).
13. **Петров К. П.** Аэродинамика элементов летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1985.

Поступила в редакцию 5/VII 1994 г.
