

ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН
КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

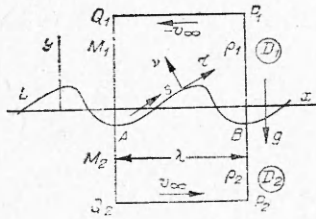
Р. Л. Куляев

(Новосибирск)

Задаче о неустановившемся течении жидкости со свободной границей посвящено немало исследований. Так, в [1] и [2] доказаны теоремы существования и единственности решения, в ряде работ предложены алгоритмы численного решения, основанные на применении различных методов сеток [3-6] или методов теории потенциала [7-9].

В данной статье рассмотрены двумерные потенциальные волны конечной амплитуды на поверхности раздела двух тяжелых жидкостей разной плотности. Исходная задача сведена к задаче Коши для системы двух интегродифференциальных уравнений. Построен алгоритм численного решения этой системы. Приведены результаты расчетов.

1. Рассматривается плоское движение в поле силы тяжести двух невязких несжимаемых жидкостей разной плотности. Течение полагается непрерывным во всей плоскости, потенциальным вне линии раздела жидкостей и периодическим по горизонтальному направлению.



Ф и г. 1

Пусть декартова система координат x, y движется в горизонтальном направлении со скоростью, равной полусумме скоростей течения в бесконечном удалении от линии раздела L , ось y направим вертикально вверх (фиг. 1). В верхней (D_1) и нижней (D_2) областях течения скорость жидкости $\mathbf{V}=(V_x, V_y)$ удовлетворяет уравнениям

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{V}=0, \operatorname{rot} \mathbf{V}=0, (x, y) \in D_n, n=1, 2$$

и следующим граничным условиям: возмущенная скорость течения затухает при удалении от линии раздела

$$(1.2) \quad \mathbf{V}(x, y, t) \rightarrow \begin{cases} (-v_\infty, 0), & y \rightarrow +\infty \\ (v_\infty, 0) & y \rightarrow -\infty \end{cases}$$

жидкости не протекают через линию раздела

$$(1.3) \quad \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, n=1, 2,$$

перепад гидродинамического давления на линии раздела подчиняется закону Лапласа

$$(1.4) \quad p_1 - p_2 = \mu k.$$

Здесь t — время; $v_\infty = \text{const}$; \mathbf{v} — орт нормали к L ; \mathbf{v} — скорость перемещения линии L ; \mathbf{v}_n и p_n — предельные значения скорости \mathbf{V} и давления p соответственно при подходе к L из области D_n ; μ — коэффициент поверхностного натяжения; k — кривизна линии раздела, причем $k < 0 (k > 0)$, если область D_2 выпукла (вогнута) в окрестности рассматриваемой точки.

Начальное поле скоростей

$$(1.5) \quad \mathbf{V}(x, y, 0) = \mathbf{V}_0(x, y)$$

предполагается известным и удовлетворяющим условиям (1.1) — (1.3).

Поставленная задача нелинейна, поскольку линия раздела $L(t)$ заранее не известна.

2. Выведем уравнения движения волновой поверхности L , предполагая, что она не имеет точек самопересечения и что координаты ее точек и разрыв скорости $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ как функции дуговой абсциссы s непрерывно дифференцируемы до некоторого порядка (требуемый порядок гладкости уточним ниже в п. 4).

Скачок скорости течения на линии L в силу условия (1.3) удовлетворяет равенству

$$(2.1) \quad v_2 - v_1 = \gamma \partial \zeta / \partial s,$$

где функция γ вещественна; $\zeta = \xi + i\eta$ — комплексная координата точек линии раздела. Решение соответствующей краевой задачи Римана [10] позволяет с учетом периодичности течения, условий (1.2) и (2.1) представить поле скоростей в виде

$$(2.2) \quad \bar{V}(z, t) = \frac{1}{2\lambda i} \int_0^{l(t)} \gamma(s, t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\lambda} \{z - \zeta(s, t)\} ds, \quad z \in L,$$

где $\bar{V} = V_x - iV_y$ — комплексная скорость; λ — длина волны; l — длина контура волны; $z = x + iy$, а положительным обходом контура L считается тот, при котором область D_1 на фиг. 1 остается слева. Последнее равенство описывает поле скоростей, индуцированное вихревой поверхностью с интенсивностью γ . Отсюда для выполнения условия непротекания (1.3) достаточно принять в качестве скорости перемещения границы раздела полусумму граничных значений скорости течения, а именно, $v = (v_1 + v_2)/2$. Тогда величина v определится из формул Сохоцкого—Племели [10] следующим сингулярным интегралом:

$$(2.3) \quad \bar{v}(s, t) = \frac{1}{2\lambda i} \int_0^{l(t)} \gamma(\sigma, t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\lambda} \{\zeta(s, t) - \zeta(\sigma, t)\} d\sigma.$$

Отметим два следствия последнего равенства:

$$(2.4) \quad \int_0^{l(t)} v_\tau(s, t) ds = 0,$$

$$(2.5) \quad \int_0^{l(t)} v_\nu(s, t) ds = 0,$$

где v_τ и v_ν — касательная и нормальная к контуру волны компоненты скорости \mathbf{v} соответственно (см. фиг. 1).

В системе координат, связанной с произвольной точкой линии L и движущейся со скоростью \mathbf{v} , интеграл Коши—Лагранжа уравнений движения жидкости имеет вид

$$(2.6) \quad \frac{p_n}{\rho_n} + \frac{\delta \Phi_n}{\delta t} + \frac{v_{\tau n}^2 - v^2}{2} + g\eta = F_n(t), \quad n = 1, 2.$$

Здесь ρ_n — плотность жидкости; дифференцирование $\delta/\delta t$ производится в подвижной системе координат, так что $\mathbf{v} = (\delta\xi/\delta t, \delta\eta/\delta t)$; Φ_n и $v_{\tau n} =$

$=v$ — предельные значения потенциала скорости и относительной скорости жидкости соответственно при подходе к L из области D_n ; g — ускорение силы тяжести; F_n — произвольные функции. С учетом формул (2.1), (2.3) и равенств

$$v_{r1} = -\frac{\gamma}{2} \tau, \quad v_{r2} = \frac{\gamma}{2} \tau,$$

$$(2.7) \quad \Phi_n(s, t) = \Phi_n(0, t) + \int_0^s \left\{ v_\tau + (-1)^n \frac{\gamma}{2} \right\} d\sigma, \quad n = 1, 2,$$

где τ — орт касательной к линии L (см. фиг. 1), можно из (2.6) получить для перепада давления на контуре волны выражение

$$p_1(s) - p_2(s) = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta t} \int_0^s \{ (\rho_1 + \rho_2) \gamma + 2(\rho_2 - \rho_1) v_\tau \} d\sigma +$$

$$+ \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} \left(2g\eta + \frac{\gamma^2}{4} - v^2 \right) + \chi(t).$$

Здесь начальная точка отсчета дуговой абсциссы движется со скоростью $v(0, t)$, а χ — некоторая функция, зависящая от $F_1(t)$, $F_2(t)$, $\Phi_1(0, t)$, $\Phi_2(0, t)$. Исключая в последнем равенстве функцию χ и вводя безразмерный параметр

$$(2.8) \quad R = (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1),$$

запишем условие (1.4) в следующей форме:

$$(2.9) \quad \frac{\delta}{\delta t} \int_0^s (\gamma + 2Rv_\tau) d\sigma = \left\{ \frac{2\mu k}{\rho_1 + \rho_2} - R \left(2g\eta + \frac{\gamma^2}{4} - v^2 \right) \right\} \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=s}.$$

Условие (1.2) приводит к следующему соотношению:

$$(2.10) \quad \int_0^{l(t)} \gamma(s, t) ds = 2v_\infty \lambda.$$

Таким образом, граничные условия (1.2) — (1.4) представлены в форме равенств (2.3), (2.9) и (2.10). Однако движение контура волны определяется только уравнениями (2.3) и (2.9), потому что условие (2.10) является их следствием.

3. С целью упрощения системы (2.3), (2.9) перейдем от эйлеровой дуговой абсциссы $s \in [0, l(t)]$ к лагранжевой переменной $a \in [-\pi, \pi]$ со следующим соответствием во времени между точками профиля волны: точку $\xi(a, t) = \xi(s(a, t), t)$ переводим за время dt в точку $\xi(a, t+dt) = \xi(a, t) + v(s(a, t), t)dt$. В качестве переменной a можно взять, например, дуговую абсциссу $2\pi s/l$ в момент $t=0$. Введем функцию

$$\Gamma(a, t) = \gamma(s(a, t), t) \xi_a(a, t)$$

и перейдем к безразмерным линейным величинам, принимая за единицу длины величину $\lambda/(2\pi)$. Тогда систему (2.3), (2.9) можно записать в следующей форме:

$$(3.1) \quad \bar{\xi}_t(a, t) = \frac{i}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(\alpha, t) \operatorname{ctg} \frac{\xi(\alpha, t) - \xi(a, t)}{2} d\alpha,$$

$$(3.2) \quad \Gamma_t(a, t) + R \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_l(\alpha, t) K(a, \alpha, t) d\alpha = H(a, t),$$

где

$$(3.3) \quad K(a, \alpha, t) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left\{ \zeta_a(a, t) \operatorname{ctg} \frac{\zeta(a, t) - \zeta(\alpha, t)}{2} \right\},$$

$$(3.4) \quad H(a, t) = \frac{R}{2\pi} \operatorname{Im} \left\{ \zeta_a(a, t) \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(\alpha, t) \frac{\zeta_t(a, t) - \zeta_t(\alpha, t)}{1 - \cos[\zeta(a, t) - \zeta(\alpha, t)]} d\alpha \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{2\mu k}{\rho_1 + \rho_2} - R \left(2g\eta + \frac{1}{4} \frac{\Gamma^2}{|\zeta_a|^2} \right) \right\}.$$

Начальное условие (1.5) можно привести к виду

$$(3.5) \quad \Gamma(a, 0) = \Gamma_0(a), \quad \zeta(a, 0) = \zeta_0(a),$$

где Γ_0 и ζ_0 — заданные функции. Таким образом, исходная задача (1.1) — (1.5) сводится к задаче Коши с начальными данными (3.5) для системы уравнений (3.1) — (3.4). Аналогичная система приведена в [11] для случая $\mu=0$.

Укажем следующие инварианты системы (3.1) — (3.4):

$$(3.6) \quad I_\nu = \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma(a, t) da = 4\pi\nu_\infty, \quad I_\tau - iI_\nu = \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_a(a, t) \bar{\zeta}_t(a, t) da = 0,$$

где величины I_ν , I_τ , I_ν обозначают левые части равенств (2.10), (2.4) и (2.5) соответственно.

4. Пусть в окрестности момента времени $t=0$ функции $\partial\Gamma/\partial a$ и $\partial^3\zeta/\partial a^3$ существуют и гёльдеровы по a (в противном случае система (3.1) — (3.4) теряет смысл).

Тогда производные Γ_t и ζ_{tt} существуют и единственны. Действительно, определим из (3.1) скорость ζ_t и подставим ее в правую часть равенства (3.2). В полученном интегральном уравнении относительно функции Γ_t ядро K фредгольмово, если на прямой $a=\alpha$ доопределить его следующим образом:

$$K(a, a, t) = \lim_{\alpha \rightarrow a} K(a, \alpha, t) = k(a, t) |\zeta_a(a, t)|.$$

В [12] показано, что собственные значения интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром K лежат вне отрезка $[-1, 1]$. Но из (2.8) следует, что $|R| \leq 1$, поэтому при всех R функция Γ_t определяется единственным образом из уравнения (3.2). Гёльдеровость этой функции позволяет определить ускорение ζ_{tt} из выражения

$$(4.1) \quad \bar{\zeta}_{tt}(a) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \Gamma_t(\alpha) \operatorname{ctg} \frac{\zeta(a) - \zeta(\alpha)}{2} - \Gamma(\alpha) \frac{\zeta_t(a) - \zeta_t(\alpha)}{1 - \cos[\zeta(a) - \zeta(\alpha)]} \right\} d\alpha,$$

получаемого дифференцированием равенства (3.1) по t .

Аналогично можно показать, что если функции $\partial^2\Gamma/\partial a^2$ и $\partial^4\zeta/\partial a^4$ существуют и гёльдеровы по a , то производные Γ_{tt} и ζ_{ttt} существуют и единственны. При этом получается следующая схема определения временных производных функций Γ и ζ :

$$\zeta, \Gamma \rightarrow \zeta_t \rightarrow \Gamma_t \rightarrow \zeta_{tt} \rightarrow \Gamma_{tt} \rightarrow \zeta_{ttt}.$$

Эту рекуррентную схему можно продолжить бесконечно, если в окрестности рассматриваемого момента времени функции Γ и ζ имеют все производные по a .

Заметим, что с учетом равенства (4.1) система, состоящая из уравнения

$$\Gamma_t + 2R \cdot \operatorname{Re}(\zeta_a \bar{\zeta}_{tt}) = \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{2\mu k}{\rho_1 + \rho_2} - R \left(2g\eta + \frac{1}{4} \frac{\Gamma^2}{|\zeta_a|^2} \right) \right\}$$

и уравнения (3.1), эквивалентна системе (3.1)–(3.4), но имеет более компактный вид.

5. Представим комплексный потенциал течения $W = \Phi + i\Psi$ в следующей форме:

$$W(z, t) = (-1)^n v_\infty z + w(z, t),$$

где $n=1$ при $z \in D_1$, $n=2$ при $z \in D_2$, а $w \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$. Тогда правые части равенства (2.6) имеют вид $F_n = c_n + v_\infty^2/2$, где

$$c_1 = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{\rho_1} p(x, y, t) + gy \right\},$$

$$c_2 = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left\{ \frac{1}{\rho_2} p(x, y, t) + gy \right\}.$$

Величины c_1 и c_2 зависят лишь от времени, причем одна из них произвольна. С другой стороны, можно показать, что при удалении от линии раздела возмущенный потенциал w затухает экспоненциально, поэтому интегралы

$$\int_{M_n} w dz, \quad n = 1, 2,$$

где M_n — контур $ABP_n Q_n A$ (см. фиг. 1), существуют и равны нулю. Отсюда видно, что

$$\int_{AB} W_n dz = (-1)^n v_\infty \lambda [\zeta(0) + \zeta(l)]/2, \quad n = 1, 2.$$

Здесь $W_n = \Phi_n + i\Psi_n$ — предельное значение потенциала W при подходе к L из области D_n . После подстановки в последнее равенство выражения (2.7) для Φ_n и выражения

$$\Psi_n(s, t) = \Psi_n(0, t) - \int_0^s v_v(\sigma, t) d\sigma, \quad n = 1, 2$$

можно с точностью до константы определить Φ_n в точке $s=0$ следующим образом:

$$(5.1) \quad \Phi_n(0, t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^l \left\{ \left[v_\tau + (-1)^n \frac{\gamma}{2} \right] \xi + v_v \eta \right\} ds, \quad n = 1, 2.$$

Теперь для предельных значений давления на контуре волны имеем из (2.6) выражение

$$(5.2) \quad \frac{p_n}{\rho_n} = \frac{v^2 - \gamma^2/4}{2} - g\eta - \frac{\delta}{\delta t} \Phi_n(s, t) + c_n + \frac{v_\infty^2}{2}, \quad n = 1, 2,$$

в котором Φ_n определяются по формулам (2.7) и (5.1).

6. Пусть в момент времени t функции Γ и ζ известны. Значения этих функций в момент $t + \Delta t$ ищем по формуле Тэйлора

$$(6.1) \quad \Gamma(a, t + \Delta t) = \Gamma(a, t) + \Gamma_t(a, t)\Delta t + \Gamma_{tt}(a, t)(\Delta t)^2/2,$$

$$(6.2) \quad \zeta(a, t + \Delta t) = \zeta(a, t) + \zeta_t(a, t)\Delta t + \zeta_{tt}(a, t)(\Delta t)\zeta^2/2 + \zeta_{ttt}(a, t)(\Delta t)^3/6.$$

Задача вычисления временных производных от функций Γ и ζ сводится в конечном счете к задачам численного интегрирования и дифференцирования. Для их решения разобьем отрезок изменения лагранжевой переменной $[-\pi, \pi]$ на N интервалов равной длины $2\pi/N$ и в дальнейшем будем оперировать лишь со значениями функций в $N+1$ точках разбиения. Для численного интегрирования используется квадратурная формула Ньютона—Котеса седьмого порядка точности, при этом, если интеграл сингулярный, особенность выделяется. Численное дифференцирование по переменной a производится по безразностной формуле шестого порядка точности, основанной на аппроксимации функции полиномом Лагранжа шестой степени. Интегральное уравнение (3.2) сводится к системе N линейных алгебраических уравнений относительно значений функции Γ_i в точках разбиения. Эта система решается путем обращения ее матрицы по методу Гаусса—Жордана.

Известно, что поверхность контактного разрыва в жидкости неустойчива в том смысле, что начальные возмущения растут тем быстрее, чем меньше их длина волны [13]. Для подавления этой коротковолновой неустойчивости нужно ввести в расчетную схему процедуру сглаживания [14-16].

В данном алгоритме проводится сглаживание на каждом шаге вычисленных значений функций Γ и ζ . При этом в качестве сглаженного значения функции в некоторой точке принимается значение в этой точке полинома пятой степени, аппроксимирующего функцию в данной и десяти соседних точках (пяти слева и пяти справа) по методу наименьших квадратов.

Для контроля точности расчета используются инварианты (3.6) следующим образом: счет прекращается при нарушении хотя бы одного из неравенств

$$(6.3) \quad |I_\gamma - 4\pi v_\infty| < 0.1, \quad |I_\tau| < 0.1, \quad |I_v| < 0.1.$$

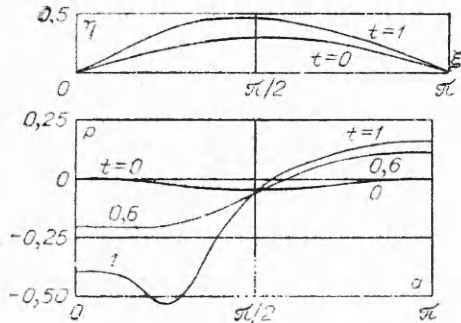
Программа, реализующая описанный алгоритм, составлена на языке АЛГИБР для вычислительной машины БЭСМ-6. При $N=60$ расчет одного шага по формулам (6.1) и (6.2) занимает 14 секунд машинного времени, а без учета производных Γ_{ii} и ζ_{iii} — 9 секунд.

7. Предварительно заметим, что во всех рассмотренных ниже вариантах единицей длины, как и в п. 3, является величина $\lambda/(2\pi)$, так что безразмерная длина волны составляет 2π .

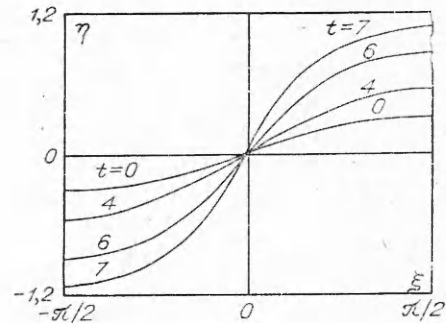
1. *Неустойчивость Кельвина—Гельмгольца* (неустойчивость линии тангенциального разрыва скорости в однородной жидкости). В качестве единицы времени берется величина $\lambda/(2\pi v_\infty)$, единицы плотности — $(\rho_1 + \rho_2)$. Начальное условие имеет вид: $\zeta(a, 0) = a + i0.1\pi \sin a$, $\Gamma(a, 0) = 2$. Счет велся от момента $t=0$ до $t=1$ с шагом $\Delta t = 0.02$. Ввиду симметрии течения относительно точки $\zeta(0, t) \equiv 0$ можно ограничиться рассмотрением полуволны. Ее эволюция в течение указанного времени показана на фиг. 2, причем отрезками прямых соединены точки с одинаковыми лагранжевыми координатами. На той же фигуре приведено распределение вдоль контура волны давления p , рассчитанного по формуле (5.2) при $c_2(t) \equiv 0$. На малом участке контура наблюдается падение давления, а также рост максимума и падение минимума кривизны. В варианте счета, в котором сглаживаются лишь функции Γ_{ii} и ζ_{iii} , эта тенденция проявляется более интенсивно. Указанное поведение кривизны контура приводит к нарушению условий (6.3) при продолжении счета.

Аналогично ведут себя кривизна контура и давление в точках контура при счете с начальным условием $\zeta(a, 0) = a + i0.1\pi \sin a$, $\Gamma(a, 0) = \sin a$, моделирующим вихревой след за колеблющимся профилем [17].

2. *Неустойчивость Рэлея—Тэйлора* (неустойчивость в поле силы тяжести линии раздела двух жидкостей разной плотности в случае, когда верхняя жидкость тяжелее нижней). Единица времени — $\{\lambda/(2\pi g)\}^{1/2}$, параметры $R = -0,1$; $\mu/(\rho_1 + \rho_2) g^{-1} \{\lambda/(2\pi)\}^{-2} = 0,01$. Начальное условие имеет вид: $\zeta(a, 0) = a + i0,1\pi \sin a$, $\Gamma(a, 0) = 0$. Счет велся от момента $t=0$ до $t=7$ с шагом $\Delta t = 0,2$. Форма линии раздела в различные моменты времени приведена на фиг. 3 (ввиду симметрии течения относительно прямых



Фиг. 2

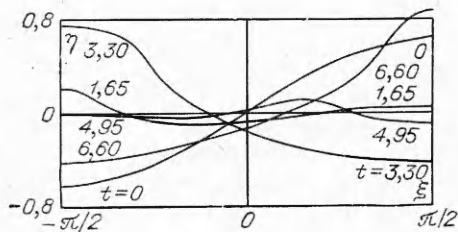


Фиг. 3

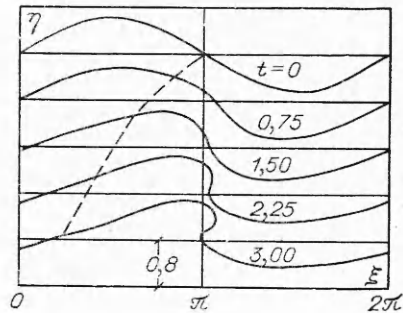
$x = -\pi/2$ и $x = \pi/2$ ограничимся рассмотрением полуволны). Одновременно с ростом амплитуды волны наблюдается возрастание кривизны контура со стремлением последней к образованию разрыва. Последнее обстоятельство приводит к нарушению условий (6.3) при продолжении счета.

Прежде чем перейти к рассмотрению вариантов 3—8, заметим, что начальные условия в этих вариантах выбирались из линейной теории [18].

3. *Стоячая гравитационная волна на поверхности раздела вода—воздух* ($R = 0,9975$). Единица времени — $\{\lambda/(2\pi g)\}^{1/2}$. Начальное условие имеет вид: $\zeta(a, 0) = a + i0,2\pi \sin a$, $\Gamma(a, 0) = 0$. Расчет велся от момента $t=0$ до $t=7$, с шагом $\Delta t = 0,1$. В отличие от предыдущих вариантов счет был остановлен лишь по истечении заданного числа шагов. Эволюция волны, приведенная на фиг. 4, характеризуется следующими особенностями



Фиг. 4



Фиг. 5

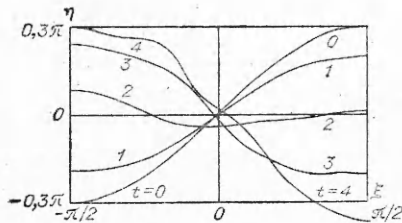
ми (так же, как и в варианте 2, ограничимся рассмотрением полуволны). За время счета волна не распрямлялась, неподвижные узловые линии отсутствуют, максимальная ордината вершины волны превосходит минимальную ординату впадины по абсолютной величине, максимальное растяжение контура волны происходит неодновременно с максимальным отклонением контура от невозмущенного уровня ($y=0$). Приведенные особенности стоячей волны согласуются с выводами работы [19].

Следует отметить, что расчет эволюции волны без учета функций Γ_{tt} и ζ_{ttt} в формулах (6. 1), (6. 2) и с тем же шагом оказался неустойчивым.

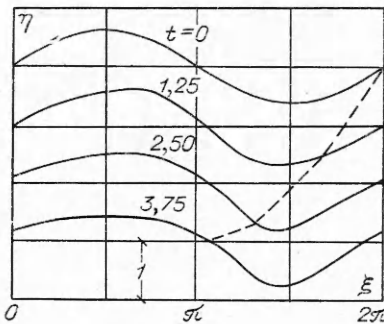
4. *Прогрессивная гравитационная волна* на поверхности раздела вода—воздух ($R=0.9975$) при отсутствии ветра ($v_\infty=0$). Единица времени — $\{\lambda/(2\pi g)\}^{1/2}$. Начальное условие имеет вид: $\zeta(a, 0)=a+i0.2\pi \sin a$, $\Gamma(a, 0)=0.4\pi \sin a$. Расчет велся до истечения заданного числа шагов от момента $t=0$ до $t=3$ с шагом $\Delta t=0.025$ и без учета производных Γ_{tt} и ζ_{ttt} . Форма волны в различные моменты времени приведена на фиг. 5 в системе координат, движущейся в положительном направлении оси x со скоростью волны бесконечно малой амплитуды. В этом случае расчетные точки как бы «скользят» по поверхности волны в обратном направлении, и для иллюстрации этого обстоятельства точки с координатой $a=0$ соединены на фигуре отрезками штриховых прямых. Примечательной особенностью волны является образование гребня, нависающего над впадиной.

Расчет волны с учетом функций Γ_{tt} и ζ_{ttt} и с тем же шагом устойчиво велся до момента $t=2.25$.

5. *Стоячая капиллярная волна* на поверхности раздела вода—воздух ($R=0.9975$). Единица времени — $\{\lambda/(2\pi)\}^{3/2} \{\mu/(\rho_1+\rho_2)\}^{-1/2}$. Начальное условие имеет вид: $\zeta(a, 0)=a+i0.3\pi \sin a$, $\Gamma(a, 0)=0$. Счет велся до истечения заданного числа шагов от момента $t=0$ до $t=4$ с шагом $\Delta t=0.05$ и без учета производных Γ_{tt} и ζ_{ttt} . Эволюция волны (фиг. 6) характери-



Фиг. 6



Фиг. 7

зуется следующими особенностями (так же, как и в варианте 2, ограничимся рассмотрением полуволны). За время счета волна не распрямлялась, неподвижные узловые линии отсутствуют, а минимальная ордината впадины превосходит максимальную ординату вершины по абсолютной величине. При наибольшем растяжении контура волны на ней возникают более мелкие волны, например, в момент $t=4$ на контуре волны имеется 10 точек перегиба.

Расчет волны с учетом функций Γ_{tt} и ζ_{ttt} и с тем же шагом оказался неустойчивым.

6. *Прогрессивная капиллярная волна* на поверхности раздела вода—воздух ($R=0.9975$) при отсутствии ветра ($v_\infty=0$). Единица времени — $\{\lambda/(2\pi)\}^{3/2} \cdot \{\mu/(\rho_1+\rho_2)\}^{-1/2}$. Начальное условие имеет вид: $\zeta(a, 0)=a+i0.2\pi \sin a$, $\Gamma(a, 0)=0.4\pi \sin a$. Счет велся до истечения заданного числа шагов от момента $t=0$ до $t=3.75$ с шагом $\Delta t=0.025$ и без учета производных Γ_{tt} и ζ_{ttt} . Форма волны для ряда моментов времени приведена на фиг. 7 в системе координат, движущейся в положительном направлении оси x со скоростью волны бесконечно малой амплитуды. Отрезками штриховых прямых соединены точки с координатой $a=0$. Расчетные точки так же, как и в случае 4, «скользят» по поверхности волны. Ха-

рактерной особенностью развития волны является то, что вершина волны стремится стать более пологой, а впадина — более крутой.

Расчет волны с учетом функций Γ_{tt} и ζ_{ttt} и с тем же шагом оказался неустойчивым.

7. *Ветровая гравитационная волна* на поверхности раздела вода — воздух ($R=0.9975$) при числе Фруда $g\lambda/(2\nu_\infty^2)=0.005$. Единица времени $\lambda/(2\nu_\infty)$. Начальное условие имеет вид: $\zeta(a, 0)=a+i0.2\pi \sin a$, $\Gamma(a, 0)=2+1.253 \sin a$. Счет велся от момента $t=0$ до $t=2.5$ с шагом $\Delta t=0.05$. Интересная особенность применяемого алгоритма в этом случае — концентрация расчетных точек вблизи подошвы волны и соответственное их разрежение в окрестности вершины, в то время как форма волны почти неизменна. Указанное обстоятельство приводит к нарушению условий (6.3) при продолжении счета.

8. *Ветровая капиллярная волна* на поверхности раздела вода — воздух ($R=0.9975$) при значении безразмерного параметра $\mu/(\rho_1 + \rho_2) \times \{\lambda/(2\pi)\}^{-1} \cdot \nu_\infty^{-2}=1$. Единица времени — $\lambda/(2\nu_\infty)$. Начальное условие имеет вид: $\zeta(a, 0)=a+i0.2\pi \sin a$, $\Gamma(a, 0)=2$. Счет велся от момента $t=0$ до $t=1.5$ с шагом $\Delta t=0.025$ без учета функций Γ_{tt} и ζ_{ttt} . Аналогично предыдущему случаю действует тенденция сгущения расчетных точек в окрестности подветренного узла волны и разрежения в окрестности наветренного узла. Эта тенденция приводит к нарушению условий (6.3) при продолжении счета. Таким образом, для численного исследования ветровых волн требуются изменения в алгоритме.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Д. Н. Горелову и А. В. Кажихову за ценные замечания.

Поступила 29 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Нелокальные задачи Коши в гидродинамике. Международный конгресс математиков в Ницце, 1970. М., «Наука», 1972.
2. *Налимов В. И.* Новая модель задачи Коши — Пуассона. Динамика сплошной среды, вып. 12. Новосибирск, «Наука», 1972.
3. *Гарипов Р. М.* Кавитационное обтекание эллипсоида. Динамика сплошной среды, вып. 1. Новосибирск, «Наука», 1969.
4. *Butler T. D.* Linc method extensions. Lecture Notes in Physics. Vol. 8, 1971.
5. *Chan R. K.-C., Street R. L., Fromm J. E.* The digital simulation of water waves—an evaluation of SUMMAC. Lecture Notes in Physics. Vol. 8, 1971.
6. *Brennen C.* Some numerical solutions of unsteady free surface wave problems using the Lagrangian description of the flow. Lecture Notes in Physics, Vol. 8, 1971.
7. *Whitney A. K.* The numerical solution of unsteady free surface flows by conformal mapping. Lecture Notes in Physics. Vol. 8, 1971.
8. *Swarztrauber P. N.* A numerical model of the unsteady free boundary of an ideal fluid. Quarterly of Appl. Math., 1973, vol. 31, N 2.
9. *Zaroodny S. J., Greenberg M. D.* On a vortex sheet approach to the numerical calculation of water waves. J. Comput. Phys., 1973, vol. 11, N 3.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3-е. М., «Наука», 1968.
11. *Birkhoff G.* Helmholtz and Taylor instability. Hydrodynamic instability. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. Vol. 13, 1962. (Русс. перев.: Гидродинамическая неустойчивость. М., «Мир», 1964).
12. *Суваревский И. В.* Об эффективном вычислении скорости и циркуляции потока при потенциальном обтекании решетки. Труды Харьков. политехн. ин-та, т. 5, сер. инж.-физ., вып. 1, 1955.
13. *Захаров В. Е., Харитонов В. Г.* Неустойчивость монохроматических волн на поверхности жидкости произвольной глубины. ПМТФ, 1970, № 5.

-
14. *Rusanov V. V.* Processing and analysis of computation results for multidimensional problems of aerohydrodynamics. Lecture Notes in Physics. Vol. 18, 1973.
 15. *Дородницын А. А.* Плоская задача неустановившихся движений тяжелой жидкости. Приложения теории функций в механике сплошной среды. Труды международного симпозиума в Тбилиси, сентябрь 1963. Т. 2. М., «Наука», 1965.
 16. *Лаверитьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973.
 17. *Горелов Д. И., Куляев Р. Л.* Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 6.
 18. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
 19. *Секерж-Зенькович Я. И.* К теории стоячих волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости. Докл. АН СССР, 1947, т. 58, № 4.
-