

типа (4.17) учитывать несколько членов разложения. В данной работе они не определяются.

В работе найдены разложения для поля концентрации и скорости μ при $\beta \gg 1$ для случая конечного положительного n , для случая $n/\beta = 0$ (1) необходимо отдельное исследование.

Поступила в редакцию
26/VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Новожилов. Докл. АН СССР, 1949, 141, 1, 151.
2. С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев. Докл. АН СССР, 1964, 157, 5, 1188.
3. С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев. Докл. АН СССР, 1964, 157, 6, 1148.
4. С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев. ПМТФ, 1965, 3, 43.
5. С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев. ПМТФ, 1965, 4, 86.
6. Б. И. Хайкин, А. Г. Мержанов. ФГВ, 1966, 2, 3, 36.
7. В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев. ПМТФ, 1972, 5.
8. Д. А. Ваганов, С. И. Худяев. ФГВ, 1969, 5, 2, 167.
9. И. С. Любченко. Инж.-физ. ж., 1968, 14, 5.
10. А. П. Алдушин. ПМТФ, 1974, 2.
11. Я. Б. Зельдович, Д. А. Франк - Каменецкий. ЖФХ, 1938, 12, 1, 100.
12. F. E. Fendell. J. Fluid Mechanics, 1972, 56, 1, 81.
13. Вай - Дайк. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
14. Дж. Коул. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.

УДК 662.30+536.46

О НЕСТАЦИОНАРНОЙ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ ПОРОХА

О. Я. Романов

(Ленинград)

Возможность построения феноменологической теории нестационарного горения пороха Я. Б. Зельдовича — Б. В. Новожилова обосновывается сравнительной оценкой характерных времен процессов, протекающих при горении пороха [1]. Теория учитывает инерционность лишь прогретого слоя конденсированной фазы (к-фазы), определяемую характерным временем $t_s \sim \kappa / (u^0)^2$, где κ — температуропроводность пороха, u^0 — стационарная скорость горения, — заведомо большим, нежели характерные времена химической реакции в к-фазе t'_s , и пребывания газообразных продуктов горения в той части газовой фазы, которая влияет на скорость горения t_b . Значения последних величин определяются соотношениями

$$t'_s \sim t_s \frac{RT_s^2}{E_s(T_s - T_0)}; \quad t_b \sim \frac{l_b}{u'}$$

Здесь T — температура, E — энергия активации химической реакции в к-фазе, R — универсальная газовая постоянная, l_b — толщина зоны горения в газовой фазе, u' — средняя скорость движения газа в этой зоне, $s, 0$ — индексы поверхности и начальных значений параметров пороха.

В интервале давлений до 100 бар t_s превышает t_b не менее чем на 2 порядка; t'_s превышает t_b не менее чем на 1 порядок, в том случае,

если E_s не слишком велика (до $80 \div 100$ кДж/моль) [1]. Поэтому в расчете нестационарной скорости горения пороха при достаточно медленном по сравнению с процессом релаксации газовой фазы изменении давления или другого экстенсивного параметра целесообразно газовую фазу считать безынерционной.

В настоящей работе осуществлена постановка задачи о скорости нестационарного горения пороха с учетом инерционности реакционной зоны к-фазы. Исследуется решение задачи в линейном приближении для химической реакции нулевого и первого порядка в к-фазе. Установлено, что мгновенную скорость горения определяют параметры, которые вычисляются по известным из эксперимента стационарным зависимостям скорости горения u^0 , температуры поверхности к-фазы T_{s_0} , концентрации вещества к-фазы на поверхности β_{s_0} , и теплового эффекта Q_0 химической реакции в к-фазе от начальной температуры T_0 и внешнего параметра p , именуемого ниже, без умаления общности, давлением. Могут быть использованы также аналогичные стационарные зависимости, полученные из рассмотрения конкретных моделей горения пороха в стационарной теории.

1. К постановке задачи

Рассматривается нестационарный процесс горения пороха, протекающий в одном измерении. Пространство разделено плоской поверхностью горения на конденсированную ($x > 0$) и газовую ($x < 0$) фазы. Последняя полагается безынерционной. На границе раздела непрерывны температура, тепловой поток и поток вещества; претерпевают разрыв непрерывности коэффициент теплопроводности λ , теплоемкость c , плотность ρ и концентрация вещества β . Поэтому массовая скорость горения в газовой фазе m_b как собственное значение задачи, описываемой системой стационарных уравнений тепло- и массопереноса с учетом химических превращений, зависит от величины p и граничных значений температуры T_s , теплового потока в к-фазу, или, что более удобно, соответствующего ему градиента температуры со стороны к-фазы f_s и концентрации вещества к-фазы β_s .

$$m_b = m_b(p, T_s, f_s, \beta_s). \quad (1.1)$$

Соотношение (1.1) включает в себя и зависимость m_b от тепловыделения в газовой фазе [1], величина которого может быть обусловлена реализацией режима с недогоранием [2].

В к-фазе процессы описываются уравнениями нестационарного тепло- и массопереноса, что отражает ее инерционность

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + cm \frac{\partial T}{\partial x} + \rho QW(\beta, T), \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{\partial \beta}{\partial t} = m \frac{\partial \beta}{\partial x} - \rho W(\beta, T) \quad (1.3)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} x = \infty, \quad T = T_0, \quad \beta = 1 \\ x = 0, \quad T = T_s(t), \quad \beta = \beta_s(t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь для к-фазы m — массовая скорость горения, β — относительная концентрация вещества, $W(\beta, T)$ — скорость химической реакции с тепловым эффектом Q , t — время.

Величину β_s обуславливают процессы, протекающие на поверхности горения и в прилежащем к ней слое к-фазы толщиной порядка диамет-

ра газового пузырька. Их следствием является известный из эксперимента эффект диспергирования. В силу малости размера этого слоя по сравнению с толщиной реакционной зоны в к-фазе его инерционностью можно пренебречь. В этом приближении соотношение

$$\beta_s = \beta_s(p_s, T_s, f_s, u) \quad (1.5)$$

есть единая зависимость для стационарного и нестационарного режимов горения и может быть получена экспериментально в опытах со стационарным горением или явится следствием стационарной теории для соответствующей модели горения.

Ввиду безынерционности газовой фазы

$$m = m_b. \quad (1.6)$$

Должны быть заданы начальные профили температуры и концентрации, а также зависимость давления от времени

$$t=0, T=T(x, 0), \beta=\beta(x, 0); p=p(t). \quad (1.7)$$

Нетрудно видеть, что и в нестационарном варианте задача о нахождении скорости горения это задача на собственное значение. Действительно, для построения зависящих от m нестационарных профилей температуры и концентрации в к-фазе в результате решения уравнений (1.2), (1.3) достаточно обоих граничных значений температуры и одного — концентрации. Удовлетворение второму граничному условию по концентрации приводит к связи между m , β_s , T_s и временем. Вторая связь между этими величинами и f_s получается в результате вычисления частной производной температуры по координате в точке $x=0$ и приравнивания ее к величине f_s . Совместно с соотношениями (1.1), (1.5) и (1.6) эти связи определяют m , m_b , T_s , f_s и β в функции времени.

При необходимости возможно учесть лучистый теплообмен между продуктами газовой фазы и к-фазой. Тогда уравнение теплопроводности будет содержать дополнительное слагаемое в правой части

$$k_n q_n \exp(k_n x),$$

где $q_n = q_n(p, T_s, f_s, \beta_s)$ — падающий на поверхность горения лучистый тепловой поток, k_n — коэффициент поглощения вещества к-фазы.

2. Линейное приближение

Для малых отклонений параметра $p(t)$ от некоторого стационарного значения p_0 допустима постановка задачи в линейном приближении. В этом случае, по крайней мере, в области устойчивых в малом решений, отклонения нестационарных профилей $T(x, t)$, $\beta(x, t)$ от стационарных, отвечающих p_0 , также малы.

Удобно ввести безразмерные переменные и параметры

$$\xi = \frac{u^0 x}{\kappa}, \quad \tau = \frac{(u^0)^2}{\kappa} t, \quad \theta = \frac{E}{RT_{s_0}^2} (T_{s_0} - T),$$

$$v = \frac{u}{u^0}, \quad \pi = p/p_0, \quad \varphi = \partial\theta/\partial\xi, \quad (2.1)$$

где u — линейная скорость горения пороха; κ — температуропроводность к-фазы, в которой протекает химическая реакция, подчиняющаяся закону Аррениуса $W = \beta^n Z \exp(-E/RT)$; $n=0; 1$ — порядок реакции; Z —

предэкспонент; индекс 0 относится к значениям параметров в стационарных условиях.

Проведем линейризацию уравнений (1.1) — (1.5). Предварительно с помощью равенств (1.5) и (1.6) исключим из уравнения (1.1) значения β_s и m_b , тогда оно перейдет в следующее линейное соотношение, записанное в безразмерном виде,

$$v_1 = \left(\frac{\partial \ln u^0}{\partial T_{s_0}} \right)_{p_0, f_{s_0}} \frac{RT_{s_0}^2}{E} \theta_{s_1} + \left(\frac{\partial \ln u^0}{\partial f_{s_0}} \right)_{p_0, T_{s_0}} \frac{u^0 RT_{s_0}^2}{\kappa E} \varphi_{s_1} + \left(\frac{\partial \ln u^0}{\partial \ln p_0} \right)_{T_{s_0}, f_{s_0}} \cdot \pi_1. \quad (2.2)$$

В результате линейризации (1.5) получим

$$\beta_{s_1} = \left(\frac{\partial \beta_{s_0}}{\partial T_{s_0}} \right)_{p_0, f_{s_0}} \frac{RT_{s_0}^2}{E} \theta_{s_1} + \left(\frac{\partial \beta_{s_0}}{\partial f_{s_0}} \right)_{p_0, T_{s_0}} \frac{u^0 RT_{s_0}^2}{\kappa E} \varphi_{s_1} + \left(\frac{\partial \beta_{s_0}}{\partial \ln p_0} \right)_{T_{s_0}, f_{s_0}} \cdot \pi_1. \quad (2.3)$$

Индекс 1 присвоен малым отклонениям величин от стационарных значений. Частные производные в (2.2) и (2.3) по каждому из трех параметров T_{s_0} , f_{s_0} и p_0 считающихся в нестационарном режиме независимыми, вычисляются из стационарных соотношений, отвечающих величине p_0 . Обычно известны стационарные зависимости

$$T_{s_0} = T_{s_0}(p_0, T_0), \quad f_{s_0} = f_{s_0}(p_0, T_0),$$

в которых T_{s_0} и f_{s_0} взаимозависимы.

При постоянном давлении можно считать $T_0 = T_0(T_{s_0}, f_{s_0})$, и поэтому справедливо

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_{s_0}} \right)_{p_0, f_{s_0}} = \left(\frac{\partial}{\partial T_0} \right)_{p_0} \left(\frac{\partial T_0}{\partial T_{s_0}} \right)_{f_{s_0}}; \quad \left(\frac{\partial}{\partial f_{s_0}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial T_0} \right)_{p_0} \left(\frac{\partial T_0}{\partial f_{s_0}} \right)_{T_{s_0}}. \quad (2.4)$$

Частные производные по начальной температуре известны из стационарных связей, экспериментальных или теоретических, а вторые множители в соотношениях (2.4) можно получить из уравнения сохранения энергии на поверхности горения

$$f_{s_0} + \frac{u^0}{\kappa} \left(T_{s_0} - T_0 - \frac{Q_0 \beta_{s_0}}{c} \right) = 0, \quad (2.5)$$

рассматривая его как неявное задание функции $T_0(T_{s_0}, f_{s_0})$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T_0}{\partial f_{s_0}} \right)_{T_{s_0}} = & -\kappa \left[\left(\frac{\partial u^0}{\partial T_0} \right)_{p_0} \left(T_{s_0} - T_0 - \frac{Q_0 \beta_{s_0}}{c} \right) - \right. \\ & \left. - u^0 \left(1 + \frac{Q_0}{c} \left(\frac{\partial \beta_{s_0}}{\partial T_0} \right)_{p_0} + \frac{\beta_{s_0}}{c} \left(\frac{\partial Q_0}{\partial T_0} \right)_{p_0} \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial T_0}{\partial T_{s_0}} \right)_{f_{s_0}} = \frac{u^0}{\kappa} \left(\frac{\partial T_0}{\partial f_{s_0}} \right)_{T_{s_0}}. \quad (2.7)$$

Вычислив производные (2.5), можно, наконец, определить и производные по давлению при закрепленных значениях T_{s_0} и f_{s_0} , используя очевидные стационарные тождества для дифференциалов

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial p_0} \right)_{T_0} dp_0 + \left(\frac{\partial}{\partial T_0} \right)_{p_0} dT_0 = & \left(\frac{\partial}{\partial p_0} \right)_{f_{s_0}, T_{s_0}} dp_0 + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial f_{s_0}} \right)_{p_0, T_{s_0}} df_{s_0} + \left(\frac{\partial}{\partial T_{s_0}} \right)_{p_0, f_{s_0}} dT_{s_0}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

После вычисления входящих в (2.2) и (2.3) производных и с введением безразмерных параметров стационарного режима

$$\begin{aligned}
 k &= \left(\frac{\partial \ln u^0}{\partial T_0} \right)_{p_0} (T_{s_0} - T_0), \quad s = - \left(\frac{\partial \beta_{s_0}}{\partial T_0} \right)_{p_0} \frac{T_{s_0} - T_0}{1 - \beta_{s_0}}, \\
 b &= \left(\frac{\partial Q_0}{\partial T_0} \right)_{p_0} \cdot \frac{1}{cq}, \quad v = \left(\frac{\partial \ln u^0}{\partial \ln p_0} \right)_{T_0}, \\
 \eta &= - \frac{1}{1 - \beta_{s_0}} \left(\frac{\partial \beta_{s_0}}{\partial \ln p_0} \right)_{T_0}, \quad \varepsilon = \left(\frac{\partial \ln Q_0}{\partial \ln p_0} \right)_{T_0}, \\
 q &= \frac{Q_0}{c(T_{s_0} - T_0)}, \quad \vartheta = \frac{E}{RT_{s_0}^2} (T_{s_0} - T_0)
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

уравнения (2.2) и (2.3) приводятся к виду

$$v_1 [k - 1 - q(k + s + b)] = \frac{k}{\vartheta} \theta_{s_1} + \frac{b}{\vartheta} \varphi_{s_1} + \{q[k(\eta + \varepsilon) - v(s + b)] - v\} \pi_1, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta_{s_1}}{1 - \beta_{s_0}} [k - 1 - q(k + s + b)] &= - \frac{s}{\vartheta} \theta_{s_1} - \frac{s}{\vartheta} \varphi_{s_1} + \\
 &+ [\eta + (1 - q)(vs - \eta k) + q(\eta b - s\varepsilon)] \pi_1.
 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для малых отклонений профилей температуры и концентрации в нестационарном режиме получаем из (1.2) и (1.3)

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} + \delta e^{-\vartheta} \beta^n \theta_1 - \delta e^{-\vartheta} n \beta_1 \beta^{n-1} + v_1 \varphi, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi} + \gamma e^{-\vartheta} [\beta^n (v_1 + \theta_1) - n \beta_1 \beta^{n-1}], \quad (2.13)$$

$$\delta = \frac{\kappa Q_0 Z E}{(u^0)^2 c R T_{s_0}^2} \exp\left(-\frac{E}{RT_{s_0}}\right), \quad \gamma = (1 - \beta_{s_0}) \cdot \frac{\delta}{\vartheta}. \quad (2.14)$$

λ , c , ρ предлагаются постоянными, используется представление подэкспоненты в законе Аррениуса по методу Д. А. Франк-Каменецкого. Граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned}
 \xi = \infty, \theta_1 = \beta_1 = 0; \quad \xi = 0, \quad \theta_1 = \theta_{s_1}(\tau), \quad \beta_1 = \beta_{s_1}(\tau); \\
 \tau = 0, \theta_1 = \beta_1 = 0.
 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Считается заданной зависимость $\pi_1(\tau)$. $v_1(\tau)$ может быть найдена в результате решения задачи (2.10) — (2.15), если известны стационарные распределения температуры θ и концентрации β по координате.

3. Приближенное представление стационарных профилей концентрации и температуры

Зависимости $\theta(\xi)$ и $\beta(\xi)$ являются решениями системы стационарных уравнений

$$\theta'' + \theta' - \delta e^{-\vartheta} \beta^n = 0, \quad (3.1)$$

$$\beta' - \gamma \beta^n e^{-\vartheta} = 0 \quad (3.2)$$

с граничными условиями

$$\xi = 0, \theta = 0, \beta = \beta_{s_0}; \quad \xi = \infty, \theta = \vartheta, \beta = 1. \quad (3.3)$$

Штрихами помечены производные по ξ . В комплексы δ и γ включено собственное значение стационарной задачи u^0 .

Точные аналитические решения (3.1)–(3.3) неизвестны. Поэтому целесообразно использовать приближенные решения с последующей оценкой погрешности определения собственного значения u^0 , эквивалентной погрешности определения нестационарной скорости горения в линейном приближении соответствующей нестационарной задачи.

При построении приближенных профилей температуры и концентрации удобно полупространство, занятое порохом, разделить плоскостью $\xi = a$ на две части. В первой из них, названной реакционной зоной ($0 \leq \xi < a$), в уравнении (3.1) можно пренебречь θ' , во второй, зоне подогрева ($a \leq \xi < \infty$), можно пренебречь членом, отражающим действие источников. На границе $\xi = a$ сохраняется непрерывность температуры, теплового потока и концентрации.

В результате интегрирования полученных приближенных уравнений в пределах реакционной зоны для $n=1$ имеем

$$\varphi_a - \vartheta(1 - q) - \frac{\delta(\beta_a - \alpha_{s_0})}{\gamma(1 - \beta_{s_0})} = 0, \quad (3.4)$$

$$\left(\varphi_a - \frac{\delta}{\gamma}\beta_{s_0}\right) \ln \frac{\beta_a}{\beta_{s_0}} + \frac{\delta}{\gamma}(\beta_a - \beta_{s_0}) = \gamma(1 - e^{-\theta a}), \quad (3.5)$$

а после интегрирования в пределах зоны подогрева

$$\varphi_a = \vartheta - \theta a; \quad \ln \beta_a = -\gamma e^{-\vartheta} Ei(\vartheta - \theta a). \quad (3.6)$$

Этими уравнениями при численном их решении совместно с (2.14) определяются отмеченные индексом a параметры на границе $\xi = a$, а также δ , γ и скорость стационарного горения u^0 . (Исключение составляет редко встречаемый особый случай, $\beta_{s_0} = 0$, $q \neq 1$, требующий иного способа интегрирования уравнений.)

В области значений $q\vartheta \gg 1$ β_a близки к 1, $\theta a \ll \vartheta$. Возможно использование первых членов разложений функций в ряды по степеням $(1 - \beta_a)$ и $1/(\vartheta - \theta a)$. Асимптотическое разложение интегральной показательной функции приводит к знакочередующемуся ряду

$$e^{-\vartheta} Ei(\vartheta - \theta a) = \frac{e^{-\theta a}}{\vartheta - \theta a} \left(1 - \frac{1}{\vartheta - \theta a} + \frac{2}{(\vartheta - \theta a)^2} \dots \right), \quad (3.7)$$

погрешность при обрыве которого не превосходит первого члена отброшенной части ряда. При разложении в ряд функции $\ln \beta_a$ его члены имеют один знак, а оценка погрешности может быть получена построением мажоранты в виде геометрической прогрессии, имеющей сумму, представляемую знакочередующимся рядом. Желая, например, воспользоваться только первым членом разложения, имеем

$$\begin{aligned} -\ln \beta_a &= \sum_1^{\infty} \frac{(1 - \beta_a)^n}{n} < (1 - \beta_a) + \frac{1}{2} \sum_2^{\infty} (1 - \beta_a)^n = \\ &= (1 - \beta_a) + \frac{1}{2} \frac{(1 - \beta_a)^2}{1 - (1 - \beta_a)} = (1 - \beta_a) + \frac{1}{2} (1 - \beta_a)^2 \left[1 - \sum_1^{\infty} (-1)^n (1 - \beta_a)^n \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ошибка не превышает величины $\frac{1}{2}(1 - \beta_a)^2(2 - \beta_a)$.

Из (3.4) и (3.5) при использовании первых членов указанных рядов следует

$$\gamma = \vartheta \left[q - \left(1 - \frac{q}{1 - \beta_{s_0}} \right) \ln \beta_{s_0} \right] \quad (3.9)$$

с относительной погрешностью $e^{-\theta}(\theta_a - 1)/\theta$, где θ_a — корень трансцендентного уравнения

$$\theta_a (1 - \beta_{s_0}^*) (\theta - \theta_a) = q\theta\gamma e^{-\theta_a}.$$

Следовательно,

$$u^2 \simeq \frac{\kappa Z e^{-E/RT_{s_0}}}{(T_{s_0} - T_0) [q - (1 - q/(1 - \beta_{s_0}^*)) \ln \beta_{s_0}^*]} \cdot \frac{RT_{s_0}^2}{E}. \quad (3.10)$$

Предельный переход $\beta_{s_0} \rightarrow 1$ приводит (3.9) и (3.10) к соотношениям, справедливым для химической реакции нулевого порядка ($n=0$)

$$\gamma \simeq \theta (1 - \beta_{s_0}^*) \left(1 - \frac{q}{2}\right), \quad u^2 \simeq \frac{\kappa Z e^{-E/RT_{s_0}}}{(1 - \beta_{s_0}^*) (T_{s_0} - T) (1 - q/2)} \frac{RT_{s_0}^2}{E}. \quad (3.11)$$

Последний результат неоднократно был получен ранее, например, в [3, 4] и др.

Определенную погрешность следует сопоставить с погрешностью, обусловленной самим приближенным характером (3.4)—(3.6). Величину последней можно установить, оценивая отклонение γ , вычисленное по формуле (3.9), от точного значения. С этой целью из равенства (3.1), восстанавливая исходный аррениусовский вид зависимости интенсивности источника от температуры, определим максимальное значение градиента температуры в к-фазе

$$\varphi_m = \delta \beta_m^n \exp\left(\frac{E}{RT_{s_0}} - \frac{E}{RT_m}\right). \quad (3.12)$$

Здесь и ниже индексом m помечены параметры, отвечающие значению координаты $\xi = \xi_m$, при котором достигается величина $\varphi = \varphi_m$.

По аналогии с (3.4) и (3.5) получаем

$$\varphi_m - \varphi_{s_0} + \theta_m - \frac{\delta}{\gamma} (\beta_m - \beta_{s_0}) = 0, \quad \theta_m = \frac{E}{RT_{s_0}^2} (T_{s_0} - T_m), \quad (3.13)$$

$$\left(\varphi_m - \frac{\delta}{\gamma} \beta_m + \theta_m\right) \ln \frac{\beta_{s_0}}{\beta_m} + \frac{\delta}{\gamma} (\beta_{s_0} - \beta_m) + I_1 + \gamma I_2 = 0, \quad (3.14)$$

где

$$I_1 = \int_{\beta_{s_0}}^{\beta_m} -\frac{\theta}{\beta} d\beta, \quad I_2 = \int_0^{\theta_m} \exp\left(\frac{E}{RT_s} - \frac{E}{RT}\right) d\theta. \quad (3.15)$$

Интегрирование (3.3) в пределах $\xi_m \rightarrow \infty$ дает

$$-\ln \beta_m = \gamma I_3, \quad I_3 = \int_{\xi_m}^{\infty} \exp\left(\frac{E}{RT_s} - \frac{E}{RT}\right) d\xi. \quad (3.16)$$

Уравнениями (3.12)—(3.16) и (2.14) точно определяются φ_m , β_m , θ_m , δ , γ и скорость горения u^0 .

При $q\theta \gg 1$ возможно приближенное представление $\ln \beta_m$ в виде, аналогичном (3.9), позволяющем дать оценку погрешности. По сравнению с другими членами, входящими в уравнения (3.14) и (3.13), I_1 и I_3 малы, и каждый из них может быть оценен сверху первым членом знакопередающегося ряда, составляющего асимптотическое разложение, которое получается использованием метода Лапласа для интегралов (подробное изложение метода содержится, например, в [5]). Произведя

очевидные преобразования подынтегральных функций, получаем

$$I_1 = \gamma \int_0^{\theta_m} \exp\left(\frac{E}{RT_{s_0}} - \frac{E}{RT}\right) \cdot \frac{\theta}{\varphi} d\theta < \frac{\gamma}{\varphi(1-q/2)}, \quad (3.17)$$

$$\gamma I_3 = \gamma \int_{\theta_m}^{\vartheta} \exp\left(\frac{E}{RT_{s_0}} - \frac{E}{RT}\right) \frac{d\theta}{\varphi} < \frac{\gamma}{\varphi_m} \exp\left(\frac{E}{RT_{s_0}} - \frac{E}{RT_m}\right). \quad (3.18)$$

К асимптотическому разложению I_2 можно прийти после замены переменной θ на $\frac{E}{RT}$ и последующего многократного интегрирования по частям. Эта операция дает оценку I_2

$$1 - \exp\left(\frac{E}{RT_{s_0}} - \frac{E}{RT_m}\right) - I_2 < 2 \left[\frac{RT_s}{E} - \frac{RT_m}{E} \exp\left(\frac{E}{RT_{s_0}} - \frac{E}{RT_m}\right) \right]. \quad (3.19)$$

Старшие члены отброшенных частей рядов имеют порядок $\frac{RT_s}{E}$ и $\frac{RT_m}{E}$ по отношению к первым.

В результате решения системы (3.11)–(3.16), которое проводится при замене $\ln \beta_m$, I_1 , I_2 , I_3 их приближенными значениями, имеющими известную точность, приходим к соотношениям (3.9) и (3.10) и устанавливаем, что $(u^0)^2$, вычисляемое по формуле (3.10), меньше точного значения на относительную величину, не превышающую $2 \frac{RT_{s_0}}{E} + \frac{1}{(1-\beta_{s_0})} \gamma$. Эта же величина может служить верхней оценкой использования приближенных профилей температуры и концентрации в задаче определения нестационарной скорости горения, поскольку определенное выше значение погрешности соотношений (3.9) и (3.10) в приближенной стационарной задаче меньше по абсолютной величине и имеет тот же знак.

Аналогично рассматривается случай $\zeta \vartheta < 1 - \frac{1}{2} \vartheta$, что отвечает максимальному градиенту φ на границе к-фазы при $\xi = 0$. Здесь $\beta_\alpha - \beta_{s_0} \ll 1$, и выражение (3.10) имеет относительную погрешность $\frac{2RT_{s_0}}{E} - \zeta \beta_{s_0} / \ln \beta_{s_0} \cdot (1 - \beta_{s_0})$.

4. Решение задачи в линейном приближении

В задаче (2.10)–(2.15) воспользуемся односторонним преобразованием Лапласа $L(p)$ по переменной τ . За изображениями сохраним те же обозначения, что и за оригиналами. Тогда интегрирование уравнений (2.12) и (2.13), записанных в изображениях для $n=1$, в зоне подогрева дает

$$\varphi_{a_1} = h \left[\frac{v_1}{p} (\vartheta - \theta_a) - \theta_{a_1} \right] - \frac{v_1}{p} (\vartheta - \theta_a); \quad h = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + p}, \quad (4.1)$$

$$\beta_{a_1} = \beta_\alpha \gamma \int_0^\infty \exp(-\theta - p\xi) \left\{ \left[\theta_{a_1} - \frac{v}{p} (\vartheta - \theta_a) \right] e^{-h\xi} + \frac{v}{p} (\vartheta - \theta_a) e^{-\xi} \right\} d\xi. \quad (4.2)$$

В реакционной зоне к-фазы произведем замену независимой переменной ξ на $y = \beta - 1$

$$\varphi_1 = -\varphi_1 g - \theta_1 \left[\frac{\delta}{\gamma} - pg \right] + \beta_1 \frac{\delta}{\gamma(y+1)}; \quad g = \frac{-\gamma}{(y+1)[(\vartheta\gamma - \delta) \ln(1+y) + \delta y]}, \quad (4.3)$$

$$\theta_1' = \varphi_1 g, \quad (4.4)$$

$$\beta_1' = \beta_1 \left(pg - \frac{1}{y+1} \right) - \theta_1 - v_1. \quad (4.5)$$

Здесь штрихами обозначены производные от изображений температуры, ее градиента и концентрации по y .

Из системы (4.3)–(4.5) можно получить линейные связи

$$\varphi_{a_1} = \varphi_{a_1}(\theta_{s_1}, \varphi_{s_1}, \beta_{s_1}, v_1); \quad \theta_{a_1} = \theta_{a_1}(\theta_{s_1}, \varphi_{s_1}, \beta_{s_1}, v_1); \quad \beta_{a_1} = \beta_{a_1}(\theta_{s_1}, \varphi_{s_1}, \beta_{s_1}, v_1) \quad (4.6)$$

двумя способами.

Вблизи регулярной особой точки $y=0$ аналитическое решение представляется рядами специального вида [6], сходящимися в пределах реакционной зоны. Коэффициенты рядов вычисляются по рекуррентным соотношениям, которые здесь не приводятся для экономии места. При $\beta_{s_0} \rightarrow 1$ ($n=0$) ряды переходят в гипергеометрические. Связи (4.6) получаются после исключения произвольных постоянных.

Второй способ предполагает нестандартное использование какого-либо численного метода решения. Особенностью является вычисление на каждом шаге матрицы коэффициентов при начальных значениях функций (на границе реакционной зоны), а не значениях функций на предыдущем шаге как в обычном варианте.

В результате имеем линейную систему (4.1), (4.2), (4.6), (2.10) и (2.11) с неизвестными θ_{s_1} , φ_{s_1} , β_{s_1} , θ_{a_1} , φ_{a_1} , β_{a_1} и v_1 . Решая ее, получаем

$$v_1(p) = D_v(p) / D(p), \quad (4.7)$$

где D_v и D — соответствующие определители, составленные из коэффициентов при неизвестных.

Мероморфная функция v_1 имеет точку ветвления $p = -1/4$ и полюсы, совпадающие в силу строения D_v и D с нулями последнего. Поэтому в соответствии с правилами операционного исчисления, оригинал, дающий зависимость скорости горения от времени, определяется по формуле

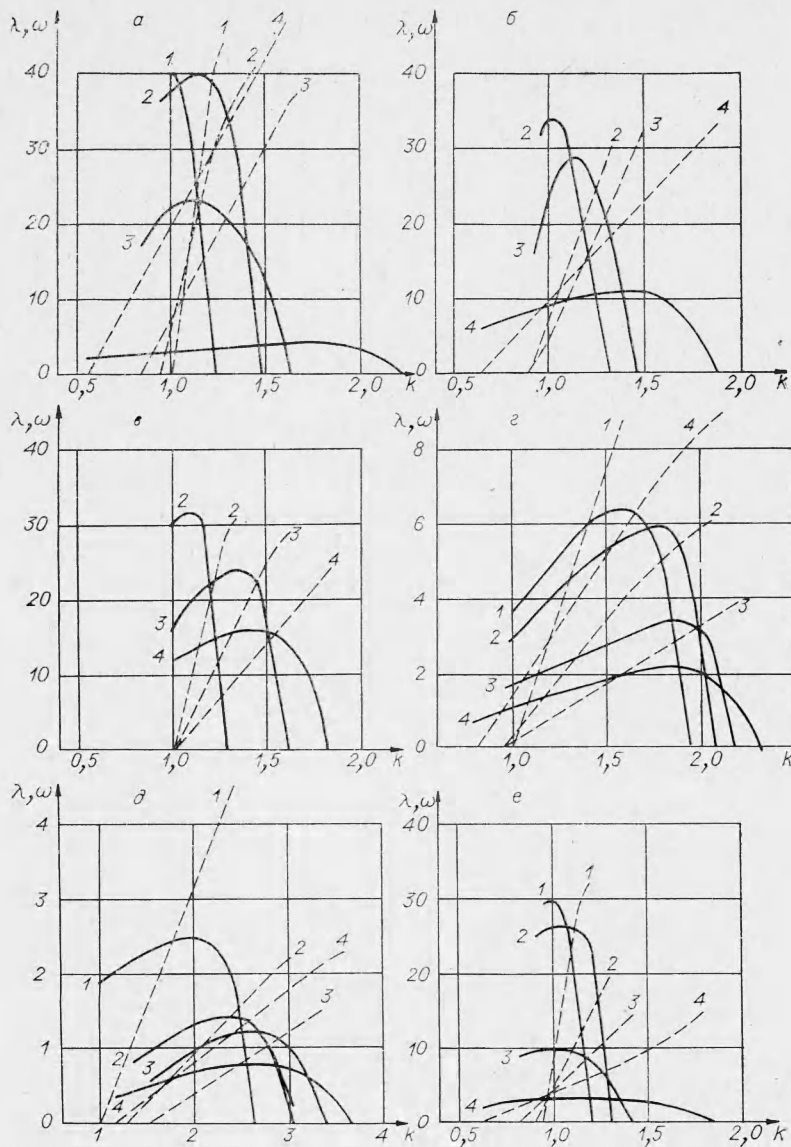
$$v_1(\tau) = \sum_j \text{Res} [e^{p_j \tau} v_1(p_j)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i/4}^{-\infty} [v_1^+(p) - v_1^-(p)] e^{p\tau} dp. \quad (4.8)$$

Здесь сумма вычетов распространяется на все нули функции $D(p)$:

$v_1^+(p) \equiv v_1(p)$ при условии, что $\sqrt{\frac{1}{4} + p} = i\sqrt{\left| \frac{1}{4} + p \right|}$; $v_1^-(p) \equiv v_1(p)$ при условии $\sqrt{\frac{1}{4} + p} = -i\sqrt{\left| \frac{1}{4} + p \right|}$.

Определенные трудности представляет поиск нулей трансцендентной функции $D(p)$. Он был осуществлен с помощью ЭЦВМ, причем связи (4.6) устанавливались численно методом Рунге-Кутты. Во внимание принимались корни p_j , лежащие в круге радиусом 1,0 с центром в начале координат комплексной плоскости и имеющие неотрицательную действительную часть выражения $\sqrt{\frac{1}{4} + p_j}$ в соответствии с требованием ограниченности нестационарной зависимости температуры от координаты в области к-фазы. Расширение области поиска в сторону больших по модулю корней имело бы смысл при постановке задачи с учетом инерционности всей зоны горения пороха, что выходит за рамки рассматриваемого.

Значения корней при наличии соотношений (2.14) и (3.9) определяются сочетанием пяти безразмерных параметров стационарного режи-



Зависимость декремента затухания λ и частоты ω от параметра k .
 а) $s=0, r=0,05, \beta_{s_0}=0,35, b=0$; б) $s=0, r=0,05, \beta_{s_0}=0,65, b=0$; в) $s=0, r=0,05, \beta_{s_0} = -0,95, b=0$; г) $s=0, r=0,3, \beta_{s_0}=0,65, b=0$; д) $s=0, r=0,8, \beta_{s_0}=0,65, b=0$; е) $s=-0,5, r=0,05, \beta_{s_0}=0,65, b=0$.

ма горения k, ϑ, s, q, b , если в k -фазе осуществляется химическая реакция нулевого порядка, и шесть совместно со значением β_{s_0} — для реакции нулевого порядка. В пределе $\beta_{s_0} \rightarrow 1$ в последнем случае результаты идентичны с вариантом нулевого порядка.

В расчете варьировались значения $k, \vartheta, s, q, \beta_{s_0}, b$. В области малых k , ограниченных сверху поверхностью $k = k_1(\vartheta, s, q; \beta_{s_0}, b)$, определенной с погрешностью порядка $1/\vartheta$, нет корней, удовлетворяющих указанному выше свойству, и зависимость скорости горения от времени определяется последним членом в выражении (4.8), дающим устойчивые решения. При $\vartheta = \infty$ и произвольных значениях s, q, β_{s_0}, b поверхность $k=1$ точно отделяет область устойчивых решений от неустойчивых, что совпадает с результатом, полученным впервые Я. Б. Зельдовичем [1].

В области k , превышающих $k=k_1$, как и в [1], существуют 2 комплексно-сопряженных корня $p_{1,2} = -\lambda \pm i\omega$, определяющих колебательную составляющую в $v_1(\tau)$ с декрементом затухания λ и частотой колебаний ω . Соотношение (4.8) дает зависимость скорости горения от времени, имеющую качественное сходство с аналогичной функцией в модели нестационарного горения с безынерционной реакционной зоной к-фазы [1]. О количественном отличии можно судить, сопоставляя графики λ и ω , представленные на рисунке, с аналитическими зависимостями λ и ω от двух параметров r и k , полученными в работе [1]¹.

$$\lambda = [r(k+1) - (k-1)^2]/2r^2, \quad r = \left(\frac{\partial T_{s_0}}{\partial T_0} \right)_{p_0}$$

$$\omega = (k-1) \sqrt{(2k-r+2)r - (k-1)^2}/2r^2. \quad (4.9)$$

Зона положительных λ — область устойчивых режимов горения. Слева она примыкает к области устойчивых режимов, не имеющих колебательной составляющей. На рисунке сплошные линии — λ , штриховые — ω , нумерация кривых 1—4 проведена в порядке следования значений параметра $q=0; 0,33; 0,67; 1$.

Нулевому тепловому эффекту в к-фазе ($q=0$) соответствуют максимальные частоты колебаний, широкая вариация значений декремента затухания, минимальная область устойчивости. При закрепленных значениях k частота уменьшается с ростом q , r и β_{s_0} , уменьшением s и b . Область устойчивых колебательных режимов увеличивается с уменьшением β_{s_0} , s , b , ростом q и r , и, как видно из сравнения результатов, приведенных на рисунке и даваемых соотношениями (4.9), может значительно превосходить область устойчивости в модели нестационарного горения с безынерционной реакционной зоной в к-фазе.

Соотношения (4.9) можно рассматривать как в среднем отражающие основные закономерности в поведении λ и ω при широкой вариации определяющих их параметров.

Поступила в редакцию
19/VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Новожилов. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М., «Наука», 1973, с. 166.
2. Ю. А. Гостинцев, А. А. Суханов, П. Ф. Похил. ПМТФ, 1971, 5, с. 60.
3. А. Г. Мержанов, Ф. И. Дубовицкий. Докл. АН СССР, 1959, 129, с. 153.
4. С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев. ПМТФ, 1964, 6, с. 77.
5. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965, с. 472.
6. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. III, ч. 2. М.—Л., ГИТТЛ, 1950, с. 298.

¹ Необходимая для построения графиков зависимость $r(\theta, s, k, b, \beta_{s_0})$ получается взятием логарифмической производной по T_0 от выражения для $(u^0)^2$ (3.10).