

можно судить о том, какие группы частиц дают вклад в функцию $Y(\varphi | x)$ при данных φ , x (Y_{ek} — вклад электронов, отражающихся от k -го максимума потенциала, Y_{1ek} — вклад электронов, запертых в яме, расположенной после k -го максимума потенциала; аналогичны обозначения для ионов). Как видно из фиг. 1, для роста амплитуды колебаний потенциала достаточно выполнения условий

$$Y_{1ek}(\varphi_{ik}) + Y_{ek+1}(\varphi_{ik}) < Y_{1ek+1}(\varphi_{ik}) \quad (2)$$

$$Y_{1ik}(\varphi_{ek}) + Y_{ik}(\varphi_{ek}) < Y_{1ik+1}(\varphi_{ek}) \quad (3)$$

Из условия (1) и выражения функций Y через функции распределения частиц [1] следует, что (2) и (3) выполняются, если функции распределения испускаемых частиц по начальной скорости v_0 на эмиттере $f_{0i}(v_0)$, $f_{0e}(v_0)$ убывают с ростом v_0 медленнее, чем максвелловские функции $C_e \exp(-mv_0^2/2T)$ и $C_i \exp(-Mv_0^2/2T)$.

Здесь C_e и C_i — постоянные, выбранные так, чтобы для v_0 , соответствующих первым экстремумам потенциала, максвелловские функции совпадали с $f_{0e}(v_0)$, $f_{0i}(v_0)$; m , M — массы электрона и иона. Если при больших значениях v_0 ($v_0 > v_1$) функция f_{0e} (или f_{0i}) начинает спадать быстрее соответствующей максвелловской функции, то рост амплитуды колебаний потенциала прекращается при достижении потенциалом значения $mv_1^2/2e$ (или $-Mv_1^2/2e$), где $-e$ — заряд электрона.

Поступила 27 XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

- Смирнов В. М. Нелинейные стационарные колебания потенциала в ионно-электронных потоках, эмиттируемых плоскостью. Радиотехника и электроника, 1963, т. 8, № 10, стр. 1729.
- Дюкалов А. Н. Исследование кинетического уравнения системы заряженных частиц в случае редких столкновений. ПМТФ, 1963, № 2, стр. 80.
- Дюкалов А. Н. Граничные условия для функции распределения заряженных частиц, совершающих финитные движения. ПМТФ, 1963, № 4, стр. 110.

О НАГРЕВЕ СТЕНКИ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ

А. М. Рушайло (Москва)

Во многих приложениях, например в циклических ускорителях плазмы или МГД-генераторах, охлаждаемые и неохлаждаемые стенки канала подвергаются воздействию периодических тепловых потоков, которые в первом приближении можно представить в виде волн прямоугольной формы [1]. Решение задачи такого типа для полубесконечного тела приведено в работе [2].

Большой практический интерес представляет задача о нагреве стенки периодическим тепловым потоком при учете конечной толщины стенки и различных режимов охлаждения. Решение этой задачи приводится ниже.

Уравнение в безразмерных переменных для температуры, граничные и начальные условия запишем в виде

$$\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \quad \left(0 \leq \xi \leq 1, \quad \tau \geq 0, \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \quad \xi = \frac{x}{h}, \quad \tau = \frac{at}{h^2} \right) \quad (1)$$

$$\theta(\xi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta(0, \tau)}{\partial \xi} = -\gamma(\tau), \quad \frac{\partial \theta(1, \tau)}{\partial \xi} = -\beta \theta(1, \tau) \quad (2)$$

$$\gamma = \gamma_0 \eta(\tau), \quad \gamma_0 = \frac{q_0 h}{T_0 \lambda}, \quad \beta = \frac{\alpha h}{\lambda}, \quad \tau_0 = \frac{at_0}{h^2}, \quad \tau_1 = \frac{at_1}{h^2}$$

$$\eta(\tau) = \begin{cases} 1, & n\tau_1 \leq \tau \leq n\tau_1 + \tau_0 \\ 0, & n\tau_1 + \tau_0 < \tau < (n+1)\tau_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

Здесь T_0 , T — начальная и текущая температура, h — толщина стенки, x — координата, t — время, t_0 — время подвода тепла в одном периоде, t_1 — период изменения

теплового потока, $q_0 = \text{const}$ — тепловой поток, λ, a, α — коэффициенты теплопроводности, температуропроводности и теплообмена, τ — критерий Фурье, β — критерий Био.

Используем для решения задачи метод преобразования Лапласа [2, 3]. Для изображений $\theta^*(\xi, p)$ и $\gamma^*(p)$ получим уравнение и граничные условия:

$$\frac{d^2 \theta^*(\xi, p)}{d\xi^2} = p \theta^*(\xi, p), \quad \frac{d\theta^*(0, p)}{d\xi} = -\gamma^*(p), \quad \frac{d\theta^*(1, p)}{d\xi} = -\beta \theta^*(1, p) \quad (4)$$

Решение уравнения (4), как нетрудно убедиться, есть

$$\theta^*(\xi, p) = \gamma^*(p) \theta_1^*(\xi, p), \quad \theta_1^*(\xi, p) = \frac{\cos[(\xi-1)i\sqrt{p}] - (\beta/i\sqrt{p}) \sin[(\xi-1)i\sqrt{p}]}{\beta \cos i\sqrt{p} - i\sqrt{p} \sin i\sqrt{p}} \quad (5)$$

Функция $\theta_1^*(\xi, p)$ является мероморфной функцией комплексной переменной p с полюсами первого порядка в точках p_k , удовлетворяющих трансцендентному уравнению

$$z \operatorname{tg} z = \beta, \quad p = -z^2 \quad (6)$$

Определив вычеты функции $\theta_1^*(\xi, p)$ в точках $p_k = -z_k^2$ по второй теореме разложения [3], найдем ее оригинал

$$\theta_1(\xi, \tau) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} F_k(\xi) z_k^2 \exp(-z_k^2 \tau) \quad (7)$$

$$F_k(\xi) = \frac{(z_k^2 + \beta^2) \cos(\xi z_k) - 2z_k \beta \sin(\xi z_k)}{z_k^2 (z_k^2 + \beta^2 + \beta)}$$

Используя теорему о свертке и выражение (5), оригинал функции $\theta^*(\xi, p)$ можно записать следующим образом:

$$\theta(\xi, \tau) = \int_0^{\tau} \gamma(y) \theta_1(\xi, \tau - y) dy \quad (8)$$

Подставляя в (8) выражение (7) и переходя от интеграла суммы к сумме интегралов, получим

$$\theta(\xi, \tau) = 2\gamma_0 \sum_{k=1}^{\infty} F_k(\xi) G_k(\tau) \quad (9)$$

$$G_k(\tau) = z_k^2 \exp(-z_k^2 \tau) \int_0^{\tau} \eta(y) \exp(z_k^2 y) dy$$

Время τ будем в дальнейшем представлять в следующем виде:

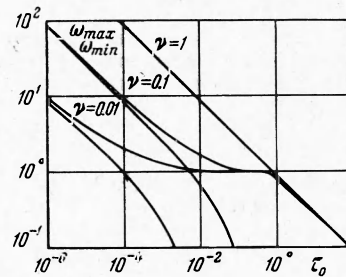
$$\tau = m\tau_1 + \tau_* \quad (0 \leq \tau_* \leq \tau_1, m = 0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

Разбивая интеграл в (9) на сумму из m интегралов, найдем

$$G_k(\tau) = \exp(-z_k^2 \tau_*) \left\{ \exp[z_k^2 ((\tau_* - \tau_0) \eta(\tau) + \tau_0)] - 1 + \frac{\exp(z_k^2 \tau_0) - 1}{\exp(z_k^2 \tau_1) - 1} [1 - \exp(-z_k^2 m\tau_1)] \right\} \quad (11)$$

Таким образом, искомое решение получено в виде ряда (9), каждый член которого равен произведению функции координаты (7) на функцию времени (11) при условиях (6) и (10), для z_k, m и τ_* .

Из выражения (11) и (10) видно, что для всех β , кроме $\beta = 0$ (отсутствие теплоотвода), после окончания переходных процессов, обусловленных начальными условиями, при $m \gg z_1^{-2} \tau_1^{-1}$, температура выходит на стационарный периодический режим с периодом τ_1 . Рассмотрим предельные случаи.



Фиг. 1

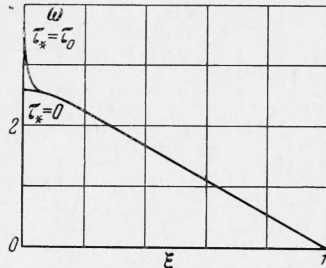
1. Пусть $\beta = \infty$. В этом случае из (2), (6) и (7) следует

$$\theta(1, \tau) = 0, \quad z_k = 1/2 (2k - 1) \pi, \quad F_k(\xi) = \cos(\xi z_k) z_k^{-2}$$

После завершения переходных процессов ($m \gg 2\pi^{-2}\tau_1^{-1}$) температура на поверхности $\xi = 0$ будет колебаться с периодом τ_1 между максимальным значением при $\tau_* = \tau_0$ и минимальным значением при $\tau_* = 0$

$$\theta_{\max} = 2\gamma_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^2} \frac{1 - \exp(-z_k^2 \tau_0)}{1 - \exp(-z_k^2 \tau_1)}, \quad \theta_{\min} = 2\gamma_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k^2} \frac{\exp(z_k^2 \tau_0) - 1}{\exp(z_k^2 \tau_1) - 1} \quad (12)$$

На фиг. 1 при помощи таблиц [4, 5] построены максимальные и минимальные (12) значения функции $\omega = \theta / \theta^0$ при $\xi = 0$ и $m = \infty$, в зависимости от τ_0 , для трех значений параметра $\nu = \tau_0 / \tau_1$, равных 1, 0.1, и 0.01. Функция ω является отношением температуры $\theta = \theta(\xi, \tau)$ к температуре $\theta^0 = 2\gamma_0 \tau^{1/2} \pi^{-1/2}$, которая соответствует температуре поверхности полубесконечного тела в первом цикле ($m = 0, \tau_* = \tau_0$) [1, 2].



Фиг. 2

Таким образом, из фиг. 1 видно, что при $m \rightarrow \infty$, температура поверхности, даже в случае интенсивно охлаждаемой стенки, может, при достаточно малых значениях τ_0 , в десятки раз превосходить максимальную температуру в первом цикле ($m = 0$).

На фиг. 2 для $\beta = m = \infty$ и двух значений $\tau_* = 0$ и $\tau_* = \tau_0$ в качестве примера приведено распределение значений относительной температуры $\omega(\xi) = \theta(\xi) / \theta^0$ в стенке при фиксированных значениях $\tau_0 = 10^{-3}$ и $\tau_1 = 10^{-2}$.

2. Пусть $\beta = 0$. В этом случае из (6) и (7) следует

$$z_k = (k - 1)\pi, \quad F_k(\xi) = \cos(\xi z_k) z_k^{-2}$$

Так как $z_1 = 0$, выделим первый член ряда в выражении (9). После элементарных преобразований температуру $\theta(\xi, \tau)$ можно представить в виде суммы функции, линейно зависящей от времени, и некоторого периодического добавка $\varphi(\xi, \tau)$ с периодом τ_1

$$\theta(\xi, \tau) = A\tau + \varphi(\xi, \tau) \quad (13)$$

$$A = 2\gamma_0 \frac{\tau_0}{\tau_1}, \quad \varphi(\xi, \tau) = 2\gamma_0 \left[\tau_0 \left(1 - \frac{\tau_*}{\tau_1} \right) + (\tau_* - \tau_0) \eta(\tau) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(\xi z_k)}{z_k^2} G_k(\tau) \right]$$

Амплитуда функции φ при $m \gg \pi^{-2}\tau_1^{-1}$ и $\xi = 0$ составляет

$$\begin{aligned} \Phi_0 = \varphi_{\tau_* = \tau_0} - \varphi_{\tau_* = 0} = 2\gamma_0 \left\{ \tau_0 \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_1} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{z_k^2} \frac{1 - \exp(-z_k^2 \tau_0)}{1 - \exp(-z_k^2 \tau_1)} \left[1 - \frac{\exp(-z_k^2 \tau_1)}{\exp(-z_k^2 \tau_0)} \right] \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

Автор благодарит Г. М. Бам-Зеликовича и А. Б. Ватажина за обсуждение данной работы.

Поступила 28 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Р у ш а й л о А. М. Измерение тепловых потоков и оценка температуры электронов в импульсном электромагнитном ускорителе плазмы. ПМТФ, 1965, № 4.
2. К а р с л о у Г. и Е г г е р Д. Теплопроводность твердых тел. Изд-во «Наука», 1964.
3. Л а в р е н т ь е в М. А., Ш а б а т Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.
4. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
5. Библиотека математических таблиц, вып. 9. Многозначные таблицы элементарных функций ($\sin x, \cos x, e^x, e^{-x}$). ВЦ АН СССР, 1960.