*Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 3*

УДК 532.54:517.925

# ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ШЕРОХОВАТОСТИ ДЛЯ ПОТОКА В ОТКРЫТОМ РУСЛЕ

**Т. П. Пухначева**

**Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск**

Описание нестационарного потока жидкости в открытом канале обычно основывается на одномерной системе уравнений Сен-Венана [1, 2]. Адекватность этой математической модели реальности в значительной степени зависит от точности задания физических параметров, которые она в себя включает. В частности, одним из самых важных параметров является коэффициент Шези или выражающийся через него коэффициент шероховатости. И именно этот параметр трудно измерить непосредственно. Часто коэффициент шероховатости считают константой, среднее значение которой определяется из натурных наблюдений с помощью формулы Шези [1, 2]. Другой подход был предложен в [3], где использована серия натурных наблюдений для построения разрешающей функции. Затем эта функция минимизировалась, и ее минимальное значение принималось за константу шероховатости.

В данной работе предполагается, что коэффициент Шези — функция, зависящая от пространственной переменной. Задача определения этой функции рассматривается как коэффициентная обратная задача для гиперболической системы. Теория такого типа задач была развита в [4].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему уравнений Сен-Венана при следующих предположениях: поток имеет докритическую скорость $v$, русло прямоугольной формы с постоянным сечением и нулевым уклоном дна. Ширина свободной поверхности $B$ — известная константа. Эта специальная модель позволяет упростить математические выкладки. Более общий случай и необходимые изменения в доказательстве рассмотрены в п. **4**.

Обозначим через $t$ время, $x$ — координату вдоль русла, $h(x,t)$ — уровень свободной поверхности, который при нулевом уклоне дна совпадает с глубиной, $Q(x,t)$ — расход потока, $g$ — ускорение силы тяжести. Предполагаем, что сухое русло отсутствует; это означает, что $h > 0$ для всех $x$ и $t$.

Коэффициент Шези $C(x)$, определяющий силу трения, может иметь разную форму в зависимости от используемой гидравлической формулы. Например, коэффициент шероховатости $n(x)$ можно связать с $C(x)$ с помощью формулы Маннинга (Штриклера): $C = R^{1/6}/n(x)$ ($R = R(h)$ — гидравлический радиус). Предположим, что $Q$ является функцией постоянного знака. Без потери общности можно полагать $Q > 0$. Докритическая скорость течения позволяет считать число Фруда $\mathrm{Fr} = (v^2/gh_{\text{ср}})$ много меньшим единицы. Следовательно, конвективным членом $\partial(v^2/2g)/\partial x$, входящим в уравнение динамического равновесия, можно пренебречь. При этих предположениях система уравнений Сен-Венана имеет вид

$$B\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial t} + gBh\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{C^2(x)}\,\frac{Q^2}{h}\,\frac{g}{BR}. \tag{1.1}$$

Коэффициент Шези $C(x)$, входящий в правую часть, подлежит определению. Введем функцию $a(x) \equiv 1/C^2(x)$.

Рассмотрим для системы (1.1) начально-краевую задачу

$$h(0,t) = f_1(t), \qquad Q(0,t) = f_2(t), \qquad f_1, f_2 \in C^2[0,2T], \qquad f_1, f_2 > 0; \tag{1.2}$$

$$h(x,T) = \varphi_0(x), \qquad \varphi_0 \in C^2[0,L], \qquad \varphi_0 > 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant L, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2T \tag{1.3}$$

с конечными $T$ и $L$.

Соотношения (1.1), (1.2) представляют собой обычную задачу Коши по переменной $x$ для квазилинейной гиперболической системы, будем называть ее *прямой задачей*. Условие (1.3) необходимо для разрешимости обратной задачи.

Введем для системы (1.1) соответствующие инварианты Римана:

$$r = \frac{2}{3}Bg^{1/2}h^{3/2} + Q, \qquad s = -\frac{2}{3}Bg^{1/2}h^{3/2} + Q.$$

Функции $Q$ и $h$ могут быть легко выражены через $r$ и $s$:

$$Q = \frac{r+s}{2}, \qquad h = \left[\frac{3(r-s)}{4Bg^{1/2}}\right]^{2/3}.$$

Прямую задачу (1.1), (1.2) для инвариантов Римана запишем в виде задачи Коши по $x$:

$$\frac{\partial r}{\partial x} + u(r-s)\frac{\partial r}{\partial t} = -a(x)v(r,s), \qquad \frac{\partial s}{\partial x} - u(r-s)\frac{\partial s}{\partial t} = a(x)v(r,s); \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} r(0,t) = \frac{2}{3}Bf_1(t)(gf_1(t))^{1/2} + f_2(t) = r_0(t), \\ s(0,t) = -\frac{2}{3}Bf_1(t)(gf_1(t))^{1/2} + f_2(t) = s_0(t). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь

$$u(r-s) = (gh(r,s))^{-1/2} = \left(\frac{4Bg}{3(r-s)}\right)^{1/3}; \quad v(r,s) = \frac{Q^2(r,s)}{h(r,s)}\frac{g}{BR} = \frac{(r+s)^2}{(r-s)}\frac{g}{3R}.$$

Вместо (1.3) дополнительное условие запишем в форме

$$r(x,T) - s(x,T) = \frac{4}{3}Bg^{1/2}(\varphi_0(x))^{3/2} \equiv \varphi(x). \tag{1.6}$$

Хорошо известно, что задача (1.1), (1.2) в терминах $Q$, $h$ и задача (1.4), (1.5) в терминах $r$, $s$ эквивалентны. Заметим, что условие (1.2) обеспечивает справедливость неравенств $u > 0$, $v > 0$, по крайней мере, для малых $x$.

Далее будем называть *обратной задачей* задачу определения функций $r(x,t)$, $s(x,t)$, $a(x)$, удовлетворяющих соотношениям (1.4)–(1.6).

Переход от искомых функций к инвариантам Римана может быть сделан для любой квазилинейной гиперболической системы с двумя независимыми переменными. При исследовании системы (1.1) использован конкретный вид функций $r(x,t)$ и $s(x,t)$, а также то, каким образом входит искомый коэффициент $a(x)$ в правую часть. Это позволяет, во-первых, предложить дополнительное условие, имеющее разумный физический смысл, во-вторых, легко получить дополнительное соотношение для определения $a(x)$. Поэтому, хотя все проведенные ниже рассуждения можно применять к достаточно произвольной квазилинейной гиперболической системе, в каждом конкретном случае это требует отдельного изучения.

**2. Существование и единственность решения.** Решение обратной задачи (1.4)–(1.6) тесно связано с решением прямой задачи (1.4)–(1.5). Прямая задача была исследована многими авторами. В частности, в [5] выяснены условия разрешимости и указана область существования решения; для этого был сконструирован итеративный процесс и установлена его сходимость. Там же показано, что решение будет равномерно ограниченным вместе со вторыми производными, и найдена область, в которой решение будет единственным для всех итераций. Используя эти результаты, получим следующие необходимые условия разрешимости обратной задачи.

**Лемма.** *Для разрешимости обратной задачи* (1.1)–(1.3) *необходимо, чтобы начальные и граничные данные* (1.2), (1.3) *удовлетворяли условиям*

$$\varphi_0(x) \in C^2[0, L], \qquad \frac{\partial^k \varphi_0(0)}{\partial x^k} = \frac{\partial^k f_1(T)}{\partial t^k} \quad (k = 0,\, 1,\, 2),$$

$$a(0)\frac{g}{BR}\frac{f_1^2(T)}{f_2(T)} + f_2'(T) + gB\varphi_0(0)\varphi_0'(0) = 0.$$

Здесь и ниже штрих означает производную. Последнее равенство может быть использовано для определения величины $a(0)$.

Характеристики $t_r(x,t,\xi)$, $t_s(x,t,\xi)$ системы (1.4) являются решениями задачи Коши:

$$\frac{\partial t_r}{\partial \xi} = u(r(\xi, t_r(\xi,x,t)) - s(\xi, t_r(\xi,x,t))), \quad \frac{\partial t_s}{\partial \xi} = -u(r(\xi, t_s(\xi,x,t)) - s(\xi, t_s(\xi,x,t))),$$

$$t_r(x,x,t) = t, \qquad t_s(x,x,t) = t.$$

Обозначим через $U$ множество функций $f(x,t) \in C^2[0,L] \times [0,2T]$ таких, что $\|f\|_{C^2} < M$. Для $U$ определим область $G(M)$ существования решения обратной задачи: $G(M) = \{0 \leqslant x \leqslant L,\ T_1(\xi) \leqslant t \leqslant T_2(\xi)\}$, где $T_1(\xi)$, $T_2(\xi)$ удовлетворяют следующим задачам Коши:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \xi} = \max\{u\}, \quad T_1(0) = 0, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial \xi} = -\max\{u\}, \quad T_2(0) = 2T.$$

**Теорема 1.** *Пусть заданы функции* $f_1$, $f_2$, $\varphi_0$, *удовлетворяющие условиям леммы. Тогда можно указать положительные константы* $L_1$ *и* $T_1$ *такие, что задача* (1.4)–(1.6) *имеет единственное решение в области* $G_1(M) \subseteq G(M)$, *удовлетворяющее условиям*

$$a(x) \in C^1[0, L_1], \qquad r, s \in C^2(G_1(M)).$$

Доказательство. Определим новые функции $p$ и $h$ следующим образом: $p = \partial r/\partial t$, $q = \partial s/\partial t$. Соотношения, которым они удовлетворяют, легко получить из (1.4), (1.5) дифференцированием по $t$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial p}{\partial x} + u(r-s)\frac{\partial p}{\partial t} = -a(x)v_1(r,s,p,q) - u_1(r,s,p,q),\\ \frac{\partial q}{\partial x} - u(r-s)\frac{\partial q}{\partial t} = a(x)v_1(r,s,p,q) + u_1(r,s,p,q), \quad p(0,t) = r_0'(t), \quad q(0,t) = s_0'(t).\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $v_1 = (\partial v/\partial r)p + (\partial v/\partial s)q$; $u_1 = u'(r-s)(p-q)$.

Дополнительное условие для $p$, $q$, аналогичное (1.6), также нетрудно вывести из (1.4)–(1.6):

$$p(x,T) + q(x,T) = \frac{-2a(x)v(r(x,T), s(x,T)) - \varphi'(x)}{u(r(x,T) - s(x,T))}.$$

Это соотношение позволяет выразить функцию $a(x)$ с помощью равенства

$$-a(x) = \frac{[(p(x,T) + q(x,T))u(r(x,T) - s(x,T))] + \varphi'(x)}{2v(r(x,T), s(x,T))} \tag{2.2}$$

и, следовательно, исключить ее из системы. Для дальнейшей записи удобнее использовать символические обозначения. Введем векторы-столбцы $W(x,t) = (r(x,t), s(x,t), p(x,t), q(x,t))$, $W_0(t) = (r_0(t),\ s_0(t),\ r_0'(t),\ s_0'(t))$, диагональную матрицу $D(W) = \operatorname{diag}(u(r-s),$

$-u(r-s)$, $u(r-s)$, $-u(r-s))$ и вектор-столбец $R$, компонентами которого являются правые части уравнений (1.4), (2.1) после замены $a(x)$ выражением (2.2). В итоге приходим к соотношениям

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} + D(W(x,t))\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = R(W(x,t), W(x,T)), \quad W(0,t) = W_0(t). \tag{2.3}$$

Эта система не является системой дифференциальных уравнений в обычном смысле, так как в правую часть входят величины $W(x,T)$. Тем не менее ее можно исследовать обычными методами, поскольку она допускает интегрирование вдоль характеристик. Проинтегрировав вдоль характеристик, получим систему интегральных уравнений с переменным верхним пределом $x$. Наметим только основные шаги в доказательстве, аналогичном доказательству, приведенному в [5, гл. 1, § 8]. Единственность решения системы (2.3) следует из единственности решения соответствующей линейной системы для разностей двух решений. Существование решения можно показать с помощью итерационного процесса

$$\frac{\partial W^{k+1}(x,t)}{\partial x} + D(W^k(x,t))\frac{\partial W^{k+1}(x,t)}{\partial t} = R(W^k(x,t), W^k(x,T)), \quad W^{k+1}(0,t) = W_0(t).$$

Для этого необходимо расширить систему дифференцированием всех уравнений по $x$, затем с помощью мажорирующей системы показать сходимость итераций и необходимую гладкость предельного решения $W \in C^1(G_1(M))$. Следовательно, $r$, $s \in C^2(G_1(M))$, $a \in C^1[0, L_1]$.

**3. Оценка условной устойчивости.** Оценим неизвестную функцию $a(x)$ посредством заданных функций при некоторых априорных предположениях. Функции $r$, $s$, $\varphi$ назовем принадлежащими классу $K(\nu, M, L, T)$, если неравенства $(\|r\|, \|s\|, \|\varphi\|) < M$, $\min(r+s) \geqslant \nu > 0$ имеют место для нормы $C^2$ на интервалах $[0, 2T]$ и $[0, L]$ соответственно. Константа $M$ предполагается универсальной для всего класса. Введем аналогичный класс $K_1(M_1, L)$ для функций $a(x)$, удовлетворяющих условию $\|a\|_{C^1[0,L]} \leqslant M_1$.

**Теорема 2.** *Пусть имеется два коэффициента $(a^1(x),\ a^2(x))$, являющихся решениями обратных задач с соответствующими данными $r_0^1, s_0^1, \varphi^1$ и $r_0^2, s_0^2, \varphi^2$. Если $a^1, a^2 \in K_1(M_1, L)$ и $r_0^1, s_0^1, \varphi^1, r_0^2, s_0^2, \varphi^2 \in K(\nu, M, L, T)$, то справедлива оценка*

$$\|a^1 - a^2\|_C \leqslant C(\|r_0^1 - r_0^2\|_{C^1} + \|s_0^1 - s_0^2\|_{C^1} + \|\varphi^1 - \varphi^2\|_{C^1}),$$

*где константа $C$ зависит только от $\nu$, $M$, $M_1$, $L$, $T$.*

Доказательство. Для коэффициентов $a^1(x)$ и $a^2(x)$ можно получить векторы $W^1$ и $W^2$ как решения соответствующей прямой задачи (2.3). Обозначим $W = W^1 - W^2$. Вектор-функция $W$ удовлетворяет линейным соотношениям:

$$\frac{\partial W}{\partial x} + D(W^1)\frac{\partial W}{\partial t} = \langle W, e\rangle\frac{\partial W^1}{\partial t} + EW, \quad W_0(0,t) = W_0^1(t) - W_0^2(t). \tag{3.1}$$

Здесь $e = e(W^1, W^2)$ — новый вектор-столбец; $E = E(W^1, W^2)$ — новая матрица; угловые скобки означают скалярное произведение. Компоненты вектора $e$ являются элементарными функциями компонент векторов $W^1(x,t)$, $W^2(x,t)$. Элементы матрицы $E$ —элементарные функции компонент векторов $W^1(x,t)$, $W^2(x,t)$, $W^1(x,T)$, $W^2(x,T)$. Точное представление ввиду его громоздкости не приводится; для дальнейшего анализа существенно только то, что вектор $e(x,t)$ и матрица $E(x,t)$ принадлежат $C^1(G)$. Дифференцируя вдоль характеристик, приходим от (3.1) к системе интегральных уравнений:

$$W(x,t) = W_0(t_1(x,t)) + \int_0^x \Big[\langle W, e\rangle\frac{\partial W^1}{\partial t} + EW\Big](\xi_i, x, t)\, d\xi_i \tag{3.2}$$

(индекс $i$ обозначает соответствующую характеристику). Введем норму для функции $f(x,t)$:

$$\|f\|(x) = \max_{0<t<2T}(|f(x,t)|, |\partial f(x,t)/\partial t|),$$

стандартную норму для вектора:

$$\|W\|(x) = \sum_i \|(W)_i\|(x).$$

Пусть $C_i$ — различные константы. Уравнение (3.2) с помощью обычной техники (см. [4]) приводит к оценке $\|W\|(x) \leqslant C_1\|W_0\|_{C^1}$. Затем из (2.2) нетрудно получить неравенство

$$|a^1(x) - a^2(x)| \leqslant C_2\|W\|(x) + C_3\|\varphi^1 - \varphi^2\|_{C^1},$$

которое и дает необходимую оценку.

**4. Некоторые обобщения.** При постановке задачи в п. **2** сделан ряд предположений для облегчения математических выкладок. Рассмотрим более общие случаи постановки задачи.

Ширина свободной поверхности может быть функцией от $x$ ($B = B(x)$). Это приведет к появлению нового члена в правой части (1.4):

$$\frac{\partial r}{\partial x} + u(r-s)\frac{\partial r}{\partial t} = -a(x)v(r,s) + \frac{\partial B}{\partial x}v_2(r,s), \qquad \frac{\partial s}{\partial x} - u(r-s)\frac{\partial s}{\partial t} = a(x)v(r,s) + \frac{\partial B}{\partial x}v_2(r,s).$$

Если функция $B(x)$ достаточно гладкая (например, $B(x) \in C_2[0,L]$), изменений в доказательствах теорем 1 и 2 не будет.

Можно исследовать поведение потока не только в прямоугольном русле. Пусть, например, русло имеет произвольную форму, $B = B(h,x)$. Обозначим через $z(x,t)$ уровень свободной поверхности воды, $z_b(x)$ — уровень дна в точке $x$ и введем параметр площади поперечного сечения русла

$$\omega(z,x) = \int_0^{h(z,x)} B(\xi,x)\,d\xi, \quad h(z,x) = z - z_b(x).$$

Тогда инварианты Римана должны быть введены формулами

$$r = \int_0^z (gB(\xi,x)\omega(\xi,x))^{1/2}\,d\xi + Q(x,t), \quad s = -\int_0^z (gB(\xi,x)\omega(\xi,x))^{1/2}\,d\xi + Q(x,t).$$

Вместо уравнения (1.4) получим

$$\frac{\partial r}{\partial x} + \left(\frac{g\omega}{B}\right)^{1/2}\frac{\partial r}{\partial t} = -a(x)v(r,s) + g\omega\int_0^z \frac{\partial}{\partial x}(gB\omega)^{1/2}\,d\xi,$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} - \left(\frac{g\omega}{B}\right)^{1/2}\frac{\partial s}{\partial t} = a(x)v(r,s) + g\omega\int_0^z \frac{\partial}{\partial x}(gB\omega)^{1/2}\,d\xi.$$

Дополнительная информация (1.5) в этом случае также имеет более сложную форму:

$$r(x,T) - s(x,T) = 2\int_0^{\varphi_0} (gB(\xi,x)\omega(\xi,x))^{1/2}\,d\xi = \varphi(x).$$

Тем не менее все установленные выше результаты остаются верными и для такой постановки задачи.

Следующее замечание касается дополнительной информации (1.3). Измерения уровня поверхности воды можно проводить не только на прямых $t = T$, но и на более общих прямых линиях на плоскости $x, t$. Пусть имеется наблюдатель, который движется с заданной постоянной скоростью $v_0$ вдоль канала из точки $x_0$. Предполагаем, что $v_0$ может отличаться от скорости потока. Тогда дополнительная информация должна быть задана как функция $h(x, (x - x_0)/v_0) = \varphi_0(x)$.

Автор благодарит О. Ф. Васильева и А. Ф. Воеводина за постановку задачи и полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Чугаев Р. Р.** Гидравлика. Л.: Энергоиздат, 1982.
2. **Henderson F. M.** Open Channel Flow. London: Collier-Macmillan Ltd., 1966.
3. **Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С.** Численный метод решения некоторых обратных задач гидравлики // Водные ресурсы. 1981. Т. 3. С. 114–118.
4. **Романов В. Г.** Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
5. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.

*Поступила в редакцию 24/I 1996 г.,*
*в окончательном варианте — 19/III 1996 г.*