2. Seban R. A. Transport to falling films.— In: Proc. of 6th Int. Heat Transfer Conf. Vol. 6. Ottawa, 1979.
3. Багаева С. Д., Семенов П. А., Галиуллин М. Ф. Диффузия при волновом движении тонкого слоя жидкости.— ТОХТ, 1973, т. 7, № 4.
4. Семенова И. П. Интенсификация массообмена волнами на поверхности раздела фаз при раздельном течении газожидкостной смеси. М.: изд. НИИ мех. МГУ, 1978.
5. Холпанов Л. П., Шкадов В. Я. и др. О массообмене в пленке жидкости при волнообразовании.— ТОХТ, 1967, т. 1, № 1.
6. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. и др. Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости.— ИФЖ, 1977, т. 33, № 3.
7. Ho F., Hummel R. Average velocity distributions within falling liquid films.—CES, 1970, vol. 25, p. 1225.
8. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. Препринт 36—79. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1979.
9. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 3.

УДК 532.516

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛЕНКИ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

В. И. Елисеев

(*Днепропетровск*)

Одним из основных допущений при изучении устойчивости вязких слоев жидкости является параллельность основного движения. Это относится как к пограничным слоям [1, 2], так и к тонким слоям жидкости [2—4]. Такое предположение дает возможность в уравнениях возмущенного движения параметры основного течения принимать зависящими только от поперечной координаты. В настоящее время при исследовании устойчивости уделяется внимание учету пространственности течения. Это в первую очередь относится к пограничным слоям [5], где основное течение слабо зависит от продольной координаты (для плоской пластины параметры зависят от $\mathrm{Re}^{-1/2}x^{1/2}$). Для пленки на вращающемся диске скорость зависит от $x^{1/3}$. Хотя степень при x меньше, чем в случае пограничного слоя, но здесь нет малого параметра $\mathrm{Re}^{-1/2}$, поэтому эта зависимость должна проявляться сильнее. В данной работе проводится анализ пространственной устойчивости в рамках линейной теории. В основу решения положен асимптотический метод, разработанный в [6].

Выпишем основные уравнения в цилиндрической системе координат [1]:

$$\partial u/\partial t + u\partial u/\partial r + v\partial u/\partial z - w^2/r = -\partial p/\rho\partial r + \nu(\partial^2 u/\partial r^2 + \partial u/r\partial r - u/r^2 + \partial^2 u/\partial z^2),$$

$$\partial v/\partial t + u\partial v/\partial r + v\partial v/\partial z = -\partial p/\rho\partial z + \nu(\partial^2 v/\partial r^2 + \partial v/r\partial r + \partial^2 v/\partial z^2),$$

$$\partial w/\partial t + u\partial w/\partial r + v\partial w/\partial z + uw/r = \nu(\partial^2 w/\partial r^2 + \partial w/r\partial r - w/r^2 + \partial^2 w/\partial z^2),$$

$$\partial u/\partial r + u/r + \partial v/\partial z = 0.$$

Здесь r лежит в радиальной плоскости; z перпендикулярна ей; u — радиальная, v — осевая, w — тангенциальная составляющие скорости; p — давление; ν — кинематический коэффициент вязкости; ρ — плотность. В этих уравнениях отброшены члены, зависящие от угла θ, так как в дальнейшем будем считать, что ни основное, ни возмущенное течения не зависят от него.

Граничными условиями для выписанных уравнений являются условия на диске и на свободной поверхности

$$w = \Omega r, \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (z = 0),$$

$$v = \partial a/\partial t + u\partial a/\partial r \quad (z = a),$$

$$p_{n\tau} = 0, \quad p_{nn} = -p_a + \frac{\sigma}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial a}{\partial r}\right),$$

где a — толщина пленки; $p_{n\tau}$ — касательное к поверхности пленки напряжение; p_{nn} — нормальное напряжение; σ — поверхностное натяжение; Ω — угловая скорость. Для исследования устойчивости в рамках линейной модели представим все параметры течения в виде

$$u = W(u_y + u_\delta),\ v = W(v_y + v_\delta),\ w = W(w_y + w_\delta),\ a = a_0(y + \delta),$$

где W — масштаб скорости; u_y, v_y, w_y — соответствующие компоненты невозмущенной скорости; u_δ, v_δ, w_δ — соответствующие компоненты возмущенной скорости; a_0 — линейный масштаб; y — относительная толщина невозмущенной пленки; δ — амплитуда возмущения поверхности, отнесенная к a_0.

Дальнейшее рассмотрение проведем в переменных

$$\xi = r/a_0,\quad n = z/a,\quad \tau = Wt/a_0.$$

Задача о течении пленки на вращающихся дисках рассматривалась в работах [2, 4, 7—9]. В [2, 4, 7] получены асимптотические решения, в основе которых лежат разные подходы к задаче. В [8, 9] проведены численные расчеты течения пленки, причем в [8] задача решалась с учетом начального профиля пленки. В нашем случае воспользуемся следующим асимптотическим представлением параметров пленки при больших ξ:

$$(1)\qquad u_y = \mathrm{Re}\left(n - \frac{1}{2}n^2\right)\xi^{-1/3} + \mathrm{Re}^3\left\{\frac{124}{315}\left(n - \frac{1}{2}n^2\right) - \frac{2}{9}\frac{\mathrm{Fr}^{-1}}{\mathrm{Re}^2}\left(n - \frac{1}{2}n^2\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{n^6}{630} - \frac{n^5}{60} - \frac{n^4}{36} + \frac{2}{9}n^3 - \frac{22}{45}n\right)\right\}\xi^{-9/3},$$
$$w_y = \xi + \mathrm{Re}^2\left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{12} - \frac{2}{3}n\right)\xi^{-5/3},$$
$$y = \xi^{-2/3} + \mathrm{Re}^2\left(\frac{62}{315} - \frac{2}{9}\frac{\mathrm{Fr}^{-1}}{\mathrm{Re}^2}\right)\xi^{-10/3},\quad \mathrm{Re} = \frac{a_0W}{\nu},\quad \mathrm{Fr}^{-1} = \frac{ga_0}{W^2}.$$

Анализ этих выражений и сравнение с экспериментальными и численными результатами показали [10], что формулы (1) могут быть пригодны до $r/l \simeq 1{,}5$, где $l = \left(\frac{9}{4\pi^2}\frac{Q^2}{\nu\Omega}\right)^{1/4}$, Q — объемный расход. Из условия сохранения массы и граничного условия на диске можно определить масштабы

$$(2)\qquad a_0 = \left(\frac{3}{2\pi}\frac{\nu Q}{\Omega^2}\right)^{1/5},\quad W = a_0\Omega.$$

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений возмущенного движения. В рамках линейной теории устойчивости выпишем уравнения возмущенного движения и граничные условия:

$$(3)\qquad \frac{\partial u_\delta}{\partial\tau} - \frac{\dot\delta}{y}n\frac{\partial u_y}{\partial n} + u_y\frac{\partial u_\delta}{\partial\xi} - \frac{\delta'}{y}u_y n\frac{\partial u_y}{\partial n} + \frac{v_\delta}{y}\frac{\partial u_y}{\partial n} - 2\frac{w_y w_\delta}{\xi} =$$
$$= -\frac{\partial p_\delta}{\rho\partial\xi} + n\frac{\delta'}{y}\frac{\partial p_y}{\rho\partial n} + \mathrm{Re}^{-1}\left\{\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial\xi^2} - \frac{\delta''}{y}n\frac{\partial u_y}{\partial n} + 4\frac{y'\delta'}{y^2}n\frac{\partial u_y}{\partial n} - 2\frac{y'}{y}n\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial\xi\partial n} - \right.$$
$$\left. - 2\frac{\delta'}{y}n\frac{\partial^2 u_y}{\partial\xi\partial n} + 2\frac{y'\delta'}{y^2}n^2\frac{\partial^2 u_y}{\partial n^2} + \xi^{-1}\frac{\partial u_\delta}{\partial\xi} + y^{-2}\left(\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial n^2} - 2\frac{\delta}{y}\frac{\partial^2 u_y}{\partial n^2}\right)\right\},$$
$$\frac{\partial v_\delta}{\partial\tau} - \frac{\dot\delta}{y}n\frac{\partial v_y}{\partial n} + u_y\frac{\partial v_\delta}{\partial\xi} = -y^{-1}\left(\frac{\partial p_\delta}{\partial n} - \frac{\delta}{y}\frac{\partial p_y}{\partial n}\right) +$$
$$+ \mathrm{Re}^{-1}\left\{\frac{\partial^2 v_\delta}{\partial\xi^2} + y^{-2}\left(\frac{\partial^2 v_\delta}{\partial n^2} - 2\frac{\delta}{y}\frac{\partial^2 v_y}{\partial n^2}\right)\right\} - \frac{\delta}{y}\mathrm{Fr}^{-1},$$
$$\frac{\partial w_\delta}{\partial\tau} + u_\delta\frac{\partial w_y}{\partial\xi} + \frac{w_y u_\delta}{\xi} = \mathrm{Re}^{-1}\left\{\frac{\partial^2 w_\delta}{\partial\xi^2} + y^{-2}\left(\frac{\partial^2 w_\delta}{\partial n^2} - 2\frac{\delta}{y}\frac{\partial^2 w_y}{\partial n^2}\right)\right\},$$
$$\frac{\partial u_\delta}{\partial\xi} - \frac{y'}{y}n\frac{\partial u_\delta}{\partial n} + \frac{y'}{y}n\frac{\delta}{y}\frac{\partial u_y}{\partial n} - \frac{\delta'}{y}n\frac{\partial u_y}{\partial n} + \xi^{-1}u_\delta + y^{-1}\frac{\partial v_\delta}{\partial n} - \frac{\delta}{y^2}\frac{\partial v_y}{\partial n} = 0;$$

$$
(4) \qquad u_\delta = 0, \quad v_\delta = 0, \quad w_\delta = 0 \ (n=0),
$$

$$
v_\delta = \dot{\delta} + u_y\delta' + y'u_\delta \quad (n = 1),
$$

$$
y^{-1}\frac{\partial u_\delta}{\partial n} + \frac{\partial v_\delta}{\partial \xi} - \frac{y'}{y}\, n\frac{\partial v_\delta}{\partial n} - \frac{\delta'}{y}\, n\frac{\partial v_y}{\partial n} = 2y'\left(\frac{\partial u_\delta}{\partial \xi} - y^{-1}\frac{\partial v_\delta}{\partial n}\right) + 2\delta'\left(\frac{\partial u_y}{\partial \xi} - y^{-1}\frac{\partial v_y}{\partial n}\right),
$$

$$
-p_\delta + 2\mathrm{Re}^{-1}\left(y^{-1}\frac{\partial v_\delta}{\partial n} - \frac{\delta}{y^2}\frac{\partial v_y}{\partial n}\right) = \left(\delta'' + \frac{\delta'}{\xi}\right)\mathrm{We}^{-1},
$$

где $\dot{\delta} = \partial\delta/\partial\tau$; $\delta' = \partial\delta/\partial\xi$; $y' = dy/d\xi$; $\mathrm{We}^{-1} = \sigma/(\rho a_0 W^2)$.

Из выражений (3), (4) видно, что при $\delta = 0$ имеем тривиальное решение системы. Как это принято в теории пространственной устойчивости, будем задавать возмущения свободной поверхности в виде $\delta = e^{i\omega\tau}\,\bar{\delta}(\xi)$, где ω — частота колебаний, тогда все определяемые параметры примут вид

$$
\zeta_\delta = e^{i\omega\tau}\,\bar{\zeta}_\delta, \quad \zeta_\delta = \{u_\delta, v_\delta, w_\delta, p_\delta\}.
$$

После подстановки этих выражений в (1), (2) получим задачу на собственные значения и собственные функции.

Для нахождения решений представим определяемые величины как (черту над ζ_δ для удобства опустим)

$$
(5) \qquad \delta \sim \xi^m \exp\,[i(\gamma\xi^k + \ldots)], \quad u_\delta \sim \xi^p \exp\,[i(\gamma\xi^k + \ldots)],
$$

$$
v_\delta \sim \xi^r \exp\,[i(\gamma\xi^k + \ldots)], \quad p_\delta \sim \xi^s \exp\,[i(\gamma\xi^k + \ldots)].
$$

В выражениях (5) указаны старшие по ξ члены. В основе определения m, p, r, s, k лежат требования регулярности разложений и условие, что γ есть собственное значение, т. е. $\gamma = \gamma(\omega)$. Сохраняя первые три члена в кинематическом уравнении на поверхности пленки, из уравнения сохранения массы и из последнего условия (4) получим $m = r = p - 1/3$, $s = p + 1/3$, $k = 4/3$. Таким образом, решения уравнений (3) можно записать в виде

$$
(6) \qquad \delta = A\xi^{p-1/3}\chi,
$$

$$
u_\delta = A\xi^p(u_0 + \xi^{-2/3}u_1 + \xi^{-4/3}u_2 + \ldots)\chi,
$$

$$
v_\delta = A\xi^{p-1/3}(v_0 + \xi^{-2/3}v_1 + \xi^{-4/3}v_2 + \ldots)\chi,
$$

$$
p_\delta = A\xi^{p+1/3}(p_0 + \xi^{-2/3}p_1 + \xi^{-4/3}p_2 + \ldots)\chi,
$$

$$
w_\delta = A\xi^{p-4/3}(w_0 + \xi^{-2/3}w_1 + \xi^{-4/3}w_2 + \ldots)\chi,
$$

$$
\chi = \exp\,[i(\gamma_0\xi^{4/3} + \gamma_1\xi^{2/3} + \gamma_2\xi^{-2/3} + \ldots)],
$$

где γ_j и p — волновые числа. Для определения устойчивости течения теперь необходимо из выписанных уравнений и граничных условий определить γ_j и p. Подставляя (6) в уравнения (3) и граничные условия (4), получим цепочку уравнений для определения собственных функций. Опуская громоздкие промежуточные выражения, выпишем сразу p и γ_j:

$$
(7) \qquad \gamma_0 = -1{,}333\frac{\omega}{\mathrm{Re}}, \quad \gamma_1 = 3{,}556\gamma_0^3 + i1{,}580\gamma_0^4\mathrm{We}^{-1},
$$

$$
p = -0{,}333 + \left(0{,}237 - 0{,}593\frac{\mathrm{Fr}^{-1}}{\mathrm{Re}^2}\right)\mathrm{Re}^2\gamma_0^2 - 9{,}739\gamma_0^6\mathrm{We}^{-1} +
$$

$$
+ i\,(4{,}916\gamma_0^5 - 3{,}330\gamma_0^7\mathrm{We}^{-2}),
$$

$$
\gamma_2 = 0{,}724\gamma_0^3\mathrm{We}^{-1} - 0{,}439\gamma_0^5\mathrm{Re}^2\mathrm{We}^{-1} - 5{,}161\gamma_0^7 + 2{,}770\gamma_0^5\mathrm{Fr}^{-1}\mathrm{We}^{-1} +
$$

$$
+ 54{,}746\gamma_0^6\mathrm{We}^{-2} - i\left[3{,}160\left(0{,}038 + 1{,}067\frac{\mathrm{Fr}^{-1}}{\mathrm{Re}^2}\right)\gamma_0^4\mathrm{Re}^2 +\right.
$$

$$
\left. + 0{,}494\gamma_0^2 + 51{,}885\gamma_0^6\mathrm{We}^{-1} - 14{,}468\gamma_0^{10}\mathrm{We}^{-3}\right].
$$

При определении волновых чисел (7) использовались только первые члены в (1). Для того чтобы включить в рассмотрение вторые члены в формулах (1), необходимо рассмотреть приближения, нахождение которых сопряжено с большим объемом работы, поэтому для учета вторых членов разложения (1) были найдены только те части γ_3 и γ_4, которые непосредственно связаны с указанными членами. В результате имеем дополнительно к (7) следующие выражения:

$$\gamma_3 = -1{,}282\,\mathrm{Re}^2\gamma_0, \quad \gamma_4 = -2{,}339\,\mathrm{Re}^2\,\gamma_0^3 - i\,3{,}320\gamma_0^4\,\mathrm{Re}^2\,\mathrm{We}^{-1}.$$

Таким образом, распространения поверхностных возмущений можно описать выражениями

$$\frac{\delta}{y} = \exp\left[i\left(\omega\tau + f_i\right) + f_r\right], \tag{8}$$

$$f_i = \gamma_0\xi^{4/3} + 3{,}556\gamma_0^3\xi^{2/3} + \left(4{,}916\gamma_0^5 - 3{,}330\gamma_0^7\,\mathrm{We}^{-1}\right)\ln\xi +$$
$$+\left[0{,}724\gamma_0^3\,\mathrm{We}^{-1} - 1{,}778\left(0{,}247 - 1{,}580\frac{\mathrm{Fr}^{-1}}{\mathrm{Re}^2}\right)\gamma_0^5\,\mathrm{Re}^2\,\mathrm{We}^{-1} -\right.$$
$$\left. - 5{,}161\gamma_0^7 + 54{,}746\gamma_0^9\,\mathrm{We}^{-2}\right]\xi^{-2/3} - 1{,}282\,\mathrm{Re}^2\,\gamma_0\xi^{-4/3} - 2{,}339\,\mathrm{Re}^2\,\gamma_0^3\xi^{-6/3},$$

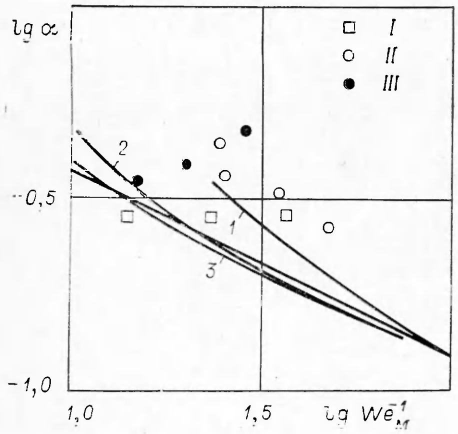
$$f_r = -1{,}580\gamma_0^4\,\mathrm{We}^{-1}\xi^{2/3} + \left[1{,}778\left(0{,}133 - 0{,}333\frac{\mathrm{Fr}^{-1}}{\mathrm{Re}^2}\right)\gamma_0^2\,\mathrm{Re}^2 -\right.$$
$$\left. - 9{,}739\gamma_0^6\,\mathrm{We}^{-1}\right]\ln\xi + \left[3{,}160\left(0{,}038 + 1{,}067\frac{\mathrm{Fr}^{-1}}{\mathrm{Re}^2}\right)\gamma_0^4\,\mathrm{Re}^2 + 0{,}494\gamma_0^2 +\right.$$
$$\left. + 51{,}885\gamma_0^8\,\mathrm{We}^{-1} - 14{,}468\gamma_0^{10}\,\mathrm{We}^{-3}\right]\xi^{-2/3} + 3{,}320\gamma_0^4\,\mathrm{Re}^2\,\mathrm{We}^{-1}\,\gamma^{-6/3}.$$

Из (8) следует, что возмущения распространяются только в сторону увеличения ξ, что подтверждается экспериментом [10]. Если теперь продифференцировать мнимую часть в экспоненте по τ, то получим безразмерную фазовую скорость

$$c_\text{ф} = -\omega\left\{1{,}333\gamma_0\,\mathrm{We}^{-1}\,\xi^{1/3} + 2{,}370\gamma_0^3\xi^{-1/3} + \left(4{,}916\gamma_0^5 -\right.\right.$$
$$\left. - 3{,}330\gamma_0^7\,\mathrm{We}^{-2}\right)\xi^{-1} - 0{,}667\left[0{,}724\gamma_0^3\,\mathrm{We}^{-1} - \left(0{,}247 - 1{,}580\frac{\mathrm{Fr}^{-1}}{\mathrm{Re}^2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times 1{,}778\gamma_0^5\,\mathrm{Re}^2\,\mathrm{We}^{-1} - 5{,}161\gamma_0^7 + 54{,}746\gamma_0^9\,\mathrm{We}^{-2}\right]\xi^{-5/3} +$$
$$\left. + 1{,}709\,\mathrm{Re}^2\gamma_0\xi^{-7/3} + 4{,}678\gamma_0^3\,\mathrm{Re}^2\,\xi^{-9/3}\right\}^{-1},$$

откуда видно, что $c_\text{ф}$ имеет при некотором γ_0 минимум. Функция f_r указывает на изменение амплитуды возмущений. При $f_r > 0$ возмущения с ростом ξ увеличиваются, при $f_r < 0$ — затухают. Для случая, когда $\mathrm{Re}^2 < (5/2)\mathrm{Fr}^{-1}$, f_r с ростом ξ убывает для всех длин волн, т. е. в этом случае течение пленки абсолютно устойчиво. Для $\mathrm{Re}^2 > (5/2)\mathrm{Fr}^{-1}$ величина f_r зависит от длины волны. При возникновении коротковолновых возмущений по мере их распространения на некотором расстоянии ξ начинает влиять первый член в f_r, в результате чего эти возмущения затухают. Чем меньше γ_0, тем на большие расстояния от центра диска распространяются соответствующие им возмущения. Рост возмущений приводит к появлению волн на поверхности пленки. Экспериментальному исследованию волнового движения пленки на диске посвящены работы [10—12]. В [12] показано, что волны на поверхности пленки появляются на некотором расстоянии

$$L_\text{вх} = \left(Q/(2\pi\nu^{1/2}\Omega^{1/2})\right)^{1/2}.$$



Дальнейшее поведение волн зависит от подаваемого расхода и угловой скорости диска. В [9] численно показано, что при некотором расходе жидкости наступает «захлебывание» пленки. Максимальная величина расхода, при котором «захлебывание» наступает на расстоянии радиуса диска, определяется формулой

$$Q = 1{,}9\pi R_д^2 \Omega^{1/2} \nu^{1/2}.$$

Интересно отметить, что если вместо радиуса диска взять текущий радиус, соответствующий моменту «захлебывания», то получим величину, близкую к $L_{вх}$ работы [12]:

$$R_з = (Q/(1{,}9\pi\nu^{1/2}\Omega^{1/2}))^{1/2}.$$

В нашем случае мы не можем описать возникновение и распространение возмущений в этой области, так как $L_{вх} < l$, а асимптотическое разложение (1), как указывалось, справедливо при $r/l \geqslant 1{,}5$. Однако с помощью выражений (8) можно получить характеристики поверхностных волн, в частности волновое число $\alpha = 2\pi\delta/\lambda$. Как видно из последнего выражения (8), f_r имеет максимальное значение при некотором значении γ_0. Это соответствует наиболее быстро растущим возмущениям. На фигуре, взятой из [10], приведены кривые волновых чисел, рассчитанные для указанных возмущений: кривой *1* соответствует $\mathrm{Re} = 47{,}537$, $\mathrm{We}^{-1} = 88{,}868$; *2* — $\mathrm{Re} = 65{,}560$, $\mathrm{We}^{-1} = 24{,}542$; *3* — $\mathrm{Re} = 75{,}303$, $\mathrm{We}^{-1} = 14{,}096$; точки *I* — $\nu^* = 1$, $\sigma^* = 0{,}83$; *II* — $\nu^* = 1$, $\sigma^* = 0{,}96$; *III* — $\nu^* = 2{,}6$, $\sigma^* = 0{,}85$ (ν^*, σ^* — кинематический коэффициент вязкости и коэффициент поверхностного натяжения жидкости, отнесенные к соответствующей величине дистиллированной воды).

Прямая соответствует наиболее растущим возмущениям для пленок на вертикальной поверхности. По оси абсцисс отложены местные числа Вебера $\mathrm{We}_м^{-1} = 9\mathrm{We}^{-1}\mathrm{Re}^{-2}\xi^{4/3}$. Из фигуры видно, что с ростом числа Вебера волновые числа уменьшаются. При постоянных числах Re и We^{-1} увеличение местного числа $\mathrm{We}_м^{-1}$ связано с увеличением ξ, а увеличение ξ приводит к тому, что задача о течении пленки на диске совпадает с течением пленки на стенке [2]. Отсюда следует, что при увеличении ξ волновые числа приближаются к волновым числам на текущей по стенке пленке.

Поступила 3 IX 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
2. **Шкадов В. Я.** Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости.— Труды МГУ, 1973, № 25.
3. **Лышевский А. С.** Закономерности дробления жидкостей механическими форсунками давления. Новочеркасск: Новочеркасск. политехн. ин-т, 1961.
4. **Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И.** Распыливание жидкостей. М.: Машиностроение, 1977.
5. **Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я.** Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982.
6. **Елисеев В. И.** Устойчивость струй идеальной весомой жидкости.— ПМТФ, 1981, № 3.
7. **Freidenraich N.** Flow of a liquid film over a rotating disk.— Revista Mexicana de Fisica, 1976, vol. 25, N 2.
8. **Дорфман Л. А.** Течение и теплообмен в слое вязкой жидкости на вращающемся диске.— ИФЖ, 1967, т. 12, № 3.
9. **Лепехин Г. И., Рябчук Г. В. и др.** Течение вязкой жидкости по поверхности вращающегося плоского диска.— ТОХТ, 1981, т. 15, № 3.

10. **Charwat A. F., Kelly R. E.** The flow and stability of thin liquid films on a rotating disk.— J. Fluid Mech., 1972, vol. 53, p. 2.
11. **Espig H., Hoyle R.** Waves in a thin liquid layer on a rotating disk.— J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, p. 4.
12. **Бутузов А. И., Пуховой И. И.** О режимах течения пленки жидкости на вращающейся поверхности.— ИФЖ, 1976, т. 31, № 2.

УДК 532.526

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ИСКАЖЕНИИ СРЕДНЕГО ПОЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ СОБСТВЕННЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Н. А. Желтухин, Н. М. Терехова

(Новосибирск)

1. Одной из фаз нелинейного развития возмущений в области перехода от ламинарного режима течения к турбулентному в пограничном слое вязкой несжимаемой жидкости на пластине является фаза зарождения и последующего развития трехмерного осцилляционного поля, в результате чего возмущения обнаруживают четко выраженную пространственную структуру с чередующимися максимумами (гребнями или пиками) и минимумами (впадинами) амплитуд в поперечном направлении (по оси z). Вопрос о причинах появления в течении такого собственного волнового поля еще окончательно не выяснен. Одной из них может быть взаимодействие первоначально плоских возмущений конечной интенсивности с малыми локальными пространственными неоднородностями среднего течения, которое приводит к порождению пары косых волн Толлмина — Шлихтинга [1]. Собственные слабые неоднородности волн, имеющие место в районе передней кромки, также могут нести в себе прообраз будущих реальных волновых полей.

Дальнейшее трехволновое резонансное взаимодействие в области нелинейного развития плоских волн приводит к усилению трехмерных компонент [2, 3]. Так, в [4] показано, что при достижении пороговых амплитуд $\varkappa_д \sim 0{,}007$ начинается сильный рост косых волн, так что собственное поле возмущений пограничного слоя принимает вид аддитивного поля волн Толлмина — Шлихтинга:

$$
\begin{aligned}
u'(x, y, z, t) &= \varkappa_д u_д(y)\,e^{\Omega_1} + 2\varkappa_т u_т(y)\,e^{\Omega_2}\cos\beta z,\\
v'(x, y, z, t) &= \varkappa_д v_д(y)\,e^{\Omega_1} + 2\varkappa_т v_т(y)\,e^{\Omega_2}\cos\beta z,\\
w'(x, y, z, t) &= 2\varkappa_т i w_т(y)\,e^{\Omega_2}\sin\beta z,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где $\Omega_1 = i\alpha_1(x - C_1t)$; $\Omega_2 = i\alpha_2(x - C_2t)$. Угол наклона косых волн к плоскости течения определяется как $\theta = \operatorname{arctg}\beta/\alpha$. Наличие собственных возмущений такого вида приводит к качественному изменению структуры среднего течения — в нем обнаруживаются минимумы средней скорости в местах пиков волн и максимумы в местах впадин. Это интерпретируется как появление в потоке системы локализованных в пограничном слое продольных вихрей, периодических по координате z и стационарных (или квазистационарных) во времени (вихри Бенни — Линя). Исследование вторичных вихревых режимов проведено в ряде работ [5—7] по методу возмущений в рамках слабонелинейной теории. Показано, что наличие слабой трехмерности $\varkappa_д \gg \varkappa_т$ вызывает к жизни слабый подковообразный вихрь, занимающий положение, определяемое полупериодом волн (1.1) $0 \leqslant \beta z \leqslant \pi$. Рост амплитудного параметра $\varkappa_т$ приводит к усложнению этой вторичной структуры, и при $\varkappa_т \gg \varkappa_д$ вихревая картина представится системой противоположно закрученных пар. Такой предельный случай рассмотрен в [8] на основе численного решения уравнений Рейнольдса для осредненного течения, что позволило установить не только количественные зависимости вихреобразования от величин $\varkappa_т$, но и рассчитать