

УДК 532.5

## ВОЗМОЖНОСТЬ ИДЕНТИФИКАЦИИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЖИДКОСТЕЙ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ С КРУТИЛЬНЫМ ВИСКОЗИМЕТРОМ

А. Е. Коренченко, О. А. Головня\*, В. П. Бескачко\*

Институт металлургии УрО РАН, 620219 Екатеринбург

\* Южно-Уральский государственный университет, 454080 Челябинск

E-mail: korenchenko@physics.susu.ac.ru

Представлены результаты численного решения задачи о колебаниях крутильного вискозиметра, заполненного вязкопластической жидкостью. Показано, что вблизи оси вращения возникает застойная зона, положение границы которой в процессе колебаний изменяется. Определено влияние пластических свойств жидкости на частоту и коэффициент затухания колебаний вискозиметра. Предложен способ идентификации вязкопластических свойств по наблюдаемым параметрам колебаний.

**Ключевые слова:** неньютоновские жидкости, вязкопластические жидкости, крутильный вискозиметр.

**Введение.** Метод крутильных колебаний широко используется на практике, в частности, при исследовании внутреннего трения в конденсированных средах. В физике жидкостей, особенно агрессивных (металлические расплавы, расплавы солей), этот метод является основным методом измерения вязкости. Одним из главных его достоинств является возможность измерения периода и коэффициента затухания колебаний с точностью, труднодостижимой или недостижимой при использовании других методик. Это обстоятельство позволяет реализовать данный метод как абсолютный, если задачу о связи измеряемых параметров с параметрами жидкости удастся решить с достаточной степенью точности. В настоящее время такая задача аналитически решена лишь для ньютоновских [1] или вязкоупругих [2] жидкостей. Большинство экспериментальных данных, полученных с помощью крутильного вискозиметра, интерпретированы в предположении о ньютоновском поведении исследуемой жидкости. Слабо изучена возможность использования метода при исследовании реологических свойств иных жидкостей. В частности, неясно, насколько изменяются измеряемые параметры колебаний, если свойства жидкости отличаются от ньютоновских. Особый интерес представляет ситуация, когда отличие невелико и при обработке экспериментальных данных используется ньютоновское приближение. Например, в работе [3] обнаружены упругие свойства воды — жидкости, считающейся классическим примером ньютоновской среды. Кроме того, неточные реологические уравнения, возможно, являются одной из причин большого различия экспериментальных данных о вязкости другого класса “ньютоновских” жидкостей — металлических расплавов. В связи с этим актуальной представляется оценка параметров колебаний вискозиметра, заполненного средой со слабовыраженными неньютоновскими свойствами.

В данной работе рассматривается модель вискозиметра, заполненного вязкопластической жидкостью — средой, течение которой становится возможным только после того, как сдвиговое напряжение превысит некоторый порог — предел текучести. Учитывая известные математические проблемы, возникающие при описании даже простых течений

вязкопластических жидкостей [4], на данном этапе исследований ограничимся рассмотрением самой простой модели — линейной вязкопластической среды.

**Математическая модель.** Пусть подвешенный на упругой нити цилиндрический сосуд высотой  $H$  с внутренним радиусом  $R_{\text{ц}}$  и моментом инерции  $I_{\text{ц}}$  заполнен вязкопластической жидкостью и совершает затухающие крутильные колебания вокруг собственной оси. Необходимо определить зависимость частоты  $f$  и коэффициента затухания  $p$  колебаний цилиндра от вязкопластических свойств. В приближении бесконечно длинного цилиндра и в предположении осевой симметрии течения от нуля отлична только азимутальная компонента скорости жидкости  $V_{\varphi}$ . В этом случае в цилиндрической системе координат уравнение движения вязкопластической среды в зоне вязкого течения записывается в виде

$$\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}) \right), \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\tau_{r\varphi}$  — компонента тензора напряжений. Для линейного вязкопластического материала справедливы соотношения [5]

$$\tau_{ij} = -(\eta + \tau_0 / \sqrt{|\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}|/2}) \dot{\epsilon}_{ij}, \quad \sqrt{(\tau, \tau)/2} > \tau_0; \quad (2)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = 0, \quad \sqrt{(\tau, \tau)/2} \leq \tau_0, \quad (3)$$

где  $\eta$  — динамическая вязкость;  $\tau_0$  — предел текучести;  $\tau_{ij}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций, среди которых в принятом приближении отличны от нуля только компоненты  $\tau_{r\varphi}$  и  $\dot{\epsilon}_{r\varphi} = \partial V_{\varphi} / \partial r - V_{\varphi} / r$ . Уравнение (1) справедливо только в области, где выполнены условия вязкого течения (2), остальная часть жидкости движется как твердое тело (образует застойную зону). Таким образом, в принятом приближении застойная зона может представлять собой либо цилиндр (если находится в центре вискозиметра), либо цилиндрический слой некоторой толщины. Тогда уравнения движения цилиндра вискозиметра и застойных зон принимают вид

$$I_{\text{ц}} \frac{d\omega_{\text{ц}}}{dt} = -\kappa\varphi + M_{\text{ц}}; \quad (4)$$

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} = M_i, \quad (5)$$

где  $\kappa$  — коэффициент крутильной жесткости нити;  $\varphi$  — угол поворота цилиндра;  $I_i$ ,  $\omega_i$  — момент инерции и угловая скорость застойной зоны;  $\omega_{\text{ц}}$  — угловая скорость цилиндра;  $M_{\text{ц}}$ ,  $M_i$  — моменты сил трения, действующие на цилиндр и застойную зону со стороны жидкости; индекс  $i$  соответствует номеру зоны начиная от оси цилиндра вискозиметра. В (5) предполагается, что одновременно может существовать несколько застойных зон.

В качестве граничных условий приняты условия прилипания на твердых границах

$$V_{\varphi}(R_{\text{ц}}, t) = \omega_{\text{ц}} R_{\text{ц}}, \quad V_{\varphi}(R_{\text{ext},i}, t) = \omega_i R_{\text{ext},i}, \quad V_{\varphi}(R_{\text{int},i}, t) = \omega_i R_{\text{int},i}. \quad (6)$$

Здесь  $R_{\text{ext},i}$ ,  $R_{\text{int},i}$  — внешний и внутренний радиусы  $i$ -й застойной зоны. До начала движения цилиндр с жидкостью находится в покое и повернут на некоторый угол  $\varphi_0$  относительно положения равновесия. В момент  $t = 0$  цилиндр отпускают. В этом случае начальные условия записываются в виде

$$V_{\varphi}(r, 0) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \omega_{\text{ц}}(0) = 0. \quad (7)$$

Численное решение находится методом конечных разностей. Уравнения (1)–(7) приводятся к безразмерному виду, причем все расстояния отнесены к радиусу  $R_{\text{ц}}$ , скорости — к  $\nu/R_{\text{ц}}$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости), давление — к  $\rho\nu^2/R_{\text{ц}}^2$  ( $\rho$  — плотность жидкости), время — к  $R_{\text{ц}}^2/\nu$ . Используется равномерная сетка с максимальным разбиением

до 2000 шагов в радиальном направлении. Дискретизация пространственных производных производится по схеме центральных разностей с точностью до  $(\Delta x)^2$ , а временных — по односторонней схеме с точностью до  $\Delta t$ . Решение линеаризованных систем уравнений на каждом временном шаге проводится методом прогонки [6]. При решении системы (1)–(7) в момент  $t^{n+1}$  используется определенное на предыдущем временном шаге положение границы, отделяющей область, в которой жидкость движется как твердое тело, от области вязкого течения. С учетом конечной точности численной схемы разностный аналог определяющих соотношений (2) записывается в виде:

— в области вязкого течения

$$\sqrt{(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon})/2} \geq \delta;$$

— в застойных зонах

$$\sqrt{(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon})/2} < \delta$$

( $\delta$  — малый параметр). В предварительных расчетах установлено, что  $\delta = \tau_0 R_{\text{ц}}^2 / (N \nu^2 \rho)$  ( $N$  — количество пространственных разбиений).

При проведении расчетов выбирались следующие значения параметров вискозиметра и вязкопластической среды: радиус цилиндра  $R_{\text{ц}} = 0,01$  м, момент инерции  $I_{\text{ц}} = 3I_{\text{ж}}$  ( $I_{\text{ж}}$  — момент инерции “замороженной” жидкости); крутильная жесткость нити выбиралась так, что начальный период колебаний составлял 2,9, 4,18 или 6,61 с. Вязкость и плотность жидкой среды соответствовали воде. Предел текучести выбирался малым:  $\tau_0 \leq 10^{-3}$  Па.

**Результаты и обсуждение.** Как показали расчеты, для колебаний с малой амплитудой скорость деформации отлична от нуля лишь в области, прилегающей к поверхности цилиндра. Вдоль оси может сформироваться застойная зона, не исчезающая со временем. По мере затухания колебаний наблюдается увеличение в среднем радиуса осевой застойной зоны, которое в некоторый момент времени оказывает влияние на колебания цилиндра, коэффициент затухания и частоту колебаний вискозиметра.

На рис. 1 представлены зависимости коэффициента затухания и частоты колебаний вискозиметра от времени при различных значениях периода колебаний  $T$ , который легко

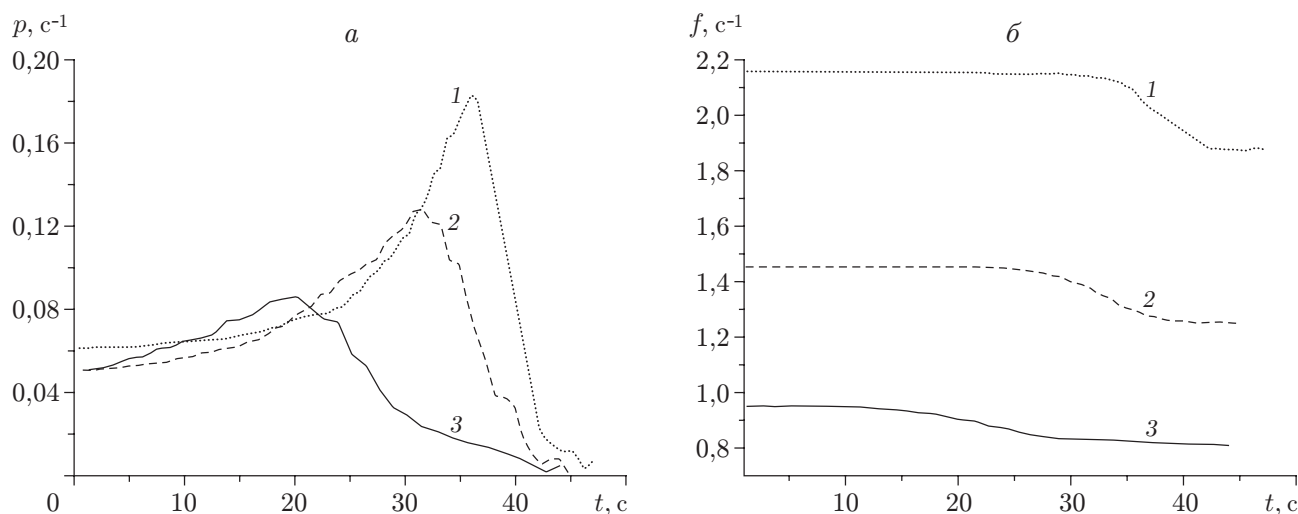


Рис. 1. Зависимости коэффициента затухания (а) и частоты (б) колебаний вискозиметра от времени при различных значениях периода крутильных колебаний ( $\tau_0 = 10^{-4}$  Па,  $R_{\text{ц}} = 0,01$  м,  $I_{\text{ц}}/I_{\text{ж}} = 3$ ):  
 1 —  $T = 2,90$  с; 2 —  $T = 4,18$  с; 3 —  $T = 6,61$  с

варьировать в эксперименте, изменяя длину нити подвеса. Для получения кривых 1–3 закон движения вискозиметра  $\varphi(t)$  аппроксимировался функцией

$$\varphi(t) = A e^{-pt} \sin(ft + \psi),$$

где  $f$  — частота колебаний;  $p$  — коэффициент затухания. Аппроксимация осуществлялась методом наименьших квадратов с минимизацией методом Розенброка [7]. Характеристики колебаний определялись локально на основе данных для небольшого участка записи колебаний. На временной зависимости характеристик колебаний вискозиметра (рис. 1) можно выделить три основных участка. Первый участок характеризуется постоянными значениями  $p$  и  $f$ . На втором участке происходит увеличение коэффициента затухания и уменьшение частоты колебаний, что обусловлено перекрыванием пограничных слоев жидкости, “налипших” на застойную зону и цилиндр вискозиметра. При этом коэффициент затухания и частота изменяются на величину, достаточную для регистрации в экспериментах с крутильным вискозиметром, в которых можно достичь относительной погрешности измерения порядка  $10^{-4}$ . Третий участок развития колебаний характеризуется резким уменьшением коэффициента затухания почти до нуля. Это обусловлено тем, что радиус осевой застойной зоны увеличивается настолько, что она может “прилипнуть” к цилиндру. В этом случае вся система движется как твердое тело. При этом затухание определяется схемной вязкостью, а значит, мало, частота колебаний остается постоянной, так как момент инерции системы не изменяется. При “прилипании” застойной зоны к цилиндру момент инерции становится наибольшим и равен сумме моментов инерции цилиндра и “замороженной” жидкости в нем.

На рис. 1 видно, что разделение на участки условно. Изменение коэффициента затухания и частоты колебаний будет тем больше, чем меньше период колебаний. При выборе в эксперименте очень малого периода (большой крутильной жесткости нити подвеса) нужно учитывать следующее: с уменьшением периода стационарный участок зависимостей  $p(t)$  и  $f(t)$  увеличивается, таким образом, амплитуда колебаний будет меньше в тот момент, когда коэффициент затухания начнет изменяться. Это может вызвать затруднения при отделении очень малого сигнала (затухающей синусоиды) от шумов.

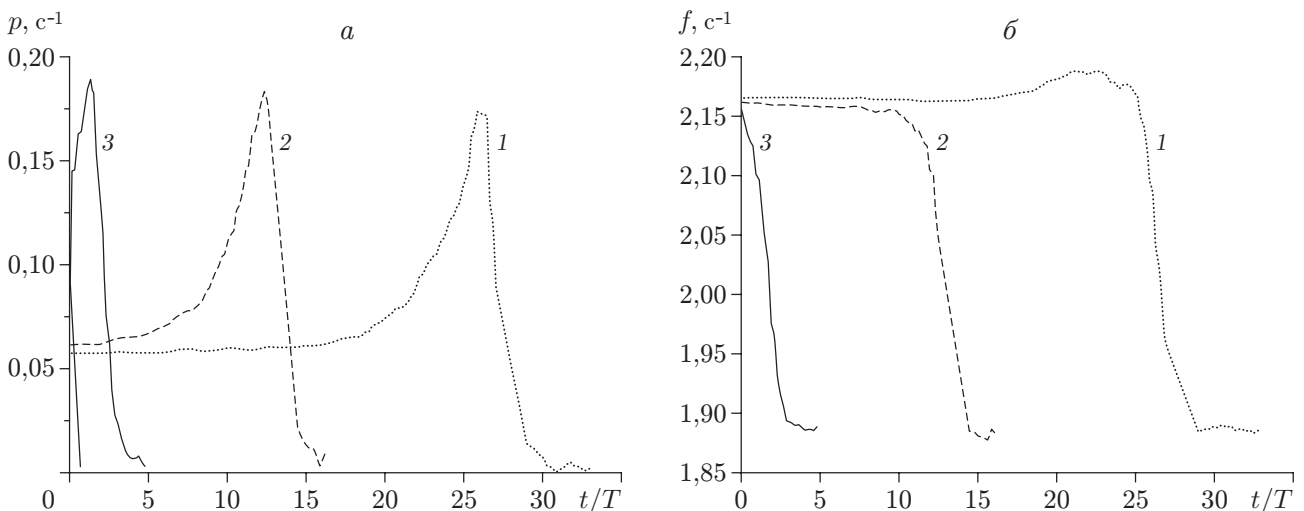


Рис. 2. Зависимости коэффициента затухания (а) и частоты (б) колебаний вискозиметра от номера колебания при различных значениях порога текучести жидкости ( $T = 2,9$  с,  $R_{ц} = 0,01$  м,  $I_{ц}/I_{ж} = 3$ ):

1 —  $\tau_0 = 10^{-5}$  Па; 2 —  $\tau_0 = 10^{-4}$  Па; 3 —  $\tau_0 = 10^{-3}$  Па

Как показали расчеты, при прочих равных условиях смена режимов крутильных колебаний (стационарный режим — увеличение затухания — уменьшение затухания) будет происходить тем быстрее, чем выше предел текучести вязкопластической среды. На рис. 2 приведены зависимости коэффициента затухания и частоты колебаний от номера колебания для жидкостей с различными пределами текучести. При  $\tau_0 = 10^{-5}$  Па максимум зависимости  $p(t)$  и соответствующий скачок частоты  $f(t)$  наблюдаются на 27-м колебании, в то время как при  $\tau_0 = 10^{-4}$  Па — на 13-м. Для жидкости с пределом текучести  $\tau_0 = 10^{-3}$  Па стационарный участок зависимостей  $p(t)$  и  $f(t)$  отсутствует, т. е. размеры застойной зоны таковы, что ее влияние на параметры колебаний будет значительным с начала процесса.

Таким образом, рассмотренные особенности временных зависимостей параметров колебаний можно использовать для идентификации жидкости как вязкопластической, а также для сравнительного анализа предела текучести различных вязкопластических сред.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Швидковский Е. Г.** Некоторые вопросы вязкости расплавленных металлов. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
2. **Kleiman R. N.** Analysis of the oscillating-cup viscometer for the measurement of viscoelastic properties // Phys. Rev. A: Gen. Phys. 1987. V. 35, N 1. P. 261–275.
3. **Апакашев Р. А., Павлов В. В.** Определение предела прочности и модуля сдвига воды при малых скоростях течения // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 1. С. 3–7.
4. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
5. **Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.** Нестационарные движения вязкопластичных сред. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970.
6. **Самарский А. А., Попов Ю. П.** Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.
7. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975.

*Поступила в редакцию 23/IX 2005 г.,  
в окончательном варианте — 20/XII 2005 г.*

---