О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОГО ОТНОШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ

Р. Д. Бачелис, В. Г. Меламед

(Москва)

Рассматривается стационарное решение задачи об одномерном процессе горения газовой смеси при общих предположениях относительно коэффициентов теплопроводности и диффузии и скорости реакции.

Несмотря на существовавшее мнение о единственности стационарного решения, подкрепленное доказательством единственности в некоторых частных случаях, вопрос о единственности в общем случае остается открытым. В настоящей работе путем построения противоречащего примера доказывается, что при выполнении общепринятых ограничений единственность может не иметь места. В результате проведенного исследования доказана возможность подбора скоростей реакции и коэффициентов теплопроводности и диффузии как функций температуры таких, что система уравнений теории горения имеет, по крайней мере, два решения, удовлетворяющих всем поставленным условиям.

§ 1. Стационарное решение задачи о горении газовой смеси в одномерном случае [1] описывается системой

$$\lambda \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}\left[\alpha_1(u)\frac{du}{dy}\right] + F(u)\,c, \quad \lambda \frac{dc}{dy} = \frac{d}{dy}\left[\alpha_2(u)\frac{dc}{dy}\right] - F(u)\,c \tag{1.1}$$

при условиях

$$u(-\infty) < u(y) < u(\infty) = 0, \qquad u(-\infty) = u_-$$
$$c(-\infty) > c(y) > c(\infty) = 0, \qquad c(-\infty) = c_0 > 0$$

Число $u_- < 0$ задано заранее. Здесь u — температура смеси, c — концентрация активного вещества, $F(u)\,c$ — скорость реакции, $F(u) \equiv 0$ при $u \in [u_-, u_0]$, $F(u) > 0$ при $u > u_0$, $\alpha_1(u) > 0$ — коэффициент теплопроводности, $\alpha_2(u) > 0$ — коэффициент диффузии, $\lambda = \text{const} > 0$.

Система (1.1) имеет первый интеграл, из которого следует

$$c_0 = -u_-$$

Легко доказать, что $u'(y) > 0$, поэтому систему (1.1) можно, принимая u за независимое переменное, представить в виде

$$v' = \lambda - \frac{f(u)c}{v}, \qquad c' = \beta\left[\frac{\lambda}{v}(c+u) - 1\right] \tag{1.2}$$

при условиях

$$v(u_-) = 0, \qquad v(0) = c(0) = 0 \tag{1.3}$$

Здесь

$$v(u) = \alpha_1 u' > 0, \qquad \alpha_1 F(u) = f(u), \qquad \alpha_1 / \alpha_2 = \beta(u) > 0$$

Вопросу о существовании и единственности системы (1.2), (1.3) посвящено значительное количество работ. Вопрос о единственности решения в общем случае до последнего времени оставался открытым. Лишь недавно авторами была доказана возможность подбора функций $f(u)$ и $\beta(u)$ таких, что система (1.2) имеет неединственное решение [2]. В [3] было доказано, что в случае $\beta \equiv \text{const}$ решение (1.2) существует при всех $\beta > 0$ и при любых $\beta > 1$ единственно. Представляется очевидным, что методами, использованными в работе [3], можно доказать единственность и для переменных $\beta(u)$ при условии $\beta(u) \geqslant 1$ для всех рассматриваемых u. Вопрос об единственности решения при $\beta \equiv \text{const} < 1$, таким образом, оставался открытым.

В настоящей работе показано, что при всех $\beta = \text{const} \in (0.1)$ можно подобрать $f(u)$, удовлетворяющую вышеуказанным условиям, так что система (1.2) имеет не менее двух решений. Показано также, что $f(u)$ может быть сделана непрерывно дифференцируемой любое заранее заданное число раз [1].

По-видимому, аналогичный подбор $f(u)$ возможен и для любой переменной $\beta(u)$, принимающей при некоторых u значения, меньшие единицы. Таким образом, при $\beta(u) \equiv \text{const} < 1$ или переменных $\beta(u)$, которые при некоторых u не удовлетворяют неравенству $\beta(u) \geqslant 1$, единственность определяется функцией $f(u)$ и требует в каждом конкретном случае специального исследования. Вопрос о физической реализуемости функции $f(u)$ в настоящей работе не рассматривается.

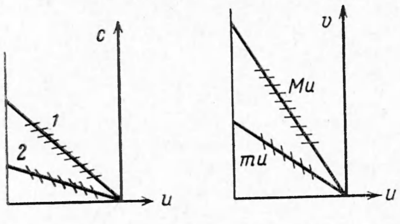
Лемма 1.1. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = \varphi(x, y, \ldots) \tag{1.4}$$

[1] Построение примера неединственности может быть значительно упрощено, если $f(u)$ — кусочно-постоянно.

Под многоточием понимаются остальные функции, входящие в систему, если данное уравнение не является самостоятельным. Пусть дана некоторая линия $Y = Y(x)$.

Введем понятия: собственным наклоном $Y^{(0)\prime}$ будем называть обычную производную $Y'(x)$, наклоном интегральных линий $Y^{1\prime}$ будем называть $\varphi(x, Y, \ldots)$. Очевидно, что если на некотором интервале (a, b) нет особых точек и имеет место $Y^{(0)\prime} > Y^{1\prime}$, то при движении справа налево никакая интегральная кривая (1.4) не может пересечь сверху вниз линию $Y = Y(x)$. Аналогичные факты легко устанавливаются при движении по интегральной линии слева направо и при неравенстве противоположного знака.



Фиг. 1

Рассмотрим теперь при $u < 0$ систему (1.2) и линию $c = -u$. Тогда при $\beta \in (0,1)$ имеем $c^{\circ\prime} = -1$, $c^{1\prime} = -\beta > c^{(0)\prime}$.

Как будет показано ниже, $c'(0) > -1$. Так как $c(0) = 0$, то существует левая полуокрестность точки $u=0$, в которой $c(u) < -u$. Следовательно, при движении справа налево из любой точки этой полуокрестности указанное неравенство сохранится до тех пор, пока $v(u) > 0$. Отсюда, согласно (1.2), имеем

$$c'(u) < 0, \qquad u < 0 \tag{1.5}$$

Отсюда, имеем $c(u) > 0$ при $u < 0$. Учитывая полученное неравенство, легко показать, что при $u < u_0$ имеем $v(u) > 0$ при всех тех u, при которых $f(u) > 0$.

§ 2. Рассмотрим теперь построение примера неединственности для случая функции $f(u)$, непрерывно дифференцируемой любое заранее заданное число раз, $f(u) \equiv 0$ при $u \in [u_-, u_0]$, $f(u) > 0$ при $u > u_0$. Пусть заранее задано любое $\beta \in (0, 1)$. Тогда имеет место

Лемма 2.1. Пусть m, M — числа, удовлетворяющие неравенству $M < m < 0$ и

$$f^{(0)} = (\lambda - m)mQ, \qquad f^1 = (\lambda - M)Mq \tag{2.1}$$

$$Q = (M - \lambda\beta) / (\lambda - M)\beta, \qquad q = (m - \lambda\beta) / (\lambda - m)\beta$$

Тогда

(1)
$$0 < f^{(0)} < f^1 \tag{2.2}$$

(2) Если на $[-1,0]$ выполнено [1]

$$f^{(0)} < f(u) < f^1 \tag{2.3}$$

о на $[-1, 0)$ имеем

$$Mu < v(u) < mu, \quad q^{-1}u < c(u) < Q^{-1}u \tag{2.4}$$

Доказательство (1). Из (2.1) следует

$$0 < (\lambda - m) / (\lambda - M) < 1, \ 0 < m(M - \lambda\beta) < M(m - \lambda\beta)$$

откуда вытекает (2.2).

(2). Точка $u = 0$ — особая для системы (1.2) в силу (1.3.2). Применяя правило Лопиталя, получаем систему уравнений для определения $v'(0)$ и $c'(0)$. Последняя сводится к кубическому уравнению относительно $v'(0)$. Два его корня — положительные — не подходят по физическому смыслу задачи [3]. Тогда остается

$$v'(0) = {}^1/_2\,[\lambda\beta - \sqrt{\lambda^2\beta^2 + 4f(0)\beta} < 0, \qquad c'(0) = \beta[\lambda - v'(0)]\,[v'(0) - \lambda\beta]^{-1}$$

Пользуясь (2.1) и верхней оценкой (2.3), имеем

$$v'(0) > \lambda\beta - \sqrt{\lambda^2\beta^2 + 4(\lambda - M)Mq}$$

Пользуясь (2.1) и нижней оценкой (2.3), имеем $v'(0) < m$. Легко также проверить выполнение условия

$$Q^{-1} < c'(0) < q^{-1}$$

Из полученных неравенств для $c'(0)$ и $v'(0)$ следует, что существует левая полуокрестность точки $u = 0$, $-\Delta < u < 0$, в которой выполняется (2.4). Докажем выполнение п. (2) настоящей леммы. Если $\Delta \geqslant 1$, то п. (2) уже доказан. Пусть $\Delta < 1$.

Рассмотрим область (фиг. 1)

$$D\{-1 \leqslant u \leqslant \Delta, \ Mu \leqslant v \leqslant mu, \ q^{-1}u \leqslant c \leqslant Q^{-1}u\}$$

Легко проверить, что если выполнено (2.2), то для точки $(u, v, c) \in D$ имеем

$$v'(u) < m \text{ при } v = mu, \ v'(u) > M \text{ при } v = Mu,$$

$$c'(u) > Q^{-1} \text{ при } c = Q^{-1}u, \ c'(u) < q^{-1} \text{ при } c = q^{-1}u$$

[1] В качестве левой границы интервала $[-1, 0]$ можно взять любое отрицательное число.

Заметим, что c заключено в некотором интервале, поэтому изображенные на фиг. 1 наклоны $v'(u)$ и $c'(u)$ интегральных линий при $v = mu$, $v = Mu$, $c = q^{-1}u$, $c = Q^{-1}u$, соответствующие указанным неравенствам, не следует понимать как однозначно определенные. Отсюда, на основании леммы 1.1, следует выполнение (2.4) на $[-1,0]$. Тем самым лемма 2.1 доказана.

Пусть λ_1, λ_2 и m_1 — любые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\lambda_2 > \lambda_1 > 0, \qquad m_1 < 0$$

Пусть m_2 — отрицательный корень уравнения

$$m_1 (m_1 - \lambda_1 \beta) = m_2 (m_2 - \lambda_2 \beta) \tag{2.5}$$

Его существование и единственность очевидны. Преобразуя (2.5), получим

$$m_1 - m_2 = -m_1 \beta (\lambda_2 - \lambda_1) / (m_1 + m_2 - \lambda_2 \beta)$$

Отсюда следует $m_2 > m_1$.

Выберем любое $M_2 \in (m_1, m_2)$. Наконец, пусть M_1 — отрицательный корень уравнения

$$M_1 (M_1 - \lambda_1 \beta) = M_2 (M_2 - \lambda_2 \beta) \tag{2.6}$$

Поскольку $M_2 < m_2 < 0$, то

$$M_2 (M_2 - \lambda_2 \beta) > m_2 (m_2 - \lambda_2 \beta)$$

Отсюда, в свою очередь,

$$M_1 (M_1 - \lambda_1 \beta) > m_1 (m_1 - \lambda_1 \beta), \text{ или } M_1 < m_1$$

Таким образом, имеем

$$M_1 < m_1 < M_2 < m_2 < 0 \tag{2.7}$$

Рассмотрим интервалы $f_i^{(0)}$, f_i^1 $(i = 1,2)$, где

$$f_i^{(0)} = (\lambda_i - m_i) m_i Q_i, \quad f_i^1 = (\lambda_i - M_i) M_i q_i$$

Непустота каждого из них следует из I части леммы 2.1. Докажем, что их пересечение не пусто. Для этого рассмотрим

$$f_i^{(0)} / f_i^1 = m_i M_i.$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что $f_1^{(0)} f_1^1 = f_2^{(0)} f_2^1 = d^2 > 0$. Отсюда

$$d \in (f_1^{(0)}, f_1^1), \; d \in (f_2^{(0)}, f_2^1)$$

Следовательно, пересечение $(f_1^{(0)}, f_1^1)$ и $(f_2^{(0)}, f_2^1)$ не пусто.

Обозначим пересечение указанных интервалов через $(f^{(0)*}, f^{1*})$. Пусть $f(u)$ — любая функция такая, что при $u \in [-1, 0]$ имеет место

$$f(u) \in (f^{(0)*}, f^{1*}) \tag{2.8}$$

Применяя лемму 2.1 при $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, 2)$, получим неравенства для $v_i(u)$ и $c_i(u)$ на $(-1,0)$. Приводим те из них, которые будут использованы в дальнейшем

$$v_2(-1) < -M_2, \; -M_1 > v_1(-1) > -m_1$$
$$c_2(-1) > -q_2^{-1} > 0, \; c_1(-1) < -Q_1^{-1} \tag{2.9}$$

§ 3. В настоящем параграфе рассматривается решение системы (1.2), (1.3.2) при $\lambda = \lambda_2$ на $(u_2, -1)$, где $u_2 = -1 + M_2/\lambda_2$, в предположении, что (2.8) выполнено. Из (1.5) следует

$$c_2(u) < 1 - M_2/\lambda_2 \tag{3.1}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и $n > 1$. Роль n будет указана в конце параграфа. Построим

$$v_2^* = \varepsilon + \lambda_2 \left(u + 1 - \frac{M_2}{\lambda_2}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2M_2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{u + 1 - M_2/\lambda_2}{-M_2/\lambda_2}\right)^n$$

Можно проверить, что функция $v_2^*(u)$ обладает следующими свойствами:

$$v_2^*(u) > 0, \; v_2^{*\prime}(u) < \lambda_2, \; v_2^*(u) \leqslant \lambda_2 (u - u_2) + \varepsilon, \; v_2^*(-1) = -M_2 \tag{3.2}$$

Пусть при $u \in [u_2, -1)$

$$f(u) \in (0, \varphi(u)), \; \varphi(u) = (\lambda_2 - v_2^*) v_2^* / (1 - M_2/\lambda)_2 \tag{3.3}$$

Из приведенных свойств $v_2^*(u)$ следует, что интервал для $f(u)$ не пуст ни при каком $u \in [u_2, -1)$. Докажем, что при $u \in [u_2, -1)$ имеет место

$$v_2(u) < v_2^*(u) \tag{3.4}$$

Действительно, согласно (2.9) и (3.2),

$$v_2(-1) < -M_2 = v_2^*(-1)$$

Далее, рассмотрим $v_2^*(u)$ в поле интегральных линий (1.2). Имеем

$$v_2^{*1\prime} = \lambda_2 - f(u)\, c_2 / v_2^* > v_2^{*\prime} = v_2^{*0\prime}$$

согласно (3.2) и (3.3). Применяя лемму 1.1, получаем (3.4). Используя (3.2), получим

$$v_2(u) < \varepsilon + \lambda_2 (u - u_2) \tag{3.5}$$

Рассмотрим второе из уравнений (1.2) при $\lambda = \lambda_2$, учитывая (3.5),

$$c_2'(u) \leqslant \beta \left\{\frac{\lambda_2 [c_2(u) + u]}{\varepsilon + \lambda_2(u - u_2)} - 1\right\}$$

Преобразуя его к виду

$$[\ln(c_2 + u_2 - \varepsilon / \lambda_2)]' \geqslant [\ln(u + \varepsilon / \lambda_2 - u_2)^\beta]'$$

и интегрируя от u_2 до -1, получим

$$c_2(u_2) > \frac{\varepsilon - \lambda_2 u_2}{\lambda_2} \left\{1 - \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \lambda_2(1 + u_2)}\right]^\beta\right\}$$

При этом использовано, что $c(-1) > 0$. Учитывая (1.5), получим при всех $u \leqslant u_2$, для которых далее будет строиться решение

$$c_2(u) \geqslant \frac{1}{\lambda_2}\left\{\varepsilon + \lambda_2 - M_2 + (\lambda_2 u_2 - \varepsilon)\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \lambda_2(1 + u_2)}\right]^\beta = C_2^{(0)} > 0\right.$$

независимо от еще непроизведенного задания $f(u)$.

Замечание. При $u = -1$ из (3.3) следует

$$f(-1) < \frac{\lambda_2^2 \varepsilon (n + 1)}{2(\lambda_2 - M_2)}$$

Очевидно, что можно выбрать $n > 1$ так, чтобы, кроме того, выполнялось

$$\frac{\lambda_2^2 \varepsilon (n + 1)}{2(\lambda_2 - M_2)} > f^{(0)*}$$

Последнее позволяет произвести «склеивание» (2.8) и (3.3) в точке $u = -1$.

§ 4. Рассмотрим теперь решение системы (1.2), (1.3.2) при $\lambda = \lambda_1$ на $[u_0, -1)$, где $u_0 = -1 + m_1 / \lambda_2$.

В силу (2.7) имеем $u_0 < u_2$. Назависимо от еще не произведенного задания $f(u)$ на (u_0, u_2), а только в силу ее неотрицательности, имеет место $v_1^1 \leqslant \lambda_1$

Согласно (2.9), получим при $u \leqslant -1$

$$v_1(u) > \lambda_1(u + 1) - m_1 \tag{4.1}$$

а также, в свою очередь,

$$c_2(u_0) < 1 - \frac{m_1}{\lambda_1} + \left[\frac{m_1}{\lambda_1} - 1 - Q_1^{-1}\right]\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^\beta <$$

$$< \left(1 - \frac{m_1}{\lambda_1}\right)\left[1 + \frac{m_1}{\lambda_1\beta - m_1}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^\beta\right] = C_1^{(0)} > 0$$

В силу (1.5) получаем $0 < c_1(u) < C_1^{(0)}$ при всех $u \in (u_0, 0)$.

Докажем, что можно подобрать числа $\lambda_1, \lambda_2, m_1, M_2, \varepsilon$, не нарушая ранее поставленных требований, так, чтобы выполнялось

$$\lambda_2^{\,2} C_1^{(0)} < \lambda_1^2 C_2^{(0)} \tag{4.2}$$

Выберем произвольное m_1 и $\lambda_1 > 0$. Рассмотрим вспомогательное выражение

$$\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1 + 0} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^\beta [\lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_1^2\lambda_2 - m_1(\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2)](\lambda_1\beta - m_1)}{-m_1(\lambda_1 - m_1)\lambda_2^{3-\beta}} = 0$$

Следовательно, существует $\lambda_2 > \lambda_1$ такое, что

$$1 > \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^\beta [\lambda_2^2\lambda_1 + \lambda_1^2\lambda_2 - m_1(\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2)](\lambda_1\beta - m_1)}{-m_1(\lambda_1 - m_1)\lambda_2^{3-\beta}}$$

или, после преобразований

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} > \frac{(1 - m_1/\lambda_1)[1 + m_1(1 - \lambda_1/\lambda_2)^\beta(\lambda_1\beta - m_1)^{-1}}{1 - m_1/\lambda_2}$$

Далее рассмотрим

$$\lim_{(\varepsilon \to 0 + 0),\ M_2 \to m_1 + 0} \frac{[1 + m_1(1 - \lambda_2/\lambda_1)^\beta(\lambda_1\beta - m_1)^{-1}](1 - m_1/\lambda_1)\lambda_2}{\varepsilon + \lambda_2 - M_2 + (\lambda_2 u_2 - \varepsilon)\varepsilon^\beta[\varepsilon - \lambda_2(1 + u_2)]^{-\beta}} =$$

$$= \left(1 - \frac{m_1}{\lambda_1}\right)\left[1 + m_1\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)(\lambda_1\beta - m_1)^{-1}\right]\left(1 - \frac{m_1}{\lambda_2}\right) < \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2$$

Следовательно, существует $\varepsilon > 0$ и $M_2 \in (m_1, m_2)$ такое, что при выбранных ранее $m_1, \lambda_1, \lambda_2$ имеет место (4.12).

§ 5. Найдем верхнюю оценку для $v_1(u_2)$. Согласно (4.1),

$$v_1(u) > \lambda_1 M_2/\lambda_2 - m_1$$

Отсюда, согласно (1.2)

$$v_1' > \lambda_1 - \frac{\lambda_2 \sup\{\varphi(u), C_1^{(0)}\}}{\lambda_1 M_2 - m_1\lambda_2} = h, \qquad u \in [u_2, -1)$$

и из (2.9)

$$v_1(u_2) < H \ (H = hM_2\lambda_2^{-1} - M_1) \tag{5.1}$$

§ 6. Таким образом, в результате проведенного построения получено, что на $[u_0, u_2)$ имеет место

$$0 < c_1(u) < c_1^{(0)}, \ c_2(u) > C_2^{(0)} > 0, C_2^{(0)}\lambda_1^2 > C_1^{(0)}\lambda_2^2$$

причем на выбор $f(u)$ при $u \in [u_0, u_2)$ никаких ограничений, кроме неотрицательности, не наложено.

В настоящем параграфе докажем, что при некоторых дополнительных ограничениях, накладываемых на $f(u)$ при $u \in [u_0, u_2)$, будет иметь место

$$v_2(u_0)/\ v_1(u_0) > \lambda_2 / \lambda_1 \tag{6.1}$$

Оценим снизу $v_2(u)$. Пусть заданы

$$\delta \in (0, {}^1/_2 (u_2 - u_0)\ , \quad k_2 > 0$$

и при $u \in [u_0 + \delta, u_2 - \delta]$

$$f(u) > \lambda_2 \sqrt{2k_2(u_0 - u_2 - 2\delta)}\, C_2^{(0)^{-2}} + k_2 = l \tag{6.2}$$

Рассмотрим при тех же u

$$V_2(u) = \sqrt{-2k_2C_2^{(0)}(u - u_2 + \delta)}$$

в поле интегральных линий (1.2) при $\lambda = \lambda_2$. При этом

$$V_2^{(0)'} = -k_2C_2^{(0)}V_2^{-1}, \ V_2^{1'} = \lambda_2 - f(u)C_2(u)V_2^{-1}$$

Тогда

$$V_2^{0'} - V_2^{1'} = -\lambda_2 + V_2^{-1}(u)\,[f(u)\,C_2(u) - k_2C_2^{(0)}] >$$
$$> -\lambda_2\,[-1 + \sqrt{-2k_2C_2^{(0)}(u - u_2 + \delta)}]\,V_2^{-1}(u) = 0$$

Поскольку $V_2(u_2 - \delta) = 0$, а $v_2(u_2 - \delta) > 0$, согласно лемме 1.1 при $u \in [u_0 + \delta, u_2 - \delta]$ получим

$$v_2(u) > V_2(u)$$

В частности,

$$v_2(u_0 + \delta) > \sqrt{-2k_2C_2^{(0)}(u_0 - u_2 + 2\delta)} \quad \text{при } u = u_0 + \delta$$

Далее, при $u \in [u_0, u_0 + \delta)$, в силу неотрицательности $f(u)$, имеем

$$v_2'(u) \leqslant \lambda_2$$

Отсюда

$$v_2(u_0) > \sqrt{-2k_2C_2^{(0)}(u_0 - u_2 + 2\delta)} - \lambda_2\delta \tag{6.3}$$

Пусть задано некоторое $k_1 > 0$ и при $u \in [u_0, u_2)$

$$f(u) < k_1 \tag{6.4}$$

Об оценке снизу, которую необходимо наложить на k_1, чтобы последнее неравенство не противоречило (6.2), будет сказано ниже.

Оценим сверху $v_1(u)$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$V_1(u) = \sqrt{H^2 - 2k_1C_2^{(0)}(u - u_2)}$$

в поле интегральных линий (1.2) при $\lambda = \lambda_1$. Имеем

$$V_1^{0'} = -k_1C_1^0V_1^{-1} < \lambda_1 - f(u)C_1(u)V_1^{-1} = V_1^{1'}$$

Согласно (5.1),

$$v_1(u_2) < H = V_1(u_2)$$

Отсюда, согласно лемме 1.1 имеем $v_1(u) < V_1(u)$ при $u \in [u_0, u_2]$. В частности,

$$v_1(u_0) < V_1(u_0) = \sqrt{H^2 - 2k_1C_1^{(0)}(u_0 - u_2)} \tag{6.5}$$

Докажем существование таких k_1 и k_2, чтобы имело место

$$k_1 > k_2 + \lambda_2 \sqrt{-2k_2(u_0 - u_2 - 2\delta)} \,/\, \sqrt{C_2^{(0)}}$$

$$\frac{\sqrt{-2k_2C_2^{(0)}(u_0 - u_2 + 2\delta)} - \lambda_2\delta}{\sqrt{H^2 - 2k_1C_1^{(0)}(u_0 - u_2)}} > \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{6.6}$$

Первое неравенство обеспечит существование $f(u)$, удовлетворяющей как (6.1), так и (6.3). Выберем δ достаточно малое и θ_1 так, чтобы выполнялись условия

$$\theta = C_2^{(0)}\lambda_1^2(u_2 - u_0 + 2\delta)\,[C_1^{(0)}\lambda_1^2(u_2 - u_0)]^{-1} > 1, \quad \theta_1 \in (1, \theta)$$

Положим $k_1 = \theta k_2$ и докажем, что при достаточно большом k_2 будет выполняться (6.6). Рассмотрим

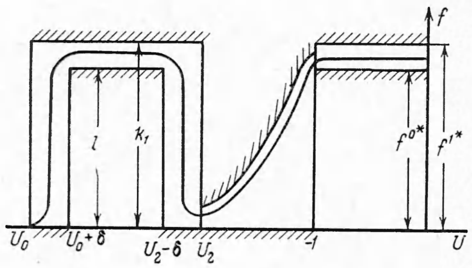
$$\lim_{k_2\to\infty} \frac{\sqrt{-2k_2C_2^{(0)}(u_0 - u_2 + 2\delta)} - \lambda_2\delta}{\sqrt{H^2 - 2\theta_1k_2C_1^{(0)}(u_0 - u_2)}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{\theta}{\theta_1}\right)^{1/2} > \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$\lim_{k_2\to\infty} \frac{k_2 + \lambda_2\sqrt{-2k_2(u_0 - u_2 + 2\delta)}\,(C_2^{(0)})^{-1/2}}{\theta_1k_2} = \frac{1}{\theta_1} < 1$$

Таким образом, при достаточно большом k_2 неравенство (6.6) выполняется. Отсюда из (6.3), (6.5) и (6.6) следует (6.1).

§ 7. Приведем на фиг. 2 все неравенства, которым удовлетворяет $f(u)$. Очевидно, что можно построить функцию $f(u)$, удовлетворяющую всем указанным неравенствам, непрерывно дифференцируемую любое заданное число раз и обращающуюся при $u = u_0$ в нуль с касанием любого заранее заданного порядка. Как было доказано, решения $v_1(u)$, $c_1(u)$ и $v_2(u)$, $C_2(u)$ системы (1.2), (1.3.2), соответствующие λ_1 и λ_2, удовлетворяют неравенству

$$0 < v_1(u_0) \,/\, \lambda_1 < v_2(u_0) \,/\, \lambda_2$$



Фиг. 2

Выберем произвольное

$$q \in (v_1(u_0) \,/\, \lambda_1,\ v_2(u_0) \,/\, \lambda_2)$$

Положим $u_- = u_0 - q$. Тогда

$$\lambda_1(u_0 - u_-) > v_1(u_0),$$
$$\lambda_2(u_0 - u_-) < v_2(u_0)$$

§ 8. Способом, аналогичным использованному в [3] при доказательстве существования решения, легко установить существование $\lambda_0 \in (0, \lambda_1)$ и $\lambda_3 \in (\lambda_2, \infty)$ таких, что

$$\lambda_0(u_0 - u_-) = v_0(u_0)$$
$$\lambda_3(u_0 - u_-) = v_3(u_0) \tag{8.1}$$

Здесь $v_0(u)$ и $v_3(u)$ — решения системы (1.2), (1.3.2) соответственно при λ_0 и λ_3.

При $u \in [u_-, u_0]$ имеем $f(u) \equiv 0$, поэтому $v_i' = \lambda_i$, и, следовательно, из (8.1) следует выполнение (1.3.2) при $i = 0$ и $i = 3$. Таким образом, существование, по крайней мере, двух решений системы (1.2), (1.3) доказано. Заметим, что при построении примера неединственности для кусочно-постоянной функции $f(u)$ удобнее варьировать не величины λ_1 и λ_2, а точку u_0.

Поступила 26 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. Теория распространения пламени. Ж. физ. химии, 1948, т. 22, № 1.
2. Бачелис Р. Д., Меламед В. Г. О неединственности стационарных решений для системы уравнений теории горения при кусочно-постоянных коэффициентах теплопроводности и диффузии. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, № 6.
3. Канель И. Я. О стационарных решениях для системы уравнений теории горения. Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2.