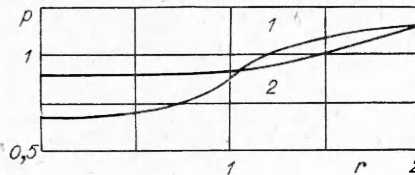


Функцию Φ_1 можно привести к виду

$$\Phi_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[r_1(\psi_2) - r_1(\psi_1) + r \cos \theta \ln \frac{\psi_2 - r \cos \theta + r_1(\psi_2)}{\psi_1 - r \cos \theta + r_1(\psi_1)} \right] d\theta,$$

который дает решение задачи о проникании в сжимаемую жидкость тупого конуса [1].

На рисунке представлены графики распределения давления p по смоченной поверхности тела в двух автомоделных задачах при $M = 2$: кривая 1 — проникание конуса ($d = 1$), 2 — параболоида ($d = 2$).



Автор благодарит А. Г. Хованского за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомомян А. Я., Поручиков В. Б. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. — М.: Изд-во МГУ, 1970.
2. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. — Л.: Судостроение, 1976.
3. Кубенко В. Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. — Киев: Наук. думка, 1981.
4. Шамгунов Ш. Д. Удар произвольным тупым телом вращения по границе полупространства, занятого сжимаемой жидкостью // Материалы Всесоюз. симпоз. по распространению упругопластических волн в сплошной среде. — Баку: Изд-во АН АзССР, 1966.
5. Skalak R., Feit D. Impact on the surface of a compressible fluid // Trans. ASME. — 1966. — V. B88, N 3. Рус. пер. Удар о поверхность сжимаемой жидкости // Конструирование и технология машиностроения. — М.: Мир, 1966. — Т. 88, № 3.
6. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
7. Бородич Ф. М. О задаче контакта двух предварительно искаженных полупространств // ПМТФ. — 1984. — № 2.

Поступила 16/III 1987 г.

УДК 532.517.4

О РАСЧЕТЕ ПУЛЬСАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ

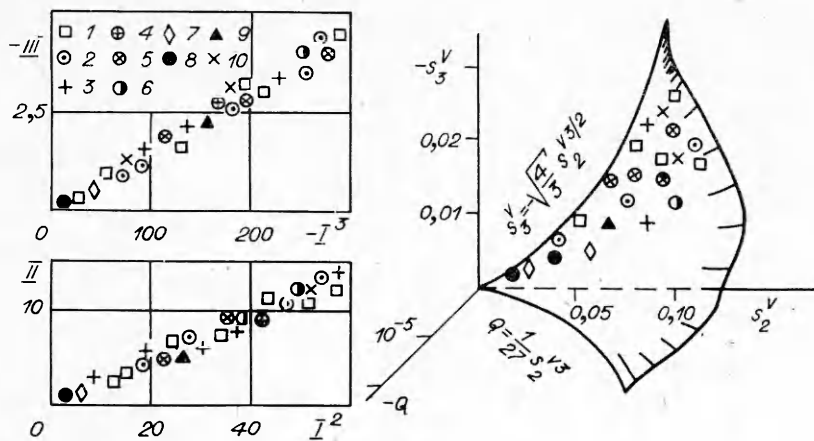
В. А. Павловский
(Ленинград)

При описании поведения сплошной среды используются инварианты тензоров, характеризующих состояние среды [1—4]. Идеи, лежащие в основе определения связей между инвариантами в механике твердого деформируемого тела [2, 4], можно применить и в механике жидкости.

Инварианты тензора напряжений Рейнольдса. Тензор напряжений Рейнольдса \mathbf{R} можно записать в бескомпонентной (бескоординатной) форме [1]

$$\mathbf{R} = -\rho \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}$$

Здесь \mathbf{v}' — вектор пульсационной скорости; ρ — плотность жидкости; \otimes — знак тензорного умножения; черта — осреднение по Рейнольдсу. Этот тензор, как и любой другой тензор второго ранга, может быть представлен в произвольном базисе \mathbf{e}_i как $\mathbf{R} = R^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Его физические компоненты R_{ij} образуют матрицу, элементы которой хорошо поддаются измерениям в потоке с помощью термоанемометра. В базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ с со-



Р и с. 1

ответствующими компонентами (u, v, w) вектора скорости v эта матрица имеет вид

$$(1) \quad \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho u'^2}; & -\overline{\rho u'v'}; & -\overline{\rho u'w'} \\ -\overline{\rho u'v'}; & -\overline{\rho v'^2}; & -\overline{\rho v'w'} \\ -\overline{\rho u'w'}; & -\overline{\rho v'w'}; & -\overline{\rho w'^2} \end{pmatrix}$$

(штрихи относятся к пульсационным величинам). Экспериментальные данные показывают, что симметричный тензор \mathbf{R} имеет большую шаровую часть и сравнительно малую девиаторную.

Для любого тензора 2-го ранга, в том числе и для \mathbf{R} , можно записать характеристическое уравнение

$$(2) \quad \sigma^3 - I\sigma^2 + II\sigma - III = 0,$$

где σ — главные (собственные) значения тензора; I, II, III — его инварианты, определяемые формулами

$$(3) \quad I = \text{tr } \mathbf{R}, \quad II = \frac{1}{2} ((\text{tr } \mathbf{R})^2 - \text{tr } \mathbf{R}^2), \quad III = \det \mathbf{R}$$

(tr и \det — след и детерминант соответственно). Зная матрицу (1), можно по формулам (3) вычислить инварианты I, II, III . В частности, для первого инварианта

$$(4) \quad I = \text{tr } \mathbf{R} = -\rho(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) = -\rho k$$

(k — удвоенная кинетическая энергия пульсаций). Отсюда видно, что первый инвариант, характеризующий среднее нормальное напряжение в рассматриваемой точке, пропорционален кинетической энергии турбулентных пульсаций. Аналогичным образом можно по формулам (3) определить инварианты II и III .

Вещественность корней кубического характеристического уравнения (2) накладывает определенные ограничения на соотношения между его коэффициентами. Используя это обстоятельство и опираясь на имеющийся в настоящее время обширный экспериментальный материал, можно попытаться эмпирическим путем найти связь между инвариантами тензора напряжений Рейнольдса. На рис. 1 приведены результаты обработки большого числа разнородных экспериментальных данных [5—12]. Здесь I — экспериментальные точки, соответствующие плоскому каналу [5], 2 — круглой трубе [6], 3 — пограничному слою на пластине [7], 4 — плоскому течению Куэтта [8], 5 — напорному течению Куэтта (опыт 3 [8]), 6 — напорному течению Куэтта (опыт 13 [8]), 7 — плоской струе [9], 8 — круглой струе [10], 9 — вращающемуся конусу [11], 10 — вращающейся пластине [12]. Видно, что между инвариантами II и I, III и I существует

связь, выражающаяся в зависимости второго и третьего инвариантов от первого, пропорционального кинетической энергии пульсаций. Однако, несмотря на малый интервал инвариантов $0,22 \leq \Pi/I^2 \leq 0,33$; $0,010 \leq \leq \Pi/I^2 \leq 0,025$, сам тензор напряжений и соответствующее ему напряженное состояние в рассматриваемой точке потока при варьировании этих величин изменяются сильно. Это объясняется тем обстоятельством, что на фоне преобладающей шаровой части тензора \mathbf{R} те существенные характеристики напряженного состояния, которые определяются вторым и третьим инвариантами, становятся плохо различимыми. Поэтому вместо инвариантов Π и III следует взять второй и третий инварианты девиатора тензора $\mathbf{R} - (1/3)(\text{tr } \mathbf{R})\mathbf{G}$. В работах Ламли, а также Матье и Жанделя [13] анализируется влияние этих инвариантов на характеристики турбулентных потоков. Однако если построить графики зависимости инвариантов девиатора от первого инварианта, то можно увидеть, что они имеют характер «звездного неба», в результате чего складывается впечатление о невозможности отыскания каких-либо соотношений между инвариантами. Для прояснения вопроса о связи между инвариантами удобно взять второй и третий инварианты девиаторной части в форме, предложенной в [2, 4]. Эти инварианты связаны с коэффициентами приведенного кубического уравнения, соответствующего (2).

Кубическое уравнение (2), имеющее три вещественных корня $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, можно представить следующим образом:

$$(\sigma/I)^3 - (\sigma/I)^2 + (\Pi/I^2)(\sigma/I) - \text{III}/I^3 = 0.$$

Подстановкой $(\sigma/I) = z - 1/3$ оно приводится к неполному виду

$$(5) \quad z^3 + pz + q = 0, \quad p = \Pi/I^2 - 1/3, \quad q = -2/27 + (1/3)\Pi/I^2 - \text{III}/I^3.$$

Поскольку корни кубического уравнения для \mathbf{R} вещественны (мнимых пульсаций быть не может), то $p \leq 0, Q \leq 0$ [14], где

$$(6) \quad Q = (p/3)^3 + (q/2)^2.$$

Второй и третий инварианты девиатора тензора напряжений выражаются через коэффициенты p и q :

$$(7) \quad s_2^V = -p = 1/3 - \Pi/I^2; \quad s_3^V = 3q = -2/9 + \Pi/I^2 - 3\text{III}/I^3,$$

причем $0 \leq s_2^V \leq 1/3, s_3^V < 0$. Физический смысл второго инварианта s_2^V — отношение среднего касательного напряжения к среднему нормальному [4]. Вместо s_3^V в качестве третьего инварианта удобно взять ξ — угол вида, определяемый согласно [4] соотношением

$$(8) \quad \sin 3\xi = s_3^V / \sqrt{(4/3)(s_2^V)^3}; \quad -\pi/6 \leq \xi \leq \pi/6.$$

Угол вида ξ характеризует отношение среднего касательного напряжения в рассматриваемой точке к максимальному касательному.

Связи между инвариантами. Итак, если $\rho k, s_2^V, \xi$ взять в качестве системы инвариантов тензора напряжений Рейнольдса, то главные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) можно записать как [2]

$$(9) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= -\rho k \left(1/3 + 2 \sqrt{s_2^V/3} \sin(\xi + 2\pi/3) \right), \\ \sigma_2 &= -\rho k \left(1/3 + 2 \sqrt{s_2^V/3} \sin \xi \right), \\ \sigma_3 &= -\rho k \left(1/3 + 2 \sqrt{s_2^V/3} \sin(\xi + 4\pi/3) \right). \end{aligned}$$

Для нахождения связи между инвариантами $\rho k, s_2^V, \xi$ полезно обратиться к рассмотрению функции Q , определяемой выражением (6). Учитывая (7), имеем $Q = -(s_2^V/3)^3 + (s_3^V/6)^2$. При $Q = 0$ из последнего выраже-

ния следует, что между инвариантами тензора \mathbf{R} есть связь:

$$(10) \quad s_3^{\vee} = -\sqrt{4/3} (s_2^{\vee})^{3/2}.$$

Подстановка (10) в (8) дает $\sin 3\xi = -1$, откуда $\xi = -\pi/6$. При этом, как видно из (9), если $0 < s_2^{\vee} < 1/3$, главные напряжения $\sigma_2 = \sigma_3$ и тензорный эллипсоид для \mathbf{R} является эллипсоидом вращения. Предельные случаи $s_2^{\vee} = 0$ и $s_2^{\vee} = 1/3$ заслуживают отдельного рассмотрения. Если $s_2^{\vee} = 0$, то все три корня характеристического уравнения одинаковы ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -(1/3)\rho k$), все пульсации одинаковы и турбулентность изотропна (тензорный эллипсоид при этом превращается в сферу). При $s_2^{\vee} = 1/3$ $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ и имеет место случай, когда все пульсации скорости сосредоточиваются в одном направлении, соответствующем σ_1 (тензорный эллипсоид превращается в прямую). Это отвечает максимально мыслимой анизотропии пульсаций. Проведенный выше анализ показывает, что инварианту s_2^{\vee} может быть придан еще один смысл — в турбулентном потоке он характеризует анизотропию пульсаций.

Случаю $Q = 0$ соответствуют нулевые разности нормальных напряжений, т. е. нулевые касательные напряжения для площадок, ориентация которых связана с направлением потока. Если $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$, то $Q \neq 0$ и связь между инвариантами тензора \mathbf{R} становится более сложной, нежели согласно формуле (10) и следующему из нее $\xi = -\pi/6$. Если построить зависимость Q от s_2^{\vee} и s_3^{\vee} по опытным данным для самых разнообразных течений [5—12], то экспериментальные точки ложатся на некоторую поверхность (см. рис. 1), при $Q = 0$ они попадают на кривую, описываемую (10). Уложить все эти экспериментальные точки на одну кривую (спроектировать поверхность на линию в координатах $(\rho k, s_2^{\vee}, \xi)$) можно, только привлекая деформационные характеристики течения, определяемые тензором осредненных скоростей деформаций. Ситуация здесь аналогична механике твердого деформируемого тела, где, как известно [15], инварианты тензора напряжений связываются между собой с помощью инвариантов тензора деформаций.

Анализ распределения точек на поверхности, показанной на рис. 1, приводит к эмпирической формуле

$$(11) \quad Q = - (1/3) ((4/3) \tau / \rho k)^2 (s_2^{\vee})^2,$$

где τ — инвариантная скалярная величина, характеризующая отношение удельной мощности рейнольдсовых напряжений к интенсивности сдвига:

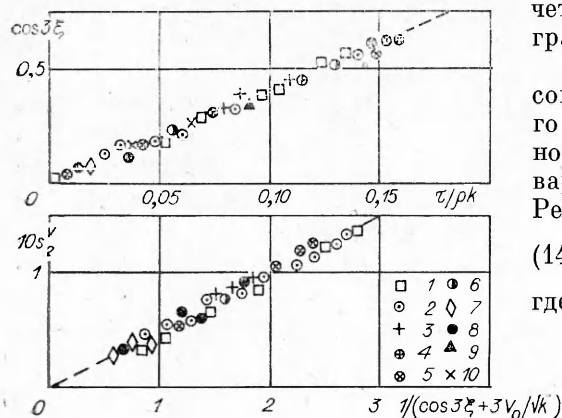
$$(12) \quad \tau = |\mathbf{R} : \mathbf{d}| / \sqrt{2|\mathbf{d} : \mathbf{d}|}$$

(\mathbf{d} — осредненный тензор скоростей деформаций, двоеточие означает двойное скалярное произведение тензоров). Для простого сдвигового течения из (12) следует, что τ — просто модуль касательного напряжения — $\rho \bar{u}'v' = R_{12}$.

Используя соотношения (6) и (8), можно вместо (11) записать [16]

$$(13) \quad \cos 3\xi = 4\tau / \rho k.$$

На рис. 2 (обозначения те же, что и на рис. 1) приведена экспериментальная кривая в координатах $\tau / \rho k - \cos 3\xi$, аппроксимацией которой и является эмпирическая формула (13), которая показывает, что отношение $\tau / \rho k$ может меняться от 0 до 0,25. Интересно заметить, что многочисленные опытные данные (течения в пограничных слоях, струях, следах) свидетельствуют [17] о постоянстве $\tau / \rho k$ в большей части сечения таких потоков. Это послужило основанием для использования в дифференциальных моделях переноса кинетической энергии [18] соотношения $\tau / \rho k = \text{const} = a_1$, называемого в литературе соотношением Невзглядова—Драйдена (причем Бредшоу и Феррис принимают $a_1 = 0,15$). Учет непостоянства отношения $\tau / \rho k$, согласно формуле (13), может существенно уточнить рас-



Р и с. 2

Для простоты сдвиговых течений V_0 определяется производными по поперечной координате: $V_0 = \left| \frac{d\tau}{dy} \right| \left| \rho \frac{du}{dy} \right|$. Эмпирические формулы (13) и (14) можно использовать при расчете установившихся турбулентных потоков несжимаемой жидкости.

Определяющее уравнение для тензора напряжений Рейнольдса. При решении задач установившихся изотермических турбулентных течений несжимаемой жидкости необходимо замкнуть систему уравнений, состоящую из уравнений движения и неразрывности. Для этого нужно записать определяющее (реологическое) соотношение для \mathbf{R} , связав его с осредненным тензором скоростей деформаций \mathbf{d} , причем связь должна учитывать нелинейность, анизотропию на уровне несоосности \mathbf{R} и \mathbf{d} и память турбулентного потока. Как свидетельствует опыт смежной ветви механики сплошных сред (теории пластичности с анизотропным упрочнением [3], которая сталкивается с аналогичными проблемами), определяющее соотношение, учитывающее перечисленные выше сложные эффекты, обязано иметь дифференциальный вид. В то же время в теории турбулентности широко используются дифференциальные модели переноса, которые строятся на основе известных уравнений переноса рейнольдсовых напряжений [19], записанных самим Рейнольдсом. Эти уравнения содержат ряд корреляционных членов, требующих какой-либо аппроксимации.

Существующие в настоящее время дифференциальные модели для переноса тензора \mathbf{R} основаны на изотропной аппроксимации указанных выше членов, каждый такой член аппроксимируется по отдельности, независимо от других. При этом не ставится в явном виде цель правильного (согласующегося с опытом) описания совмещения осей тензоров \mathbf{R} и \mathbf{d} , а также необходимости перехода модели в случае простых сдвиговых течений к хорошо зарекомендовавшей себя формуле Буссинеска $\tau_{12} = \mu_t du/dy$ (μ_t — турбулентная вязкость). В результате предложенные модели турбулентности охватывают далеко не все классы задач, даже из числа тех, которые с достаточной для практики точностью решены гораздо более простыми методами. В попытках расширения возможности уравнений переноса в них вводят все большее число вспомогательных функций и эмпирических констант. В некоторых вариантах теорий число последних доходит до 20 и теория приобретает откровенно интерполяционный характер: число констант практически не превосходит количества задач, для которых теория дает удовлетворительные результаты [19].

Представляется разумным при построении дифференциального определяющего соотношения на феноменологическом уровне требовать от него аппроксимации не отдельных членов, содержащихся в уравнении Рейнольдса для переноса \mathbf{R} , а всего влияния этих членов в комплексе, чтобы правильно (в соответствии с опытными данными) была описана анизотропия — несоосность \mathbf{R} и \mathbf{d} . Кроме того, рационально построенная диффе-

чет пульсаций, особенно вблизи границ турбулентных потоков.

На рис. 2 показано также согласование с опытами еще одного (второго) эмпирического соотношения, связывающего три инварианта тензора напряжений Рейнольдса:

$$(14) \quad 20s_2^V (\cos 3\xi + 3V_0/\sqrt{k}) = 1,$$

где V_0 определяется выражением

$$(15) \quad V_0 = |\nabla\tau|/2\rho|\Pi_d|^{1/2};$$

∇ — оператор набла; Π_d — второй инвариант тензора скоростей деформаций \mathbf{d} .

ренциальная модель переноса для \mathbf{R} должна в предельном случае простых сдвиговых течений приводить к алгебраическим моделям типа Буссинеска, а кривизна течения при этом учитываться автоматически, без введения какого-либо рода поправок. При написании дифференциального определяющего соотношения необходимо, опираясь на опыты, руководствоваться целью наиболее простого экономичного (с точки зрения числа феноменологических констант, а также алгоритма расчета течений) описания нелинейности, анизотропии и памяти турбулентных течений. Простота определяющего соотношения — залог его успешного использования в инженерных приложениях.

Исходя из этих соображений, для установившихся течений несжимаемой жидкости можно предложить [16] определяющее соотношение для \mathbf{R} , записанное в бескомпонентной форме:

$$(16) \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{R} = -A \tau \mathbf{d} - 2\mu_t (\mathbf{d} \cdot \mathbf{w} + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{w})^T) + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{w} + (\mathbf{R} \cdot \mathbf{w})^T),$$

где \mathbf{d} и \mathbf{w} — тензор скоростей деформаций и осредненный тензор вращения ($\mathbf{d} = (1/2)(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)$, $\mathbf{w} = (1/2)(\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T)$); \mathbf{v} — вектор осредненной скорости; τ определена выражением (12); символ t означает транспонирование; μ_t — турбулентная вязкость, которая, как и другая инвариантная скалярная величина A , имеющая смысл безразмерного коэффициента диффузии для \mathbf{R} , определяется на феноменологическом уровне.

В компонентной форме в декартовом прямоугольном базисе уравнение (16) имеет вид

$$(16a) \quad v_k \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} = -A \tau d_{ij} - 2\mu_t (d_{ik} w_{kj} + d_{jk} w_{ki}) + (R_{ik} w_{kj} + R_{jk} w_{ki}),$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right).$$

На основе анализа опытных данных [5—12]

$$(17) \quad A \tau = \frac{7\tau}{\sqrt{1 + 2(\mu_t^V)^{1/8}}} + \frac{1}{2} \rho V_0^2,$$

где τ и V_0 определены выражениями (12) и (15); $\mu_t^V = \mu_t / \mu$ (μ — динамическая вязкость). Входящий в (16) и (17) скаляр μ_t также должен быть записан в инвариантной форме. Его удобно взять в рамках обобщенной теории Кармана, просто и эффективно описывающей разнообразные турбулентные течения с использованием всего лишь двух феноменологических констант [20—22]:

$$(18) \quad \mu_t = \rho \nu \kappa_n T^n.$$

Здесь ν — кинематическая вязкость; n и κ_n — феноменологические константы, причем для «блазиусовского» [21] диапазона чисел Рейнольдса, наиболее интересного для практических приложений, $n = 3/4$, $\kappa_n = 0,53$ (этот диапазон применительно к течению в трубе занимает примерно две декады — $Re \approx 10^4 - 10^6$); T — локальное число Рейнольдса в форме Кармана:

$$(19) \quad T = \frac{|2|\mathbf{d}|^2 - |\mathbf{w}|^2}{\nu (2|\nabla|\omega|)^2}$$

($\omega = (1/2)(\nabla \times \mathbf{v})$ — ротор осредненной скорости). В частности, для течения в плоском канале, круглой трубе и для кругового течения Куэтта (для него $\omega = u/r$) это обобщение T приводит соответственно к выражениям

$$(20) \quad T = \frac{|u'|^3}{\nu |u''|^2}, \quad T = \left| \frac{du}{dr} \right|^3 / \nu \left| \frac{d^2u}{dr^2} \right|^2, \quad T = \frac{|2|r\omega''| - |2\omega + r\omega'|^3}{\nu |3\omega' + r\omega''|^2}$$

(штрихами обозначены производные по поперечной координате).

Модель (16) — принципиально новое определяющее соотношение для тензора напряжений Рейнольдса в форме уравнения переноса, одновременно учитывающее нелинейность, анизотропию и память турбулентных потоков, которое:

1) аппроксимирует члены уравнения Рейнольдса для турбулентных напряжений не изотропно, как в существующих дифференциальных моделях переноса, а анизотропно, с помощью введения в рассмотрение осредненного тензора вращения (антисимметричной части тензора градиентов осредненных скоростей ∇v , обеспечивающего поворот главных осей тензора скоростей деформаций до осей тензора напряжений);

2) для простых сдвиговых течений приводит к алгебраическим определяющим соотношениям и тем самым включает в себя как предельный частный случай алгебраические выражения для турбулентного касательного напряжения, такими выражениями могут быть и модели Прандтля длины пути перемешивания, и модели турбулентной вязкости, и формула В. В. Новожилова согласно обобщенной теории Кармана. Отметим, что если в качестве выражения для μ_t использовать соотношения (18), (19), то модель содержит минимальное количество феноменологических констант, являющихся универсальными для «блазиусовского» диапазона чисел Рейнольдса;

3) автоматически учитывает кривизну потока, что делает ненужным введение эмпирических поправок на кривизну, характерных для существующих теорий турбулентности. В последнем легко убедиться, например, решая задачу о турбулентном течении Куэтта между двумя вращающимися цилиндрами и сравнивая решение с известными опытными данными Тейлора и Вендта [16].

Расчет пульсационных характеристик турбулентных течений. Схему расчета нормальных рейнольдсовых напряжений (а следовательно, и пульсационных характеристик потока) для установившихся простых сдвиговых течений и близких к ним проще всего рассмотреть на примере потока в плоском канале. Если расписать уравнение (16) в компонентной форме применительно к установившемуся течению в плоском канале, где имеется лишь продольная компонента скорости $u(y)$, зависящая от поперечной координаты, то получим

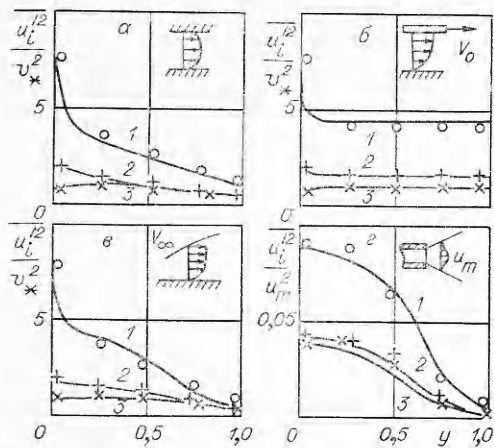
$$0 = A\tau \frac{du}{dy} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\mu_t \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \\ - \frac{du}{dy} \begin{pmatrix} 2R_{12}; & R_{22} - R_{11}; & 0 \\ R_{22} - R_{11}; & -2R_{12}; & 0 \\ 0; & 0; & 0 \end{pmatrix}$$

(A , τ и μ_t определены соотношениями (12), (17)–(19). В результате имеет место система двух алгебраических реологических соотношений (для касательных и нормальных напряжений):

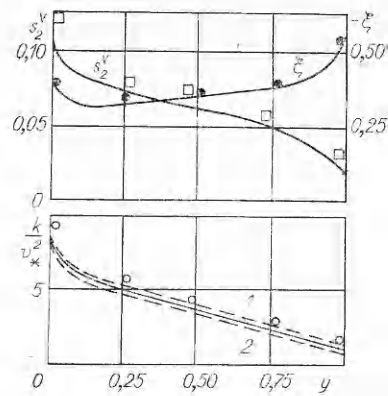
$$(21) \quad R_{12} \equiv \tau = \mu_t \frac{du}{dy}; \quad \mu_t = \rho \nu \chi_n T^{3/4}, \\ R_{11} - R_{22} = -a; \quad a = \frac{7\tau}{V \sqrt{1 + 2(\mu_t^2)^{1/8}}} + \frac{1}{2} \rho V_0^2.$$

Аналогичные соотношения можно найти и для других простых сдвиговых турбулентных течений и близких к ним, допускающих упрощения пограничного типа.

Система (21) показывает, что касательные и нормальные напряжения для этого течения разделены. А поскольку нормальные напряжения определяются касательными и их градиентами, то прежде всего необходимо сделать расчет касательного напряжения и поля осредненных скоростей на основе первого уравнения системы (21) и далее вычислить τ , μ_t , Π_d и V_0 . В данной работе такой расчет и все последующие выполнены по обоб-



Р и с. 3



Р и с. 4

щенной теории Кармана [21]. Расчеты можно произвести и по любой другой полуэмпирической теории — все они дают близкие результаты, по крайней мере, для такого простейшего течения, как течение в канале. И окончательные результаты последующих расчетов пульсаций будут практически одинаковыми вне зависимости от схемы расчета τ и профиля скоростей.

Прежде чем перейти к рассмотрению второго уравнения системы (21), полезно переписать известные из теории упругости [23] формулы плоского напряженного состояния (когда $\sigma_{33} = \sigma_3$) применительно к тензору напряжений Рейнольдса:

$$(22) \quad \begin{aligned} R_{11} &= -\left(1/3 - \sqrt{s_2^y}/3 \sin \xi + \sqrt{s_2^y} \cos \xi \cos 2\alpha\right) \rho k, \\ R_{22} &= -\left(1/3 - \sqrt{s_2^y}/3 \sin \xi - \sqrt{s_2^y} \cos \xi \cos 2\alpha\right) \rho k, \\ R_{33} &= -\left(1/3 + 2 \sqrt{s_2^y}/3 \sin \xi\right) \rho k, \end{aligned}$$

где α — угол наклона главной оси тензора напряжений по отношению к потоку, определяемый соотношением

$$(23) \quad \tau \equiv R_{12} = \sqrt{s_2^y} \cos \xi \sin 2\alpha \rho k.$$

Формулы (22) и (23) справедливы для любого простого сдвигового течения. Второе уравнение системы (21) с учетом (22) приводится к виду

$$(24) \quad 2\rho k \sqrt{s_2^y} \cos \xi \cos 2\alpha = a.$$

Уравнения (13), (14) и (24) составляют систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными инвариантами ρk , s_2^y , ξ . После ее решения можно вычислить нормальные напряжения $R_{11} = -\rho u'^2$, $R_{22} = -\rho v'^2$, $R_{33} = -\rho w'^2$ по формулам (22).

На рис. 3 проведено сопоставление расчетов пульсационных характеристик турбулентных потоков с опытом [5—10] для различных течений: *a* — в плоском канале, $Re = 10^5$; *б* — плоское безнапорное течение Куэтта, $Re = 10^5$; *в* — в пограничном слое плоской пластины, $Re_x = 10^6$; *г* — в плоской струе, $Re_b = 10^5$; линии — расчет (1 — продольная компонента пульсаций, 2 — трансверсальная, 3 — поперечная); точки — опыт.

На рис. 4 показано поведение инвариантов тензора напряжений Рейнольдса по сечению потока для течения в плоском канале в зависимости от поперечной координаты, отсчитываемой от стенки, сплошные линии — расчет при $Re = 10^5$, точки — эксперимент [5], штриховые 1 и 2 — влия-

ние числа Рейнольдса на кинетическую энергию пульсаций при $Re = 10^4$ и 10^8 .

Для более сложных стационарных турбулентных течений несжимаемой жидкости (пространственных) необходимо решать систему дифференциальных уравнений в частных производных, что возможно лишь численными методами. Эта система состоит из уравнений движения сплошной среды в напряжениях (уравнения баланса импульса), неразрывности и определяющего уравнения (16). После постановки соответствующих краевых условий задачи расчета турбулентного течения становятся краевыми задачами математической физики. Интересно отметить, что и в этих сложных задачах структура уравнения (16) позволяет систему уравнений, записанных в скалярном виде, разбить на две группы, первая из которых независима от второй и дает возможность выполнить расчет касательных напряжений и осредненных скоростей, а вторая после расчета на его основе — вычислить пульсационные характеристики течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1973.— Т. 1.
2. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1948.
3. Коларов Д., Балтов А., Бончева Г. Механика пластических сред.— М.: Мир, 1979.
4. Новожилов В. В. О физическом смысле инвариантов напряжения, используемых в теории пластичности // ПММ.— 1952.— Т. 16, вып. 5.
5. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками.— М.: Мир, 1968.
6. Тоунес Д., Гоу Н., Пау Н., Вебер Е. Турбулентный поток в гладких и шероховатых трубах // Теор. основы инж. расчетов.— 1972.— № 2.
7. Klebanoff P. S. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient.— Washington, 1954.— (Techn. Note/NACA; N 3167).
8. El Telbany M. M. M., Reynolds A. J. Turbulence in plane channel flows // J. Fluid Mech.— 1981.— V. 111.
9. Launder B. E., Reece G. G., Rodi W. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure // J. Fluid Mech.— 1975.— V. 68, pt 3.
10. Wygnanski I., Fielder H. Some measurement in the self-preserving jet // J. Fluid Mech.— 1969.— V. 38, N 3.
11. Накамура И., Ямасита С., Фуруя Я. Экспериментальное исследование характеристик турбулентности в толстом турбулентном пограничном слое на вращающемся коническом теле с уменьшающимся в направлении потока радиусом // Турбулентные сдвиговые течения-2.— М.: Машиностроение, 1983.
12. Лохман Н. Измерение характеристик установившегося турбулентного пограничного слоя при местном поперечном движении граничной поверхности // Теор. основы инж. расчетов.— 1976.— № 3.
13. Методы расчета турбулентных течений/Под ред. В. Колльмана.— М.: Мир, 1984.
14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1968.
15. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно упругой среде // ПММ.— 1951.— Т. 15, вып. 2.
16. Павловский В. А. К вопросу о связи между инвариантами тензора напряжений Рейнольдса и схеме расчета пульсационных характеристик турбулентных течений // ДАН СССР.— 1987.— Т. 292, № 1.
17. Хинце И. О. Турбулентность.— М.: Физматгиз, 1963.
18. Турбулентность, принципы и применения/Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена.— М.: Мир, 1980.
19. Современная гидродинамика, успехи и проблемы/Под ред. Дж. Бэтчелора и Г. Моффата.— М.: Мир, 1984.
20. Новожилов В. В. Теория плоского турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.— Л.: Судостроение, 1977.
21. Новожилов В. В. Установившиеся пристенные течения в свете обобщенной теории Гармана // ПММ.— 1983.— Т. 47, вып. 4.
22. Новожилов В. В. О расчете развитого турбулентного течения между двумя соосными вращающимися цилиндрами.— М., 1981.— (Препринт/ИПМ АН СССР; № 178).
23. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.

Поступила 19/II. 1987 г.