

ОБ УЧЕТЕ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. А. Золочевский

(Харьков)

Поведение многих легких сплавов, полимерных, композитных и других материалов в условиях ползучести характеризуется разносопротивляемостью деформированию. Это свойство обычно обнаруживается в традиционных испытаниях на растяжение, сжатие и кручение.

Классическая теория ползучести изотропных сред, построенная на основе критерия Мизеса, не учитывает разносопротивляемость. В ней не делается различий между сопротивлением растяжению и сжатию и, несмотря на принципиальное отличие от линейной деформации, допускается возможность аналитического описания сдвигового деформирования на основе характеристик, найденных при растяжении. Материалам, ползучесть которых удовлетворительно описывается в рамках данной модели, приписывают одинаковые свойства на растяжение, сжатие и сдвиг. В противном случае говорят о разносопротивляемости этим двум или трем видам деформаций. Очевидно, в общем случае сопротивление растяжению, сжатию и сдвигу следует рассматривать как три взаимно независимые характеристики материалов.

В настоящее время существует ряд подходов к описанию ползучести изотропных разносопротивляющихся сред. Некоторый обзор их можно найти в работах [1, 2].

В большинстве предложенных теорий обсуждается поведение материалов с разными свойствами только на растяжение и сжатие. При этом разносопротивляемость учитывается по-разному: с помощью знаков и величин главных напряжений, первого инварианта тензора напряжений, третьего инварианта девиатора напряжений. Сопоставление результатов, предсказываемых этими теориями, с экспериментальными данными при сложном напряженном состоянии приводит к их удовлетворительному совпадению и не говорит в пользу той или иной теории [1]. В этой ситуации оправдано, по-видимому, использование более простых физических уравнений.

В [2, 3] рассмотрена ползучесть несжимаемых сред, разносопротивляющихся всем трем видам деформаций. В основе этого подхода лежит представление о потенциале, зависящем от квадратичного и кубического инвариантов девиатора напряжений. При этом используется ассоциированный закон течения. В дальнейшем этот подход распространен [4] и на ортотропные среды, главные направления анизотропии которых совпадают с главными осями тензора напряжений.

Вид связи между деформациями и напряжениями определяется свойствами материала. Физическое состояние анизотропной среды может быть описано рядом тензоров различных рангов. Выбор тензоров анизотропии в достаточной степени произволен и определяется возможностями обработки результатов эксперимента. Весьма удобно оперировать инвариантами, содержащими тензор напряжений и некоторое число этих тензоров анизотропии. Для разносопротивляющихся материалов недостаточно одного квадратичного инварианта, надо использовать нечетные инварианты. Ниже будет показано, что для описания разносопротивляемости, по крайней мере, в случае двумерного напряженного состояния достаточно первого и второго инвариантов и нет необходимости вводить третий инвариант.

Пусть σ и σ_0^2 — соответственно линейный и квадратичный совместные инварианты тензора напряжений σ_{ij} и тензоров анизотропии b_{ij} , a_{ijkl} :

$$\sigma = b_{ij} \sigma_{ij}, \quad \sigma_0^2 = a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}.$$

В теории ползучести исходят обычно из предположения о существовании потенциала, уравнение поверхности которого принимается в виде

$$(1) \quad f = \sigma_e^2 - \varphi^2 (\dot{\epsilon}_0^c) = 0.$$

Здесь σ_e — эквивалентное напряжение ($\sigma_e \geq 0$); $\dot{\epsilon}_0^c$ — эквивалентная скорость деформаций ползучести, произведение которой на σ_e равняется удельной мощности рассеиваемой энергии

$$(2) \quad W = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^c, \quad \text{т. е.} \\ \dot{\epsilon}_0^c \sigma_e = W;$$

$\dot{\epsilon}_{ij}^c$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести. Различные варианты построения потенциала соответствуют разным представлениям эквивалентного напряжения.

Для классических анизотропных сред эквивалентное напряжение σ_e обычно отождествляют с σ_0 [5], т. е. полагают

$$(3) \quad \sigma_e = \sigma_0.$$

Для разносопротивляющихся материалов запишем

$$(4) \quad \sigma_e = \sigma_0 + \sigma.$$

Соотношение (4) включает в себя как частный случай выражение (3).

Компоненты тензора скоростей деформаций ползучести $\dot{\epsilon}_{ij}^c$ определим ассоциированным законом течения [6] $\dot{\epsilon}_{ij}^c = \lambda \partial f / \partial \sigma_{ij}$, где λ — некоторый скалярный множитель. Тогда с учетом соотношений

$$\partial \sigma_0 / \partial \sigma_{ij} = a_{ijkl} \sigma_{kl} / \sigma_0, \quad \partial \sigma / \partial \sigma_{ij} = b_{ij}, \quad \partial f / \partial \sigma_0 = 2\sigma_e, \quad \partial f / \partial \sigma = 2\sigma_e$$

получим физические уравнения

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = 2\lambda \sigma_e (a_{ijkl} \sigma_{kl} / \sigma_0 + b_{ij}).$$

Образуя свертку $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^c$ с использованием этих зависимостей, имеем

$$(5) \quad 2\lambda \sigma_e^2 = W.$$

Сравнивая равенства (2) и (5), находим $2\lambda \sigma_e = \dot{\epsilon}_0^c$. Вид функции $\dot{\epsilon}_0^c$ определяется из (4). Действительно, $\sigma_e = h(\dot{\epsilon}_0^c)$. Очевидно, что существует и обратная зависимость $\dot{\epsilon}_0^c = v(\sigma_e)$, определяющая кривые ползучести при одноосном напряженном состоянии.

Заметим, что

$$(6) \quad v(0) = 0.$$

Функция $v(\sigma_e)$ может быть принята в одной из следующих форм: степенная зависимость $v(\sigma_e) = \sigma_e^n$, закон гиперболического синуса $v(\sigma_e) = \text{sh}(\sigma_e/A)$, экспоненциальная зависимость $v(\sigma_e) = \exp(\sigma_e/A)$. Хотя в последнем соотношении условие (6) не выполняется, это представление вследствие своей простоты часто используется.

Итак, физические уравнения теории ползучести анизотропных разносопротивляющихся сред имеют вид

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = v(\sigma_e) (a_{ijkl} \sigma_{kl} / \sigma_0 + b_{ij}).$$

Константы материала b_{ij} , a_{ijkl} в этих зависимостях образуют тензоры и при изменении системы координат преобразуются по соответствующим формулам тензорной алгебры. Вследствие симметрии тензора напряжений σ_{ij} можно считать без ограничения общности, что тензоры b_{ij} , a_{ijkl} удовлетворяют условиям симметрии

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk} = a_{klij},$$

снижающим число различных констант b_{ij} до 6 и постоянных a_{ijkl} до 21.

Для материалов, не менее симметричных, чем ортотропные, в системе координат, оси которых совпадают с главными направлениями анизотропии, физические соотношения запишутся в виде

$$(7) \quad \dot{\epsilon}_{11}^c = v(\sigma_e) \left(\frac{a_{1111} \sigma_{11} + a_{1122} \sigma_{22} + a_{1133} \sigma_{33}}{\sigma_0} + b_{11} \right),$$

$$\dot{\epsilon}_{12}^c = 2v(\sigma_e) \frac{a_{1212} \sigma_{12}}{\sigma_0} \quad (1, 2, 3),$$

$$\sigma_0^2 = a_{1111} \sigma_{11}^2 + 2a_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + 2a_{1133} \sigma_{11} \sigma_{33} + 2a_{2233} \sigma_{22} \sigma_{33} + 4a_{1212} \sigma_{12}^2 +$$

$$+ 4a_{1313} \sigma_{13}^2 + 4a_{2323} \sigma_{23}^2 + a_{2222} \sigma_{22}^2 + a_{3333} \sigma_{33}^2,$$

$$\sigma = b_{11} \sigma_{11} + b_{22} \sigma_{22} + b_{33} \sigma_{33}.$$

Проиллюстрируем возможности использования уравнений (7) для описания ползучести в условиях двумерного напряженного состояния. Воспользуемся экспериментальными данными [4, 5], полученными на трубчатых образцах из материала Д16Т при температуре 250°C, нагруженных внутренним давлением с одновременным приложением осевой растягивающей или сжимающей нагрузки. Закон связи тензоров скоростей деформаций ползучести и напряжений в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{11}^c &= (\sigma + \sigma_0)^n \left(\frac{a_{1111}\sigma_{11} + a_{1122}\sigma_{22}}{\sigma_0} + b_{11} \right) \quad (1, 2), \\ \sigma_0^2 &= a_{1111}\sigma_{11}^2 + 2a_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + a_{2222}\sigma_{22}^2, \\ \sigma &= b_{11}\sigma_{11} + b_{22}\sigma_{22}.\end{aligned}$$

Кривые ползучести при одноосном напряженном состоянии [5] описываются зависимостями

$$\dot{\epsilon}_{11}^c = A_1^k |\sigma_{11}|^{N-1} \text{sign}(\sigma_{11}), \quad \dot{\epsilon}_{22}^c = -\nu_2^k \dot{\epsilon}_{11}^c \quad (1, 2), \quad k = 1, 2.$$

Значение $k = 1$ соответствует растяжению, $k = 2$ — сжатию. Известны [5] следующие константы материала: $N = 7,5$, $A_1^1 = 4,32 \cdot 10^{-11}$, $A_1^2 = 2,24 \cdot 10^{-11}$, $A_2^1 = 9,40 \times 10^{-11}$ (мм²/кг) ^{$N-1$} ч⁻¹. Из экспериментальных данных по осевому сжатию трубчатых образцов, а также нагруженных только внутренним давлением, представленных в этой работе, можно определить коэффициенты $\nu_2^2 = 0,53$, $\nu_1^1 = 0,33$. Этих экспериментальных констант достаточно для отыскания параметров анизотропии в рассматриваемых физических соотношениях: $n = N - 1 = 6,5$,

$$\begin{aligned}a_{1111} &= [(A_1^1)^{1/(n+1)} + (A_1^2)^{1/(n+1)}]^2 / 4 = 1,58 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/мм}^2\text{)}^{-2n/(n+1)} \text{ч}^{-2/(n+1)}, \\ b_{11} &= [(A_1^1)^{1/(n+1)} - (A_1^2)^{1/(n+1)}] / 2 = 1,74 \cdot 10^{-3} \text{ (кг/мм}^2\text{)}^{-n/(n+1)} \text{ч}^{-1/(n+1)}, \\ a_{2222} &= [(A_1^2)^{1/(n+1)} \nu_2^2 - (A_2^1)^{1/(n+1)}]^2 a_{1111} / [b_{11} + (A_2^1)^{1/(n+1)} \nu_1^1 - \sqrt{a_{1111}}]^2 = \\ &= 2,03 \cdot 10^{-3}, \quad b_{22} = (A_2^1)^{1/(n+1)} - \sqrt{a_{2222}} = 9,57 \cdot 10^{-4}, \quad a_{1122} = \\ &= -\sqrt{a_{2222}} [b_{11} + (A_2^1)^{1/(n+1)} \nu_1^1] = -7,63 \cdot 10^{-4}.\end{aligned}$$

Рассмотрим пять программ нагружения: 1) $\sigma_{11} = -10,98$, $\sigma_{22} = 5,49$; 2) $\sigma_{11} = -8,06$, $\sigma_{22} = 8,06$; 3) $\sigma_{11} = 7$, $\sigma_{22} = 14$; 4) $\sigma_{11} = -3,76$, $\sigma_{22} = 11,28$; 5) $\sigma_{11} = 12,4$ кг/мм², $\sigma_{22} = 12,4$ кг/мм².

На фиг. 1—5 представлено соответственно для каждого случая изменение взятых по абсолютной величине осевых ϵ_{11}^c (сплошная линия) и окружных ϵ_{22}^c (штриховая линия) деформаций с течением времени t . Экспериментальные данные изображены темными (осевая деформация) и светлыми (окружная деформация) кружками. Совпадение, таким образом, теоретических и экспериментальных результатов вполне удовлетворительное.

Используя в соотношениях (7) равенства

$$\begin{aligned}b_{11} = b_{22} = b_{33}, \quad a_{1111} = a_{2222} = a_{3333}, \quad a_{1212} = a_{1313} = a_{2323}, \\ a_{1122} = a_{1133} = a_{2233}, \quad a_{1111} = 2a_{1212} + a_{1122},\end{aligned}$$

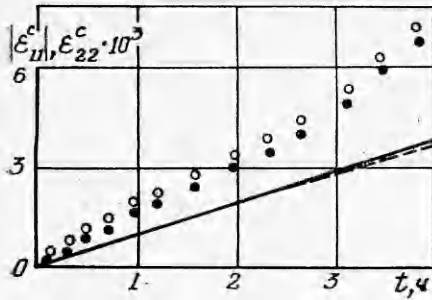
приходим в рамках рассматриваемого подхода к физическим зависимостям теории ползучести изотропных сред с разными свойствами на растяжение, сжатие и сдвиг. Если же материал разносопротивляется только растяжению и сжатию, то обычно еще принимается условие $4 a_{1212} = 3 a_{1111}$. В этом случае σ_0 с точностью до константы совпадает с интенсивностью напряжений.

Отметим, что предложенные физические уравнения описывают ряд экспериментально известных для изотропных сред эффектов: зависимость процесса ползучести от гидростатического давления [7, 8], отклонение от подобия девиаторов скоростей деформаций ползучести и напряжений [7—9], сжимаемость [7, 8], наличие осевой ползучести в условиях чистого сдвига [2, 9], дилатансию [8] и др.

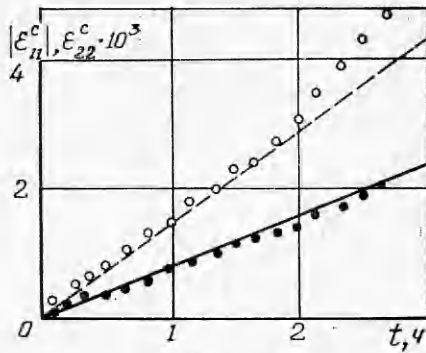
Покажем возможности использования этих физических зависимостей для описания ползучести при сложном напряженном состоянии в изотропных материалах с независимыми свойствами при растяжении, сжатии и кручении. Рассмотрим экспериментальные данные, полученные на трубчатых образцах при совместном действии растягивающего или сжимающего усилия и крутящего момента [2, 3]. Материал — сплав АК4-1Т при температуре 200°C. В этом случае предположение о взаимозависимости поведения материала при растяжении, сжатии и кручении и применение известных в классической теории ползучести уравнений приводит к результатам, отличающимся от экспериментальных данных до 150% [3].

Предлагаемые физические соотношения запишутся в виде

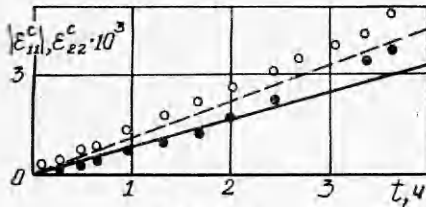
$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{11}^c &= v(\sigma_e) (a_{1111}\sigma_{11}/\sigma_0 + b_{11}), \\ \dot{\epsilon}_{12}^c &= 2v(\sigma_e) a_{1212}\sigma_{12}/\sigma_0, \\ \sigma_0^2 &= a_{1111}\sigma_{11}^2 + 4a_{1212}\sigma_{12}^2, \quad \sigma = b_{11}\sigma_{11}.\end{aligned}$$



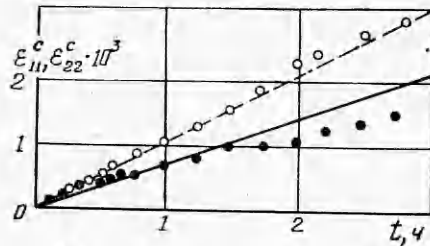
Ф и г. 1



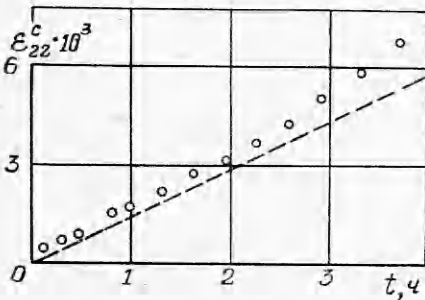
Ф и г. 4



Ф и г. 2



Ф и г. 5



Ф и г. 3

При обработке кривых ползучести, представленных в [2], принято $v(\sigma_2) = (\sigma_2 - \sigma_0)^n$ и найдено $n = 8$, $a_{1111} = 6,15 \cdot 10^{-4}$, $a_{1212} = 5,57 \cdot 10^{-4} (\text{кг/мм}^2)^{-2n/(n+1) \cdot \tau - 2/(n+1)}$, $b_{11} = 9,54 \cdot 10^{-4} (\text{кг/мм}^2)^{-n/(n+1) \cdot \tau - 1/(n+1)}$.

В таблице приведены экспериментальные $\dot{\epsilon}^c$, $\dot{\gamma}^c$ и расчетные $\dot{\epsilon}_{11}^c$, $2\dot{\epsilon}_{12}^c$ значения скоростей деформаций для различных комбинаций растяжения (сжатия) с кручением. Экспериментальные данные взяты из работы [3]. Отметим удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных значений скоростей деформаций. К аналогичным результатам можно прийти, применяя более сложные соотношения с привлечением третьего инварианта девиатора напряжений [2, 3].

Таким образом, предложенные в работе физические уравнения, представленные в достаточно простой и удобной тензорно-инвариантной форме, могут быть использованы при анализе ползучести различных элементов конструкций из разноспротивляющихся анизотропных материалов.

Поступила 16 VII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О построении уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие. — ПМТФ, 1979, № 4.
2. Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О ползучести материалов с разными

№ п/п	σ_{11} , кг/мм ²	σ_{12} , кг/мм ²	$\dot{\epsilon}^c \cdot 10^4$, ч ⁻¹	$\dot{\gamma}^c \cdot 10^4$, ч ⁻¹	$\dot{\epsilon}_{11}^c \cdot 10^4$, ч ⁻¹	$2\dot{\epsilon}_{12}^c \cdot 10^4$, ч ⁻¹
1	12,23	7,06	0,36	0,7	0,37	0,73
2	-13,08	7,55	-0,32	0,6	-0,37	0,82
3	15,24	5,08	0,49	0,54	0,46	0,53
4	-17,56	4,2	-0,5	0,39	-0,45	0,40
5	6,62	9,23	0,19	0,9	0,24	1,09
6	-6,87	9,58	-0,14	0,93	-0,21	1,18

- свойствами на растяжение и сжатие.— В кн.: Прочность материалов и элементов конструкций при сложн. напряж. состоянии. Киев: Наукова думка, 1978.
3. Цвелодуб И. Ю. О некоторых подходах к описанию установившейся ползучести в сложных средах.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 25. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1976.
 4. Никитенко А. Ф., Цвелодуб И. Ю. О ползучести анизотропных материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие.— В сб.: Динамика сплошной среды. Вып. 43. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1979.
 5. Никитенко А. Ф. Ползучесть и разрушение легких сплавов. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1970.
 6. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975.
 7. Гольдман А. Я. Прочность конструкционных пластмасс. Л.: Машиностроение, 1979.
 8. Вялов С. С. Реологические основы механики грунтов. М.: Высшая школа, 1978.
 9. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
-

Зав. редакцией *Н. С. Калашникова*
Художественный редактор *Э. С. Филоньчева*
Технический редактор *Н. М. Бураченко*
Корректоры *С. В. Блинова, Е. Н. Зимина*

Сдано в набор 05.04.82. Подписано к печати 23.06.82. МН-00264. Формат 70×108¹/₁₆. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 13,3. Усл. кр.-отт. 13,7. Уч.-изд. л. 16. Тираж 1767 экз. Заказ № 125.

Издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.