

13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
14. Хемминг Р. В. Численные методы. М.: Наука, 1972.
15. Lee S. H., Chadwick R. S., Leal L. G. Motion of a sphere in the presence of a plane interface. Part 1. An approximate solution by generalization of the method of Lorentz.— J. Fluid Mech., 1979, v. 93, pt 4.
16. Goldman A. J., Cox R. G., Brenner H. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall.— II. Couette flow.— Chem. Eng. Sci., 1967, v. 22, N 4.
17. Коузов П. А. Основы анализа дисперсного состава промышленных пылей и измельченных материалов. Л.: Химия, 1971.

Поступила 22/VI 1984 г.

УДК 532.529.5

## СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗОВЗВЕСИ ОКОЛО КЛИНА ПРИ НАЛИЧИИ ОТРАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. Д. Сарычев, А. П. Трунев, В. М. Фомин

(Новосибирск)

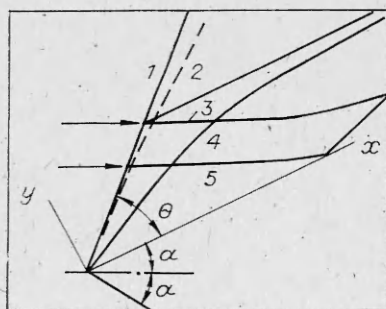
Исследуется сверхзвуковое течение около клина, возмущенное вследствие взаимодействия газа с облаком монодисперсных частиц. Указано точное решение задачи о движении частиц за косым скачком уплотнения и частиц, зеркально отраженных от поверхности клина. Эти результаты использованы для определения возмущений газодинамических параметров и сил, действующих на клин в двухфазном потоке. Проведено сравнение влияния частиц на течение в двух различных ситуациях, в одной из которых частицы прилипают к поверхности клина, а в другой, упруго отражаясь, формируют пылевой слой с резко выраженной контактной границей.

Ранее задача о возмущенном движении газа за косым скачком уплотнения рассматривалась в газовой динамике [1] и в динамике излучающего газа [2]. Задача о сверхзвуковом двухфазном течении около клина исследовалась в рамках линейной теории [3] и численными методами [4]. Известно решение задачи о движении частицы за косым скачком уплотнения [5] и отраженной частицы [6]. Точное решение задачи о движении облака частиц за косым скачком уплотнения найдено в [7].

### 1. Движение пылевого облака при сверхзвуковом течении около клина.

Рассмотрим аэродинамическую ситуацию, возникающую при натекании сверхзвукового потока газозвеси на клин с углом полураствора, равным  $\alpha$ ; это может быть и плоская пластина, тогда  $\alpha$  — угол атаки. Общая картина течения в случае малой примеси монодисперсных частиц показана на фиг. 1, где 1 — положение косоуго (невозмущенного) скачка уплотнения, 2 — линия тока газа в основном движении, 3 — траектория частицы, не достигающей поверхности клина, 4 — предельная траектория, ниже которой движется облако отраженных частиц, 5 — траектория частицы, испытавшей соударение с клином,  $x, y$  — оси декартовой системы координат, положение возмущенного скачка уплотнения обозначено штрихами.

Предполагая малой величиной относительный расход конденсированной фазы в набегающем потоке ( $\rho_{p\infty}u_{p\infty}/\rho_{\infty}u_{\infty} \ll 1$ ), рассмотрим задачу о нахождении параметров сверхзвукового во всей области течения потока газозвеси. Эту задачу будем решать итерационно, подобно траекторному методу расчета двухфазных течений [8]. На первом шаге считаем газовый поток свободным от частиц, тогда решение газодинамических уравнений сводится к условиям на косом скачке уплотнения. Движение частиц в этом приближении происходит на фоне постоянного течения газа и сводится к релаксации из одного состояния равновесия к другому. На сле-



Ф и г. 1

дующем шаге «включается» взаимодействие газа с частицами, причем интенсивность взаимодействия определяется из условия выполнения законов сохранения массы, импульса и энергии для смеси в целом. На втором шаге движение частиц считается известным из решения, определенного на первом шаге. В силу условия  $\delta_0 \ll 1$  решение газодинамических уравнений может быть сведено к нахождению акустических возмущений, вызванных объемными источниками. В результате описанной процедуры газодинамические параметры и плотность потока частиц определяются с точностью  $\sim \delta_0^2$ , а температура и скорость конденсированной фазы — с точностью  $\sim \delta_0$ . Существенно, однако, что силы, действующие на клин в потоке газозвеси, определяются с точностью  $\sim \delta_0^2$ , поскольку расход дискретной фазы есть величина  $\sim \delta_0$ . В рамках данной модели необходимо учитывать влияние отраженных частиц на состояние газового потока, но можно не учитывать соударения падающих и отраженных частиц, так как интенсивность их взаимодействия  $\sim \delta_0^2$ .

Итак, согласно вышеизложенному плану, рассмотрим движение облака частиц за косым скачком уплотнения. Для описания движения большого числа частиц используем континуальное представление; соответствующие уравнения имеют вид [9]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \partial/\partial x(\rho_p u_p) + \partial/\partial y(\rho_p v_p) &= 0, \\ (u_p \partial/\partial x + v_p \partial/\partial y) u_p &= (3\rho_0 C_D/4\rho_s d_p) W(u_0 - u_p), \\ (u_p \partial/\partial x + v_p \partial/\partial y) v_p &= -(3\rho_0 C_D/4\rho_s d_p) W v_p, \\ (u_p \partial/\partial x + v_p \partial/\partial y) T_p &= (6c_p \mu_0 \text{Nu}/c_s \rho_s d_p^2 \text{Pr}) (T_0 - T_p), \end{aligned}$$

где  $W = \sqrt{(u_0 - u_p)^2 + v_p^2}$ ;  $\rho_0$ ,  $u_0$ ,  $T_0$ ,  $\mu_0$  — плотность, скорость, температура и вязкость газа за косым скачком уплотнения;  $c_p$  — удельная теплоемкость газа;  $\rho_s$ ,  $c_s$  — плотность и удельная теплоемкость материала частицы;  $d_p$  — ее диаметр;  $\text{Nu}$  — число Нуссельта;  $\text{Pr}$  — число Прандтля.

Далее предположим, что коэффициент сопротивления  $C_D$  зависит только от чисел Маха и Рейнольдса относительного движения  $C_D = C_D(\bar{M}, \bar{\text{Re}})$ , где  $\bar{M} = W/(\gamma R T_0)$ ;  $\bar{\text{Re}} = W d_p \rho_0/\mu_0$ , а закон теплообмена имеет вид  $\text{Nu} = \text{Nu}(\bar{M}, \bar{\text{Re}}, \text{Pr})$ .

Граничные условия для системы (1.1) зададим на линии скачка уплотнения, предполагая, что пылевые частицы имеют скорость и температуру газа в набегающем потоке, т. е. речь идет о движении некоего тела сквозь пылевое атмосферное облако. Таким образом, на линии  $y = x \text{tg } \theta$  должно быть

$$(1.2) \quad \rho_p = \rho_{p\infty}, u_p = q_\infty \cos \alpha, v_p = -q_\infty \sin \alpha, T_p = T_\infty,$$

где  $\theta$  — угол наклона ударной волны и поверхности клина;  $q_\infty$ ,  $T_\infty$  — модуль скорости и температура газа в набегающем потоке.

Заметим, что первое и четвертое уравнения системы (1.1) линейные относительно  $\rho_p$  и  $T_p$  соответственно. Необходимо, следовательно, разрешить нелинейную систему из двух оставшихся уравнений, что было сделано в [7]. Напомним основную идею решения задачи. Исследуемая система и соответствующие граничные условия не содержат произвольных функций и содержат один параметр с размерностью длины  $l_p$ . Поскольку координаты  $x$  и  $y$  равноправны в данной задаче, решение не может зависеть от  $x$ ,  $y$  по отдельности, но зависит лишь от некоторой их линейной комбинации. Таковой является переменная  $\xi = x \text{tg } \theta - y$ . Из анализа размерности вытекает, что решение задачи зависит от безразмерного отношения  $\xi/l_p$ . Это и выполняется в действительности, но только в интегральной форме. Решение задачи (1.1) и (1.2) представим в виде (ср. с [7])

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \rho_p &= \rho_{p\infty} [\varepsilon + (1 - \varepsilon)\eta], u_p = u_0 + (q_\infty \cos \alpha - u_0)\eta, \\ v_p &= -(q_\infty \sin \alpha)\eta, T_p = T_0 - (T_0 - T_\infty)e^{-J(\eta)}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon = \rho_\infty/\rho_0$  — отношение плотностей газа до и после скачка. Функции  $\eta(\xi)$  и  $J(\eta)$  удовлетворяют уравнениям

$$(1.4) \quad \xi \sin \alpha / \sin (\theta + \alpha) = \int_{\eta}^1 [\varepsilon + (1 - \varepsilon) s] l_p(s) ds/s^2,$$

$$J(\eta) = (8c_p/c_s \text{Re}_0 \text{Pr}) \int_{\eta}^1 \text{Nu}(s \text{Re}_0, s \text{M}_0, \text{Pr}) C_D^{-1}(s \text{Re}_0, s \text{M}_0) ds/s^2,$$

$$\text{Re}_0 = q_\infty d_p \rho_0 \sin \alpha / (\mu_0 \cos \theta), \text{M}_0 = \text{M}_\infty T_\infty \sin \alpha / (T_0 \cos \theta),$$

$$l_p(s) = 4\rho_s d_p / (3\rho_0 C_D(s \text{Re}_0, s \text{M}_0)).$$

Поясним происхождение сложных аргументов у подынтегральных функций в (1.4). Согласно (1.3), модуль скорости есть  $W = ((u_p - u_0)^2 + v_p^2)^{1/2} = \eta q_\infty \sin \alpha / \cos \theta$ . Следовательно,  $\bar{M} = \eta \text{M}_0$ ,  $\bar{\text{Re}} = \eta \text{Re}_0$  и соответственно

$$C_D = C_D(\eta \text{Re}_0, \eta \text{M}_0), \text{Nu} = \text{Nu}(\eta \text{Re}_0, \eta \text{M}_0, \text{Pr}).$$

На поверхности клина частицы имеют нормальную к поверхности составляющую скорости  $v_p = -(q_\infty \sin \alpha) \eta (x \text{tg } \theta)$ . Эти частицы испытывают соударение с поверхностью и либо прилипают к ней, если это были, например, капли жидкости, либо отражаются и продолжают движение, если это были твердые частицы. Рассмотрим задачу о движении облака частиц, отраженных от поверхности зеркальным образом. Будем отличать параметры потока отраженных частиц штрихом, тогда граничные условия на поверхности клина для них имеют вид (условие зеркального отражения)

$$(1.5) \quad \rho'_p = \rho_p, \quad u'_p = u_p, \quad v'_p = -v_p, \quad T'_p = T_p.$$

Предположим, что движение отраженных частиц описывается системой уравнений (1.1), в которой всем параметрам присвоены штрихи, после чего систему обозначим (1.1'). Заметим, что система уравнений (1.1) инварианта относительно одновременной замены  $y \rightarrow -y$ ,  $v_p \rightarrow -v_p$ . Отсюда и из граничных условий (1.5) следует, что решение задачи (1.1) и (1.5) можно представить в виде (1.3), но с заменой  $\xi$  на «зеркальную» переменную  $\xi' = x \text{tg } \theta + y$  и одновременно  $v_p \rightarrow -v_p$ :

$$(1.6) \quad \rho'_p = \rho_{p\infty} / [\varepsilon + (1 - \varepsilon) \eta'], \quad u'_p = u_0 + (q_\infty \cos \alpha - u_0) \eta', \\ v'_p = (q_\infty \sin \alpha) \eta', \quad T'_p = T_0 - (T_0 - T_\infty) e^{-J'},$$

где  $J' = J(\eta')$ , а функция  $\eta'(\xi')$  удовлетворяет уравнению

$$(1.7) \quad \xi' \sin \alpha / \sin (\alpha + \theta) = \int_{\eta'}^1 [\varepsilon + (1 - \varepsilon) s] l_p(s) ds/s^2.$$

Все рассуждения, предшествующие нахождению решения задачи (1.1) и (1.2), можно с успехом заменить групповым анализом соответствующих уравнений (см. [10]). Это замечание касается и способа нахождения решения задачи (1.1) и (1.5). Наличие дискретной группы симметрии (зеркальная симметрия) облегчило нахождение решения последней задачи, но это свойство решений (1.6) нарушается при любом возмущении граничных условий (1.5). С физической точки зрения более приемлемы условия  $u'_p = \lambda_1 u_p$ ,  $v'_p = -\lambda_2 v_p$ , описывающие частичную потерю импульса при соударении ( $\lambda_1, \lambda_2$  — коэффициенты восстановления скорости при ударе). Появление в условиях (1.5) произвольных коэффициентов нарушает симметрию задачи, решение которой в этом случае не может быть сведено к квадратурам.

Необходимо установить вид траекторий движения как для падающих, так и для отраженных частиц. Если обозначить через  $x_s, y_s$  координаты

траекторий падающей частицы, то из (1.4) и определения траектории имеем

$$dx_s \operatorname{tg} \theta - dy_s - [\varepsilon + (1 - \varepsilon)s] l_p(s) \sin(\theta + \alpha) ds / s^2 \sin \alpha = 0, \\ u_p dy_s - v_p dx_s = 0.$$

Отсюда находим в параметрическом виде выражение для траектории

$$x_s = x_0 - \int_{s_0}^s u_p(s) l_p(s) \cos \theta ds / (s^2 q_\infty \sin \alpha), \\ y_s = y_0 - \int_{s_0}^s v_p(s) l_p(s) \cos \theta ds / (s^2 q_\infty \sin \alpha),$$

где  $u_p(s) = u_0 + (q_\infty \cos \alpha - u_0)s$ ;  $v_p(s) = -(q_\infty \sin \alpha)s$ . Аналогично для траекторий отраженных частиц получим

$$(1.8) \quad x'_s = x_1 + \int_s^{s_1} u'_p(s) l_p(s) \cos \theta ds / (s^2 q_\infty \sin \alpha), \\ y'_s = \int_s^{s_1} v'_p(s) l_p(s) \cos \theta ds / (s^2 q_\infty \sin \alpha), \\ u'_p(s) = u_p(s), \quad v'_p(s) = -v_p(s).$$

Поскольку движение отраженной частицы зависит от предыстории ее движения до соударения с поверхностью, необходимо потребовать  $x_s(s_1) = x_1$ . С другой стороны, из того, что частица в своем движении прошла через скачок уплотнения, следует  $y_0 = x_0 \operatorname{tg} \theta$ ,  $s_0 = 1$ .

Полагая в (1.8)  $x_1 = 0$ ,  $s_1 = 1$ , находим уравнение предельной траектории  $y_s^*(x)$ , ниже которой движется облако отраженных частиц (кривая 4 на фиг. 1). Наклон предельной траектории в окрестности носика клина есть  $dy_s^*/dx(0) = \operatorname{tg} \alpha$  (при зеркальном отражении угол падения равен углу отражения). Поэтому, если наклон ударной волны к поверхности клина меньше наклона предельной траектории ( $\theta < \alpha$ ), некоторая доля частиц отражается прямо в набегающий поток: В этом случае решение задачи о движении отраженных частиц, полученное выше, несправедливо. Далее не будем учитывать такую возможность и просто положим  $\theta \geq \alpha$ .

2. Взаимодействие акустических возмущений с облаком частиц. Чтобы последовательно учесть влияние большого числа частиц на состояние газового потока, используем уравнения движения неоднородной смеси, записанные в форме законов сохранения:

$$(2.1) \quad \partial/\partial x (\rho u + \rho_p u_p + \rho'_p u'_p) + \partial/\partial y (\rho v + \rho_p v_p + \rho'_p v'_p) = 0, \\ \partial/\partial x (\rho u^2 + p + \rho_p u_p^2 + \rho'_p u_p'^2) + \partial/\partial y (\rho uv + \rho_p u_p v_p + \rho'_p u_p' v_p') = 0, \\ \partial/\partial x (\rho uv + \rho_p u_p v_p + \rho'_p u_p' v_p') + \partial/\partial y (\rho v^2 + p + \rho_p v_p^2 + \rho'_p v_p'^2) = 0, \\ \partial/\partial x (\rho ue + \rho_p u_p e_p + \rho'_p u_p' e_p') + \partial/\partial y (\rho ve + \rho_p v_p e_p + \rho'_p v_p' e_p') = 0, \\ e = \gamma p / \rho (\gamma - 1) + (u^2 + v^2) / 2, \quad e_p = c_s T_p + (u_p^2 + v_p^2) / 2, \\ e_p' = c_s T_p' + (u_p'^2 + v_p'^2) / 2 \quad (p - \text{давление в газе}).$$

Оценивая относительный вклад слагаемых с индексом  $p$  в динамику несущего газа, находим, что этот вклад пропорционален относительному расходу частиц, т. е.  $\sim \delta_0$ . Следовательно, при  $\delta_0 \ll 1$  правомерно будет рассмотреть задачу о возмущенном движении газа в акустической поста-

новке. Газодинамические параметры подвергнем линеаризации по формулам

$$\rho = \rho_0(1 + \delta_0 \tilde{\rho}), \quad u = u_0(1 + \delta_0 \tilde{u}), \quad v = u_0 \delta_0 \tilde{v}, \\ p = p_0 + \rho_0 u_0^2 \delta_0 \tilde{p}, \quad e = e_0 + u_0^2 \delta_0 \tilde{e}.$$

Подставим эти выражения в (2.1) и выразим слагаемые с индексом  $p$  в соответствии с принятой моделью расчета в виде (1.3) и (1.6). Тогда после некоторых упрощений, опуская члены квадратичные и более высокого порядка малости по  $\delta_0$ , получим известную систему уравнений сверхзвуковой акустики [1, 2]:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \partial \tilde{u} / \partial x + \partial \tilde{\rho} / \partial x + \partial \tilde{v} / \partial y &= 0, \\ \partial \tilde{u} / \partial x + \partial \tilde{p} / \partial x &= (\operatorname{tg}^2 \theta / u_0) (dv_p / d\xi + \sigma dv'_p / d\xi'), \\ \partial \tilde{v} / \partial x + \partial \tilde{p} / \partial y &= -(\operatorname{tg} \theta / u_0) (dv_p / d\xi + \sigma dv'_p / d\xi'), \\ \partial \tilde{p} / \partial x - (1/M^2 \gamma) \partial \tilde{\rho} / \partial x + (\gamma - 1) / \gamma \partial \tilde{u} / \partial x &= \\ &= -\frac{(\gamma - 1) \operatorname{tg}^2 \theta}{\gamma u_0^2} \left( \frac{de_p}{d\xi} + \sigma \frac{de'_p}{d\xi'} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $M$  — число Маха за косым скачком уплотнения;  $\sigma$  — единичная функция:

$$\sigma = \begin{cases} 1, & y \leq y_s^*(x), \\ 0, & y > y_s^*(x); \end{cases}$$

$y_s^*(x)$  — предельная траектория. Систему уравнений (2.2) необходимо дополнить граничными условиями на скачке уплотнения, на поверхности клина и, кроме того, на линии  $y = y_s^*(x)$ , являющейся поверхностью слабого разрыва газодинамических параметров. Условия на скачке уплотнения получаются путем линеаризации условий Рэнкина — Гюгонно [1, 2]:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \gamma M^2 \tilde{p} + (\gamma - 1) M^2 \tilde{u}, \quad \tilde{p} = n \tilde{v}, \\ \tilde{u} &= -[1 + (1/\varepsilon - 1)m] \tilde{v} \operatorname{tg} \theta, \quad \tilde{\theta} = m \tilde{v}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} n &= \frac{[2\varepsilon - (1 - \varepsilon)(\gamma - 1)M^2 \sin^2 \theta] \operatorname{tg} \theta}{\varepsilon + (M^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \theta - (1 - \varepsilon) \gamma M^2 \sin^2 \theta}, \\ m &= \frac{n - 1 + [\gamma n - \gamma + 1] M^2 \sin^2 \theta}{(1/\varepsilon - 1)[2 + (\gamma - 1)M^2] \sin^2 \theta \operatorname{tg} \theta}; \end{aligned}$$

$\tilde{\theta}$  — возмущение угла наклона ударной волны. Два других условия имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= 0 \quad \text{при } y = 0, \\ \tilde{v}(x, y_s^* + 0) &= \tilde{v}(x, y_s^* - 0), \quad \tilde{p}(x, y_s^* + 0) = \tilde{p}(x, y_s^* - 0), \\ \tilde{\rho}(x, y_s^* + 0) &= \tilde{\rho}(x, y_s^* - 0), \quad \tilde{u}(x, y_s^* + 0) = \tilde{u}(x, y_s^* - 0) \\ &\quad \text{при } y = y_s^*(x). \end{aligned}$$

Последние условия выражают свойство непрерывности газодинамических параметров при переходе через поверхность слабого разрыва. Вся область течения за косым скачком уплотнения естественным образом разбивается на две:  $D_1$  ( $\sigma = 0$ ),  $D_2$  ( $\sigma = 1$ ). В области  $D_1$  решение уравнений (2.2) для возмущений  $\tilde{p}$  и  $\tilde{v}$  можно представить в виде

$$\tilde{p} = \Phi_1(\Psi_+) + \Phi_2(\Psi_-) + \hat{p}(\xi), \quad \tilde{v} = \omega(\Phi_2(\Psi_-) - \Phi_1(\Psi_+)) + \hat{v}(\xi),$$

где  $\omega = \sqrt{M^2 - 1}$ ;  $\Psi_{\pm} = x \pm \omega y$ ;  $\hat{p}(\xi)$ ,  $\hat{v}(\xi)$  — частные решения задачи, которые легко находятся благодаря специальному виду правых частей в уравнениях (2.2). Полагая там все искомые функции зависящими только от  $\xi$ , найдем

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(\xi) &= \hat{v}(\xi) / \sin \theta \cos \theta, \\ \hat{u}(\xi) &= -\hat{v}(\xi) \operatorname{tg} \theta, \quad \hat{p}(\xi) = \hat{v}(\xi) \operatorname{tg} \theta + v_p(\xi) \operatorname{tg} \theta / u_0, \\ \hat{v}(\xi) &= \frac{(\gamma - 1)(e_p - e_{p0}) \operatorname{ctg} \theta + \gamma u_0 v_p}{[(M \sin \theta)^{-2} - 1] u_0^2},\end{aligned}$$

где  $e_{p0} = c_s T_0 + u_0^2 / 2$ .

Используя условия на ударной волне, выразим  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  через одну функцию:

$$(2.3) \quad \begin{aligned}\tilde{p} &= \Phi(\Psi_-) + \lambda_1 \Phi(\lambda_2 \Psi_+) + \hat{p}(\xi) + C, \\ \tilde{v} &= \omega(\Phi(\Psi_-) - \lambda_1 \Phi(\lambda_2 \Psi_+)) + \hat{v}(\xi) - \omega C,\end{aligned}$$

где  $\lambda_1 = (\omega n - 1) / (\omega n + 1)$ ;  $\lambda_2 = (1 - \omega \operatorname{tg} \theta) / (1 + \omega \operatorname{tg} \theta)$ ;  $C = [nv(0) - \hat{p}(0)] / (1 + \omega n)$ . В области  $D_2$  решения для возмущений  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{v}$  представляются в виде

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \varphi_1(\Psi_+) + \varphi_2(\Psi_-) + \hat{p}(\xi) + \hat{p}'(\xi'), \\ \tilde{v} &= \omega(\varphi_2(\Psi_-) - \varphi_1(\Psi_+)) + \hat{v}(\xi) + \hat{v}'(\xi'),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\hat{p}'(\xi') &= -\hat{v}' \operatorname{tg} \theta - v_p' \operatorname{tg} \theta / u_0; \\ \hat{v}'(\xi') &= -\frac{(\gamma - 1)(e_p' - e_{p0}') \operatorname{ctg} \theta - \gamma u_0 v_p'}{[(M \sin \theta)^{-2} - 1] u_0^2}.\end{aligned}$$

Из условия непротекания на поверхности клина можно выразить  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  через одну функцию:

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \varphi(\Psi_+) + \varphi(\Psi_-) + \hat{p}(\xi) + \hat{p}'(\xi'), \\ \tilde{v} &= \omega(\varphi(\Psi_-) - \varphi(\Psi_+)) + \hat{v}(\xi) + \hat{v}'(\xi').\end{aligned}$$

Сшивая функции, определенные в областях  $D_1$  и  $D_2$  на линии  $y = y_s^*(x)$ , получим следующие функциональные уравнения:

$$(2.4) \quad \begin{aligned}\varphi(t) &= \Phi(t) - [\omega \hat{p}'(\xi_+) + \hat{v}'(\xi_+)] / 2\omega, \\ \Phi(t) - \lambda_1 \Phi(\lambda_2 t) &= C + (\hat{p}'(\xi_-) - \hat{p}'(\xi_+)) / 2 + (\hat{v}'(\xi_-) + \hat{v}'(\xi_+)) / 2\omega, \\ \omega \xi_{\pm} &= \pm t + x_{\pm} (\omega \operatorname{tg} \theta \mp 1), \quad x_{\pm} \pm \omega y_s^*(x_{\pm}) - t = 0.\end{aligned}$$

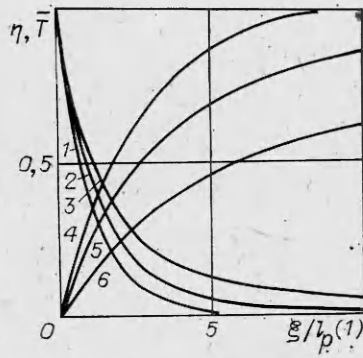
Если частицы прилипают к поверхности клина, то решение (2.3) справедливо во всей области течения. В этом случае определяющее функциональное уравнение имеет обычный для теории возмущения вид [1, 2]

$$(2.5) \quad \Phi_0(x) - \lambda_1 \Phi_0(\lambda_2 x) = C - \hat{v}(x \operatorname{tg} \theta) / \omega,$$

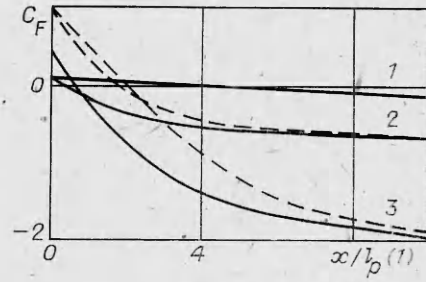
где индекс 0 отличает случай неупругого соударения.

Таким образом, решение задачи о взаимодействии акустических возмущений с облаком частиц при сверхзвуковом обтекании клина сводится к решению функциональных уравнений (2.4), (2.5) (это сделано численными методами).

3. Для некоторых модельных законов сопротивления и теплообмена интегралы, фигурирующие в выражениях (1.4) и (1.7), могут быть вычис-



Ф и г. 2



Ф и г. 3

лены точно [7]. В численных расчетах полагали, следуя [9], коэффициенты сопротивления и теплообмена равными

$$C_D(\bar{Re}, \bar{M}) = C_D^0 (1 - 0,45 M + 4,84 M^2 - 9,73 M^3 + 6,94 M^4) / (1 + 1,2 M C_D^0)^{1/2},$$

$$Nu(\bar{Re}, \bar{M}) = Nu^0 / [1 + 3,42 \bar{M} Nu^0 / \bar{Re} Pr], \quad Nu^0 = 2 + 0,459 \bar{Re}^{0,55} Pr^{0,33},$$

$$C_D^0 = 21,1 / Re + 6,3 / \sqrt{\bar{Re}} + 0,25.$$

На фиг. 2 приведены результаты расчетов, иллюстрирующие влияние  $Re_0$  на динамическую (кривые 1—3) и тепловую (кривые 4—6) релаксацию частиц за косым скачком уплотнения. По оси ординат отложены функция  $\eta(\xi)$  (кривые 1—3) и приведенная температура  $\bar{T} = (T_p - T_\infty) / (T_0 - T_\infty)$  (кривые 4—6). Расчеты выполнены при  $c_p/c_s = 0,46$ ,  $Pr = 0,65$ ,  $M_\infty = 1,7$ ,  $\alpha = 15^\circ$ . Кривые 1—3 (4—6) соответствуют  $Re_0 = 10^0, 10^2, 10^3$ . В качестве характерной длины здесь выбран параметр  $l_p(1) = 4\rho_s d_p / 3\rho_0 C_D(Re_0, M_0)$ .

Для нахождения функции  $\Phi(t)$  (или  $\Phi_0(x)$ ) решение соответствующего уравнения представлялось в виде [1]

$$(3.1) \quad \Phi(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda_1^h Q(\lambda_2^h t),$$

где  $Q$  — правая часть уравнения (2.4) (или (2.5)). Известно, что коэффициент отражения возмущений от скачка уплотнения  $\lambda_1$  имеет малое значение всюду, кроме особых точек, в окрестности которых  $M \rightarrow 1$ . Подробно этот вопрос исследован в [1]. При  $\lambda_1 \ll 1$  для нахождения решения с требуемой точностью достаточно удержать лишь несколько членов ряда (3.1) (легко проверить, что  $Q$  — всюду ограниченная функция). Для контроля точности расчетов использовались асимптотические формулы, справедливые при отражении частиц и в случае их прилипания:

$$(3.2) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{\theta} = \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_0 = m \hat{v}(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{p}(x, 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{p}_0(x, 0) = (n - \operatorname{tg} \theta) \hat{v}(0) + \sin \theta \sin \alpha / \cos(\theta + \alpha),$$

$$\hat{v}(0) = [(\gamma - 1)(e_{p\infty} - e_{p0}) \operatorname{ctg} \theta - \gamma u_0 q_\infty \sin \alpha] / ((M \sin \theta)^{-2} - 1) u_0^2,$$

$$e_{p\infty} = c_s T_\infty + q_\infty^2 / 2.$$

Плотность осевой компоненты силы, действующей на симметричный клин в сверхзвуковом потоке газовой среды, определяли по формуле

$$(F - F_0) / 2 = -p_n \sin \alpha + p_\tau \cos \alpha,$$

где  $F_0$  — плотность силы при  $\rho_p = 0$ ;  $p_n$ ,  $p_\tau$  — компоненты тензора напряжений. Согласно закону сохранения импульса частиц, имеем:

а) при упругом отражении

$$p_n = -(\delta_0 \rho_0 u_0^2) \tilde{p} - 2\rho_p v_p^2, \quad p_\tau = 0;$$

б) при полном поглощении импульса частиц поверхностью

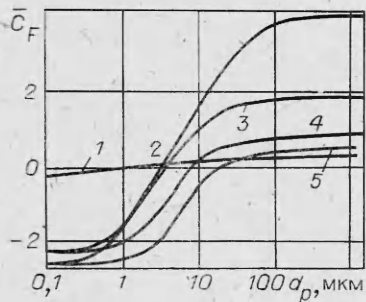
$$p_n = -(\delta_0 \rho_0 u_0^2) \tilde{p}_0 - \rho_p v_p^2, \quad p_\tau = -\rho_p u_p v_p.$$

На фиг. 3 представлены результаты расчета плотности силы в случае «а» — сплошные линии, «б» — штриховые. Для удобства рассмотрения по оси ординат отложена безразмерная величина  $C_F = (F - F_0)/(2\delta_0 \rho_0 u_0^2)$ .

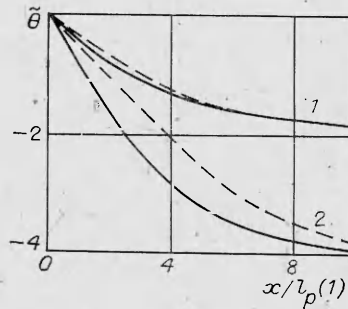
Расчеты выполнены при  $Re_0 = 10$ ,  $Pr = 0,65$ ,  $c_p/c_s = 0,46$ ; кривые 1 —  $\alpha = 15^\circ$ ,  $M_\infty = 2,6$ ; 2 —  $\alpha = 15^\circ$ ,  $M_\infty = 1,7$ ; 3 —  $\alpha = 30^\circ$ ,  $M_\infty = 2,6$ . Видно, что с увеличением расстояния от передней кромки плотность силы убывает вплоть до значения, определяемого из (3.2). Величина силы в случае неупругого соударения превосходит значение при упругом ударе, что обусловлено вкладом тангенциальной компоненты импульса частиц. Очевидно, наличие примеси частиц в сверхзвуковом потоке может приводить к увеличению и уменьшению действующих сил в зависимости от линейного размера клина  $L$ . Так, при  $L \leq l_p(1)$  растет сопротивление при обтекании газозвесью, тогда как при  $L \gg l_p(1)$  оно падает. Этот результат не является неожиданным, хотя и противоречит интуитивному представлению о происхождении сопротивления в потоке частиц. При  $L \gg l_p(1)$  двухфазное течение является почти равновесным, и в этих условиях роль частиц сводится к изменению теплофизических параметров двухфазной смеси. Например,  $\tilde{\gamma} = (c_p + \delta_0 c_s)/(c_v + \delta_0 c_s) \approx \gamma[1 + \delta_0(1 - \gamma)c_s/c_p]$ , т. е. эффективный показатель адиабаты уменьшается в присутствии частиц. Взаимодействие многих факторов приводит к падению давления за скачком уплотнения в запыленном газе по сравнению с чистым газом для данных условий обтекания (см. [3, 4]).

Средний коэффициент сопротивления в потоке частиц:  $\bar{C}_F = \int_0^L C_F dx/L$ . Были выполнены расчеты зависимостей  $\bar{C}_F(d_p)$  для различ-

ных чисел Маха набегающего потока, углов раствора клина, для двух механизмов передачи импульса (упругий и неупругий удар). Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 4. Кривые 1, 4, 5 (упругий удар) соответствуют  $M_\infty = 2,6$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ;  $M_\infty = 2,6$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ;  $M_\infty = 1,7$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ; кривые 2, 3 (неупругий удар) —  $M_\infty = 1,7$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ;  $M_\infty = 2,6$ ,  $\alpha = 30^\circ$ . Видно, что имеется два участка автомодельности относительно размера частиц в зависимостях  $\bar{C}_F(d_p)$ . Образует безразмерный параметр (число Стокса)  $Sk = l_p(1)/L$ . При условии  $Sk \ll 1$  имеем почти равновесный поток и сила сопротивления уменьшается из-за падения давления за скачком уплотнения (левый автомодельный участок на кривой  $\bar{C}_F(d_p)$ ). Напротив, при  $Sk \gg 1$  сила сопротивления в основном определяется потоком импульса частиц на обтекаемой поверхности (правый автомодельный



Фиг. 4



Фиг. 5



участок на кривой  $\bar{C}_F(d_p)$ ). Аналогичное поведение сопротивления клина в дозвуковом потоке газозвеси обнаружено в экспериментах [11].

Исследовалось влияние отраженных частиц на величину возмущения угла наклона ударной волны. На фиг. 5 показаны результаты расчетов величины  $\tilde{\theta}$  в зависимости от расстояния до носика клина. Сплошные линии соответствуют зеркальному отражению, штриховые — прилипанию частиц. Расчеты выполнены при  $Re_0 = 10$ ,  $Pr = 0,65$ ,  $c_p/c_s = 0,46$ ; кривые 1 —  $\alpha = 15^\circ$ ,  $M_\infty = 1,7$ ; 2 —  $\alpha = 30^\circ$ ,  $M_\infty = 2,6$ . Из фиг. 5 видно, что у носика клина (при  $x \approx l_p(1)$ ) неравновесность течения в присутствии отраженных частиц усиливается, однако при малых углах раствора клина эффект незначительный. На большом удалении от носика клина оба сравниваемых течения приходят к одному состоянию, что непосредственно следует из асимптотических формул (3.2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959.
2. Лунев В. В. Обтекание клина гиперзвуковым потоком излучающего газа. — ПМТФ, 1960, № 2.
3. Ткаленко Р. А. К линейной теории сверхзвуковых течений смеси газа и частиц. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 1.
4. Салтанов Г. А., Ткаленко Р. А. Обтекание клина сверхзвуковым двухфазным потоком. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 2.
5. Салтанов Г. А., Куршаков А. В. Движение частиц за косым скачком уплотнения при обтекании клина сверхзвуковым двухфазным потоком. — Изв. АН СССР. Энергетика и трансп., 1971, № 1.
6. Салтанов Г. А. Взаимодействие частиц с поверхностью обтекаемого клина. — Изв. АН СССР. — Там же.
7. Трунев А. П., Фомин В. М. Обтекание тел двухфазным потоком типа газ — твердые частицы с учетом эрозии. — ПМТФ, 1983, № 1.
8. Crowe C. T., Pratt D. T. Analysis of the flow field in cyclon separators. — Computers and Fluids, 1974, v. 2, p. 249.
9. Яненко Н. Н., Солоухин Р. И., Папырин А. П., Фомин В. М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука, 1980.
10. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
11. Баланин Б. А., Лашков В. А. Сопротивление плоского клина в двухфазном потоке. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 2.

Поступила 19/III 1984 г.

УДК 532.5 + 533.95

### О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ФРОНТА АБЛЯЦИИ ПРИ АБЛЯЦИОННОМ УСКОРЕНИИ СЛОЯ

Н. А. Иногамов

(Москва)

1. К настоящему времени опубликовано значительное число работ, посвященных неустойчивости фронта абляции (ФА) при ускорении слоя абляционным давлением [1—13]. В [4, 5] численно исследуется задача Коши, линеаризованная около нестационарного течения, которое находится численным расчетом, в [6, 7] — численный расчет задачи Коши, линеаризованной около стационарного течения. Стационарное решение находится численным интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений. По поводу работ [6, 7] необходимо существенное замечание. Покажем, что имеется одна особенность стационарного решения в поле тяжести, которая делает непригодными результаты [6, 7], относящиеся к учету сжимаемости холодного вещества и длинноволновым возмущениям. Рассмотрим стационарное решение в области, заполненной холодным веществом. В этой области в окрестности ФА течение дозвуковое ( $M \ll 1$ ). При наличии силы тяжести число Маха  $M = v/c$  в дозвуковом течении монотонно возрастает при удалении от ФА в холодное вещество на некотором расстоянии  $L_1$  от ФА  $M = 1$ . Дело в том, что в холодном веществе электронная теплопроводность мала и соответственно пренебрежимо малы тепловые потоки. Поэтому стационарное течение холодного вещества является изэнтропическим. При дозвуковом в окрестности ФА течении с  $M \ll 1$  из-за действия веса давление в хо-