РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
АВТОМЕТРИЯ

2003, том 39, № 4

УДК 519.216.3

С. Н. Моисеев

(Воронеж)

ПРЕДЕЛЬНОЕ ВРЕМЯ ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ ПРОЦЕССОВ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

Показано, что для оптимального по минимуму среднеквадратической ошибки прогноза процесса скользящего среднего порядка q время предсказуемости может превышать время корреляции в $q\sqrt{2}$ раз при определенном сочетании коэффициентов скользящего среднего.

Введение. Для описания реальных случайных процессов в самых различных областях исследований, в том числе при обработке сигналов и при анализе временных рядов различной физической природы, достаточно широко используется модель линейного процесса скользящего среднего q-го порядка (СС(q)). Связано это с возможностью экономичного с точки зрения количества параметров описания процессом СС(q) практически любого линейного случайного процесса с заданной точностью, развитой техникой подгонки процессов СС(q) к наблюдаемым данным и простотой моделирования этих процессов [1]. Особенно экономичной модель СС(q) оказывается при описании процессов, у которых всего лишь небольшое число значений корреляционной функции можно считать значимо отличными от нуля. В работах [2, 3] для широкого круга линейных процессов было показано, что время предсказуемости τ_{pred} не превосходит сколько-нибудь значительно время корреляции τ_{cor}. В связи с широкой распространенностью в различных приложениях модели процесса СС(q) представляет практический и теоретический интерес подробное исследование соотношения между его временем предсказуемости и временем корреляции.

Цель работы – показать, что для линейных процессов скользящего среднего время предсказуемости может значительно превышать время корреляции, причем это превышение может быть тем значительнее, чем больше порядок q процесса СС(q).

1. **Постановка задачи.** Пусть наблюдаемый случайный процесс y_t, $t \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, является процессом СС$(q)$:

$$y_t = \xi_t - \theta_1 \xi_{t-1} - \ldots - \theta_q \xi_{t-q}, \tag{1}$$

где ξ_t – произвольный белый шум с независимыми в моменты времени t и $t-k$, $k \neq 0$, значениями, имеющий нулевое среднее и дисперсию σ_ξ^2. Процесс СС(q) стационарен без всяких ограничений. Необходимым условием обратимости процесса СС(q) является следующее ограничение на коэффициенты θ_i, $i=\overline{1,q}$, [1]: корни уравнения $1-\theta_1 x - \ldots - \theta_q x^q = 0$ должны лежать вне единичного круга на комплексной плоскости или, что эквивалентно, корни уравнения $x^q - \theta_1 x^{q-1} - \ldots - \theta_q = 0$ должны лежать внутри единичного круга. Обратимость процесса СС(q) означает, что его можно представить в виде процесса авторегрессии бесконечного порядка.

Время корреляции и время предсказуемости определим как характерные времена спадания до нуля нормированной автокорреляционной функции и коэффициента множественной корреляции соответственно.

Необходимо для каждого фиксированного порядка скользящего среднего q подобрать такие коэффициенты θ_i, $i=\overline{1,q}$, чтобы для этого конкретного процесса СС(q) наблюдалось максимальное отношение $\tau_{\text{pred}}/\tau_{\text{cor}}$ в случае линейного прогноза, т. е. максимальное относительное время предсказуемости. Для этого введем следующую функцию:

$$g(q) = \max_{\theta_i,\, i=\overline{1,q}} \{\tau_{\text{pred}}/\tau_{\text{cor}}\}. \tag{2}$$

Функция $g(q)$ характеризует потенциальные возможности линейного прогноза процесса СС(q) для самого лучшего сочетания коэффициентов θ_i, $i=\overline{1,q}$, с точки зрения отношения $\tau_{\text{pred}}/\tau_{\text{cor}}$. Задача заключается в исследовании поведения функции $g(q)$ с ростом q.

2. **Парные и множественные коэффициенты корреляции.** Время корреляции τ_{cor} рассчитывается по значениям нормированной автокорреляционной функции r_k, состоящей из коэффициентов парных корреляций. Для процесса СС(q) функция r_k имеет следующий вид [1]:

$$r_k = \begin{cases} 1, & k=0, \\ \left(-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{i+k}\right) \Big/ \left(1+\sum_{i=1}^{q} \theta_i^2\right), & k=1,2,\ldots,q, \\ 0, & k>q, \end{cases} \tag{3}$$

где $r_k = \mathbf{M}(y_t y_{t+k}) / [\mathbf{M}(y_t^2)\mathbf{M}(y_{t+k}^2)]^{1/2}$; $\mathbf{M}(\cdot)$ – оператор усреднения.

Время предсказуемости τ_{pred} для оптимального линейного прогноза рассчитывается по значениям функции ρ_k, состоящей из последовательности коэффициентов множественной корреляции. Коэффициент множественной корреляции между отсчетом y_{t+k} и p отсчетами $y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t-p+1}$ просто выражается через коэффициенты парной корреляции r_k (3) [4, 5]:

$$\rho_{k(0,\ldots,p-1)} = \sqrt{1-\det\mathbf{R}_k/\det\mathbf{R}}, \tag{4}$$

где $\det\mathbf{R}$ – детерминант матрицы $\mathbf{R}$, $\mathbf{R} = (r_{|i-j|})$, $i,j=\overline{1,p}$, – нормированная корреляционная матрица $p\times p$ отсчетов $y_t, y_{t-1}, \ldots, y_{t-p+1}$; $\mathbf{R}_k$ – нормированная корреляционная матрица $(p+1)\times(p+1)$ отсчетов $y_{t+k}, y_t, y_{t-1}, \ldots$ $\ldots, y_{t-p+1}$, которая получается из матрицы $\mathbf{R}$ добавлением сверху строки $(r_k, r_{k+1}, \ldots, r_{k+p-1})$ и слева столбца $(1, r_k, r_{k+1}, \ldots, r_{k+p-1})^{\mathrm{т}}$; т – символ транспонирования.

Процесс СС(q) теоретически нельзя описать марковским процессом конечного порядка, т. е. процессом авторегрессии конечного порядка p. Поэтому для него необходимо полагать $p=\infty$, тем самым выбирая максимальный из всех возможных коэффициентов множественной корреляции:

$$\rho_k = \lim_{p\to\infty} \rho_{k(0,\ldots,p-1)}. \tag{5}$$

В силу того что коэффициент множественной корреляции является частным случаем множественного корреляционного отношения [6, 7], для него справедливы следующие формулы:

$$\rho_{k(0,\ldots,p-1)} = \sigma_{\mathrm{pred}}(k)\big/\sigma_y = \sqrt{1-\sigma_p^2(k)/\sigma_y^2}, \tag{6}$$

где

$$\sigma_y^2 = \mathbf{M}(y_{t+k}^2) = \sigma_\xi^2\left(1+\sum_{i=1}^{q}\theta_i^2\right)$$

– дисперсия процесса y_t;

$$\sigma_{\mathrm{pred}}^2(k) = \mathbf{M}(\hat{y}_{t+k}^2) = \mathbf{M}(y_{t+k}\hat{y}_{t+k})$$

– дисперсия оптимального по минимуму среднего квадрата ошибки (СКО) прогноза $\hat{y}_{t+k}$ на k шагов вперед;

$$\sigma_p^2(k) = \mathbf{M}[(y_{t+k}-\hat{y}_{t+k})^2] = \sigma_y^2 \det\mathbf{R}_k\big/\det\mathbf{R}$$

– СКО оптимального прогноза на k шагов вперед. Из последнего равенства в (6) хорошо видно, что коэффициент множественной корреляции $\rho_{k(0,\ldots,p-1)}$ является наглядной и понятной мерой точности линейного прогноза на k шагов вперед, так как его квадрат совпадает с относительной разностью между дисперсией процесса и СКО прогноза.

3. **Время корреляции и время предсказуемости.** После того как найдены удобные в вычислительном плане формулы для r_k и ρ_k, необходимо определить τ_{cor} и τ_{pred}. Поскольку эти понятия качественные, то решение многих задач будет сильно зависеть от их количественного определения. В работах [8–10] приведено более десятка определений τ_{cor}, которые с помощью введения параметров можно свести всего к двум видам:

$$\tau_{\mathrm{cor}}^{(1)} = \int_0^\infty |R(\tau)|^\alpha d\tau, \quad 0<\alpha<\infty, \tag{7}$$

$$\tau_{\mathrm{cor}}^{(2)} = \max\{\tau : |R(\tau)| \ge \varepsilon\}, \quad 0<\varepsilon<1. \tag{8}$$

Для процессов, заданных в дискретные моменты времени $t \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, к которым относятся изучаемые нами процессы СС(q), определения τ_{cor} и τ_{pred}, аналогичные (7) и (8), будут выглядеть следующим образом:

$$\tau_{\text{cor}}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} |r_k|^{\alpha}, \qquad \tau_{\text{pred}}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < \infty, \tag{9}$$

$$\tau_{\text{cor}}^{(2)} = \max\{k\colon |r_k| \geq \varepsilon\}, \qquad \tau_{\text{pred}}^{(2)} = \max\{k\colon \rho_k \geq \varepsilon\}, \qquad 0 < \varepsilon < 1. \tag{10а}$$

Для вырожденных случаев, когда $\tau_{\text{cor}}^{(2)} = 0$, $\tau_{\text{pred}}^{(2)} \neq 0$, будем использовать несколько видоизмененный вариант определений (10а):

$$\tau_{\text{cor}}^{(2)} = \max\{\tau : |r(\tau)| \geq \varepsilon\}, \qquad \tau_{\text{pred}}^{(2)} = \max\{\tau : \rho(\tau) \geq \varepsilon\}, \qquad 0 < \varepsilon < 1, \tag{10б}$$

где функции $r(\tau)$ и $\rho(\tau)$ в непрерывном времени получаются соответственно из функций r_k и ρ_k в дискретном времени их линейной интерполяцией между соседними значениями.

4. **Максимальное относительное время предсказуемости.** Для определений (9) функция $g(q)$ (2) находится аналитически. Анализ формул (9) и выражений для r_k и ρ_k показывает, что максимальное значение отношения $\tau_{\text{pred}}^{(1)} / \tau_{\text{cor}}^{(1)}$ достигается при следующих коэффициентах скользящего среднего:

$$\theta_i = 0, \qquad i = \overline{1, q-1}, \qquad |\theta_q| = 1. \tag{11}$$

Фактически выбор такого крайнего сочетания коэффициентов (11) приводит к вырождению модели СС(q) в модель СС(1), так как процесс СС(q) последовательности (1) процесса y_t, набранной через единичный шаг, становится эквивалентным процессу СС(1) последовательности, набранной через шаг q:

$$y_t = \xi_t - \theta_q \xi_{t-q}. \tag{12}$$

Для процесса (12) автокорреляционная функция будет иметь единственное отличное от нуля значение, а коэффициент множественной корреляции – q отличных от нуля значений:

$$r_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ r_q, & k = q, \\ 0, & k \neq q; \end{cases} \qquad \rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ \rho_q, & k = 1, 2, \ldots, q, \\ 0, & k > q. \end{cases} \tag{13}$$

При этом

$$r_q = -\theta_q / (1 + \theta_q^2), \qquad \rho_{q(0,\ldots,p-1)} = |\theta_q| \sqrt{(\theta_q^{2p} - 1)/(\theta_q^{2p+2} - 1)} \Big/ \sqrt{1 + \theta_q^2}.$$

Подставляя $\rho_{q(0,\ldots,p-1)}$ в формулу (5), получаем

$$\rho_q = \begin{cases} |\theta_q| \big/ \sqrt{1+\theta_q^2}, & |\theta_q|<1, \\ 1 \big/ \sqrt{1+\theta_q^2}, & |\theta_q| \geq 1. \end{cases}$$

Следовательно, для процесса (12) будут справедливы следующие формулы:

$$\tau_{\text{cor}}^{(1)} = |r_q|^{\alpha}, \qquad \tau_{\text{pred}}^{(1)} = q\rho_q^{\alpha}, \qquad 0<\alpha<\infty.$$

При $|\theta_q|=1$ достигается максимум для $|r_q|$ и ρ_q:

$$\max_{\theta_q} |r_q| = 1/2, \qquad \max_{\theta_q} \rho_q = 1/\sqrt{2}.$$

Легко проверить, что при $|\theta_q|=1$ достигается максимум и для отношения $\tau_{\text{pred}}^{(1)} / \tau_{\text{cor}}^{(1)}$. Поэтому

$$g(q) = 2^{\alpha/2} q. \tag{14}$$

Таким образом, максимальное отношение $\tau_{\text{pred}}^{(1)} / \tau_{\text{cor}}^{(1)}$ для процессов СС(q) превышает порядок скользящего среднего q в $2^{\alpha/2}$ раза, т. е. согласно терминологии работы [11] горизонтом предсказуемости для процессов СС(q) является величина $2^{\alpha/2} q \tau_{\text{cor}}$.

Рис. 1 иллюстрирует этот вывод для процесса СС(5) при $\theta_i = 0, i=\overline{1,4}$, $\theta_5 = -1$. На рисунке кружками, соединенными для наглядности прямыми линиями, приведены значения нормированной автокорреляционной функции r_k в зависимости от задержки k. Квадратикам, соединенным прямыми линиями, соответствуют значения коэффициента множественной корреляции ρ_k. Для рис. 1 при $\alpha = 1$ в (9) $\tau_{\text{cor}}^{(1)} = 1/2$, $\tau_{\text{pred}}^{(1)} = 5/\sqrt{2}$, $g(5) = 5\sqrt{2}$.

Для определений τ_{cor} и τ_{pred} (10) функция $g(q)$ сильно зависит от уровня ε: чем меньше ε, тем меньше $g(q)$. На практике обычно выбирают такое максимальное ε, при котором еще можно пренебречь значениями $|R(\tau)|<\varepsilon$, т. е. принять их равными нулю. Во многих практических задачах можно прене-

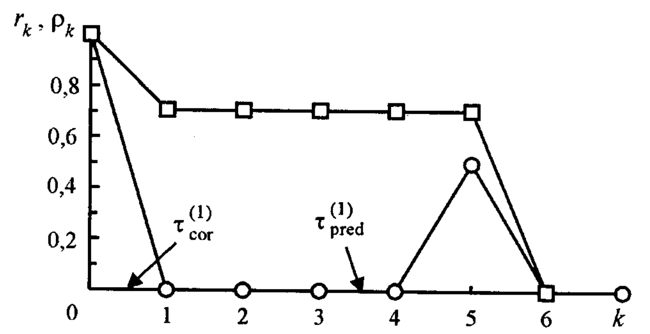

Рис. 1. Корреляционная функция и коэффициент множественной корреляции СС(5)

бречь значениями функции $R(\tau)$, если они по модулю меньше примерно уровня 0,3. Поэтому положим

$$\varepsilon = \exp(-1) \approx 0{,}368. \tag{15}$$

Для максимизации функции $g(q)$, рассчитываемой по определениям (10), в первую очередь необходимо минимизировать величину $\tau_{\text{cor}}^{(2)}$. Это легко достигается при выборе такого сочетания коэффициентов θ_i, $i=\overline{1,q}$, процесса СС(q), при котором будут выполняться следующие соотношения:

$$r_1 = -(\varepsilon - 0), \qquad |r_k| < \varepsilon, \quad k > 1, \tag{16}$$

где значение $(\varepsilon - 0)$ на бесконечно малую величину меньше ε. Первое равенство в (16) может быть выполнено не для всех ε. Так, для процесса СС(1) $\min\limits_{\theta_1} r_1 = -1/2$ при $\theta_1 = 1$, и (16) может быть удовлетворено только для $0 < \varepsilon \le 1/2$. Однако с ростом q ограничения на возможные значения ε быстро ослабевают. Так, уже для процесса СС(2) $\min\limits_{\theta_1,\,\theta_2} r_1 = -1/\sqrt{2}$ при $\theta_1 = \sqrt{2}$, $\theta_2 = -1$, и равенство (16) может быть удовлетворено уже для $0 < \varepsilon \le 1/\sqrt{2} = 0{,}707\ldots$.
При выполнении соотношений (16) согласно (10б) будем иметь

$$\tau_{\text{cor}}^{(2)} = (1-\varepsilon)/(1+\varepsilon).$$

Максимизация $\tau_{\text{pred}}^{(2)}$ процесса СС(q) заключается в максимизации величины ρ_q. Максимум величины ρ_q достигается при выполнении условий

$$r_i = (-1)^i(\varepsilon - 0), \qquad i = 1, 2, \ldots . \tag{17}$$

При выполнении (17) выполняются также условия (16). Поэтому условия (17) являются идеальными для достижения максимума отношения $\tau_{\text{pred}}^{(2)}/\tau_{\text{cor}}^{(2)}$. К сожалению, не для всех ε и q условия (17) можно выполнить в полной мере. Однако, если выполнены условия (16) и $0 < \varepsilon \le 1/2$, всегда можно подобрать коэффициенты θ_i, $i=\overline{1,q}$, при которых будет справедливо неравенство $\rho_q \ge \varepsilon$. В этом случае

$$\tau_{\text{pred}}^{(2)} = q + 1 - \varepsilon/\rho_q$$

и максимальное отношение $\tau_{\text{pred}}^{(2)}/\tau_{\text{cor}}^{(2)}$ можно представить в виде

$$g(q) = q(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon) + b_\varepsilon, \tag{18}$$

где $0 \le b_\varepsilon < 1$, $b_\varepsilon = (1+\varepsilon)(1-\varepsilon/\rho_q)/(1-\varepsilon)$.

Таким образом, максимальное отношение $\tau_{\text{pred}}^{(2)}/\tau_{\text{cor}}^{(2)}$ для процессов СС(q) превышает порядок скользящего среднего q, как минимум, в $(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ раз при $0 < \varepsilon \le 1/2$. Рис. 2 иллюстрирует этот вывод для процесса

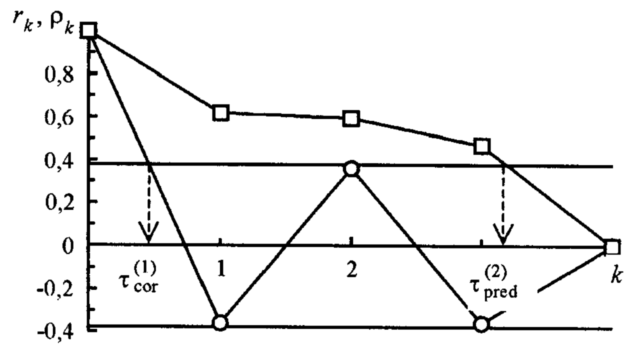

Рис. 2. Корреляционная функция и коэффициент множественной корреляции СС(3)

СС(3) при $\theta_1 = 0{,}2166$, $\theta_2 = -0{,}4669$, $\theta_3 = 0{,}596$. На этом рисунке кружками отмечены значения нормированной автокорреляционной функции r_k в зависимости от задержки k, а квадратиками – значения коэффициента множественной корреляции ρ_k. Кружки, соединенные линиями, дают функцию $r(\tau)$, а квадратики, соединенные линиями, – функцию $\rho(\tau)$. Горизонтальными линиями на рис. 2 показаны уровни $\pm\varepsilon$ (15). Здесь хорошо видно, что $\tau_{pred}^{(2)}$ ($\tau_{pred}^{(2)} = 3{,}214$) значительно превосходит $\tau_{cor}^{(2)}$ ($\tau_{cor}^{(2)} = 0{,}462$), $g(3) = 6{,}96$.

Рис. 2 интересен тем, что для $\varepsilon = \exp(-1)$ значение $q = 3$ – это максимальное q, при котором выполняются идеальные условия (17). Для $q > 3$ не существует набора коэффициентов θ_i, $i = \overline{1, q}$, при которых в полной мере выполнены условия (17). Отметим также, что для процесса СС(3) существуют четыре набора коэффициентов, приводящих к одной и той же автокорреляционной функции (см. рис. 2), т. е. для которых выполняются условия (17). Однако приведенный выше набор для θ_i, $i = 1,2,3,$ – единственный, соответствующий обратимой модели СС(3).

Сравнение функции $g(q)$ (14) при $\alpha = 1$, полученной для определений (9), с функцией $g(q)$ (18), полученной для определений (10б) при разумных ε, показывает, что для всех q функция (18) значительно превосходит функцию (14). Следовательно, универсальные определения τ_{cor}, τ_{pred} (10) при разумных значениях уровня ε приводят к значительно большим (в несколько раз, как минимум) значениям функции $g(q)$, чем универсальные определения (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бокс Дж., Дженкинс Г.** Анализ временных рядов, прогноз и управление. М.: Мир, 1974. Вып.1.
2. **Аносов О. Л., Бутковский О. Я., Кравцов Ю. А.** Пределы предсказуемости для линейных авторегрессионных моделей // Радиотехника и электроника. 1995. **40**, № 12. С. 1886.
3. **Anosov O. L., Butkovskii O. Yu., Kravtsov Yu. A., Protopopescu V. A.** Predictability of linear and nonlinear autoregressive models // Phys. of Vibrations. 1999. **7**, N 2. P. 61.
4. **Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.** Прикладная статистика. Исследование зависимостей. М.: Финансы и статистика, 1985.

5. **Коваленко И. Н., Филиппова А. А.** Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1973.
6. **Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.** Математическая статистика. М.: Высш. шк., 1984.
7. **Моисеев С. Н.** Прогноз нелинейных временных рядов через взвешенную сумму одномерных регрессий // Радиотехника и электроника. 1999. **44**, № 6. С. 715.
8. **Тихонов В. И.** Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
9. **Романенко А. Ф., Сергеев Г. А.** Вопросы прикладного анализа случайных процессов. М.: Сов. радио, 1968.
10. **Мирский Г. Я.** Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. М.: Энергоиздат, 1982.
11. **Кравцов Ю. И.** Случайность, детерминированность, предсказуемость // УФН. 1989. **158**, вып. 1. С. 93.

Воронежский государственный университет,
E-mail: mois@rf.phys.vsu.ru

Поступила в редакцию
21 августа 2002 г.