

вполне достаточно для параметрического возбуждения колебаний, что и наблюдается экспериментально. Соотношения (13) и (14) позволяют вычислить коэффициенты демпфирования, которые в данном случае оказываются равными $\delta_1 = 1,5 \text{ 1/с}$, $\delta_2 = 1,5 \cdot 10^7 \text{ 1/(с} \cdot \text{м}^2)$. С использованием этих констант соотношения (12) позволяют построить зависимость амплитуды установившихся колебаний от величины расстройки (см. фиг. 2, кривые 1 — $m = 0,12$, 2 — $m = 0,14$). Выражение (13) определяет зависимость амплитуды установившихся колебаний от мощности протекающего тока при постоянной расстройке ξ_0 (см. сплошную линию на фиг. 3, $\delta_1 = 1,5 \text{ 1/с}$, $\delta_2 = 1,5 \cdot 10^7 \text{ 1/(с} \cdot \text{м}^2)$, $\xi_0 \approx -0,20$).

Сопоставляя теоретические расчеты с экспериментальными данными, приходим к следующему выводу. Принятая теоретическая модель правильно предсказывает возможность термопараметрического возбуждения колебаний струны при протекании по ней переменного электрического тока. Она позволяет с хорошей точностью рассчитать пороги параметрической неустойчивости, зависимость амплитуды установившихся колебаний от мощности протекающего тока и расстройки между частотой изменения температуры и собственной частотой колебаний струны ξ . В то же время она не может предсказать наличие такого существенно нелинейного эффекта, как жесткий режим возбуждения и срыва колебаний. Последнее, по-видимому, связано с наличием особенностей теплообмена колеблющейся струны с окружающим воздухом, которые не описываются уравнением теплопроводности (3). Детальное обсуждение этого вопроса представляет сложную задачу и выходит за рамки данной работы.

Авторы признательны А. И. Весницкому за внимание и интерес к работе, а также Н. Д. Романову за помощь в экспериментальных исследованиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов И. И., Бажанов В. Л., Гольденблатт и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. М.: Машиностроение, 1965.
2. Иверонова В. П., Белянкин А. Г., Мотулевич и др. Физический практикум. М.: Наука, 1967.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961.
4. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979.
5. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956.
6. Ruszel F., Tomezak W. Heat transfer from cylinder to liquid with applied vibration. — Arch. termodyn., 1982, v. 3, N 1.
7. Геммерлинг Г. А. О зависимости внутренней энергии твердого тела от скорости изменения температуры. — ДАН СССР, 1968, т. 180, № 5.
8. Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мпр, 1978.
9. Боголюбов П. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
10. Справочник по машиностроительным материалам/Под ред. Г. И. Погодина-Алексеева (Т. 2. Цветные металлы и их сплавы. Ред. М. А. Бочвар). М.: Машгиз, 1959.
11. Лифшиц Б. Г., Краношин В. С., Линецкий Л. А. Физические свойства металлов и сплавов. М.: Металлургия, 1980.

Поступила 15/VI 1984 г.

УДК 539.3

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. В. НОВИКОВ

(Вологда)

1. Постановка задачи. При рассмотрении эффективных свойств неоднородных материалов обычно переходят к исследованию квазигомогенной среды, обладающей эффективными свойствами, которые зависят от свойств, объемной концентрации и условий контактирования компонентов. Необходимым и достаточным условием перехода к квазигомогенной среде является удовлетворение размера неоднородности l неравенству

$$(1.1) \quad l_0 \ll l \ll L,$$

где l_0 — постоянная кристаллической решетки; L — размер образца.

Эффективные модули упругости C_{ijkl} и податливости S_{ijkl} определяются из уравнений

$$(1.2) \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = S_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle.$$

Здесь угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают осреднение по объему материала:

$$(1.3) \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \int_V \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) dx_1 dx_2 dx_3, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \int_V \int_V \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) dx_1 dx_2 dx_3.$$

При выполнении условий (1.1) для локальных областей (компонентов) справедливо уравнение

$$(1.4) \quad \sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}(\mathbf{r}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{r}), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = S_{ijkl}(\mathbf{r}) \sigma_{kl}(\mathbf{r}),$$

где $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ — локальный тензор напряжений; $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ — локальный тензор деформаций; $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}$ — радиус-вектор.

В общем случае определение эффективных модулей упругости C_{ijkl} сводится к решению уравнений [1]

$$(1.5) \quad C_{ijkl} = C_{ijmn}^{(1)} v_1 A_{mnhl}^{(1)} + C_{ijmn}^{(2)} v_2 A_{mnhl}^{(2)},$$

$$v_1 A_{mnhl}^{(1)} + v_2 A_{mnhl}^{(2)} = \frac{1}{2} (\delta_{mk} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{nk}),$$

где δ_{kl} — символ Кронекера; $A_{mnhl}^{(i)}$ — неизвестные тензоры, которые определяются из уравнений

$$\langle \varepsilon_{kl}^{(1)} \rangle = A_{klmn}^{(1)} \langle \varepsilon_{mn} \rangle, \quad \langle \varepsilon_{kl}^{(2)} \rangle = A_{klmn}^{(2)} \langle \varepsilon_{mn} \rangle,$$

где v_i — объемная концентрация i -го компонента, $i = 1, 2$.

Индексы сверху при тензорах и внизу при скалярных величинах указывают, к какому компоненту относится данная величина.

Для определения C_{ijkl} из (1.5) необходима дополнительная информация, так как в систему (1.5) входит три неизвестных (C_{ijkl} , $A_{klmn}^{(1)}$, $A_{klmn}^{(2)}$), а уравнений — два.

Такой информацией для замыкания системы (1.5) может служить информация о структуре композита [2].

В общем случае при хаотическом распределении компонентов в неоднородной среде проблема замыкания уравнения (1.5) аналогична проблеме многих частиц в задачах теории жидкости [3]. Математические трудности, возникающие при замыкании уравнений (1.5), привели к тому, что появилось несколько приближенных методов определения эффективных упругих модулей композитов: вариационный метод [4], статистическая теория упругости и метод случайных функций [5—8], метод самосогласованного поля [9, 10]. С обзорами этих методов можно познакомиться, например, в [8, 11—13].

Ниже определяются формулы для двусторонних оценок упругих модулей, которые позволяют учитывать конкретную структуру неоднородного материала. При определении эффективных упругих характеристик наряду с геометрическим моделированием структуры неоднородного материала используется метод поэтапной квазигомогенизации [14]. Суть данного метода заключается в следующем: вначале выделяется представительный объем неоднородного материала V , а затем объем V разбивается на области и определяются эффективные свойства областей разбиения; считая области разбиения квазигомогенными с известными эффективными свойствами, определяем эффективные свойства всего представительного элемента.

2. Упругие модули. Обозначим операцию осреднения произвольной функции $f(\mathbf{r})$ по координатам x_1, x_2, x_3 :

среднее по сечению $x_k = \text{const}$ объема V , площадь которого равна $S(x_k)$,

$$\{f(\mathbf{r})\}_{S(x_k)} = \frac{1}{S(x_k)} \int_{(D)} f(\mathbf{r}) dx_i dx_j,$$

где D — проекция $S(x_k)$ на координатную плоскость $Ox_i x_j$;

среднее по длине прямой $L(x_i, x_j)$, проходящей через точку с координатами (x_i, x_j) и параллельной оси Ox_k ,

$$\{f(\mathbf{r})\}_{L(x_i, x_j)} = \frac{1}{L(x_i, x_j)} \int_0^L f(\mathbf{r}) dx_k.$$

Потенциальная энергия деформированного тела на единицу объема V

$$U = (1/2V) \langle \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \rangle.$$

Для квазигомогенной среды U можно записать в виде $U = (1/2V) \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \sigma_{ij} \rangle$. При этом для $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ справедливы соотношения (1.2).

Из условия минимума потенциальной энергии следует, что для любых пробных функций $\sigma'_{ij}(\mathbf{r})$ и $\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r})$, удовлетворяющих тем же граничным условиям, что и $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ и $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$, будет выполняться

$$(2.1) \quad U' \geq U, \quad U' = \frac{1}{2V} \langle \varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) \rangle \langle \sigma'_{ij}(\mathbf{r}) \rangle.$$

Рассмотрим два способа выбора пробных функций $\sigma'_{ij}(\mathbf{r})$ и $\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r})$, которые на основе неравенства (2.1) позволяют определить верхнюю и нижнюю границы эффективных модулей упругости C_{ijkl} .

Первый способ. Пробную функцию $\sigma'_{ij}(\mathbf{r})$ подберем таким образом, чтобы выполнялось

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} \{ \sigma'_{ij}(\mathbf{r}) \}_S = 0,$$

т. е. осредненный по сечению тензор напряжений $\sigma'_{ij}(\mathbf{r})$ не зависит от координат x_k . Здесь S — площадь проекции представительного объема V на плоскость $Ox_i x_j$.

Если учесть, что в общем случае выполняется

$$\{ \sigma'_{ij}(\mathbf{r}) \}_S = \{ C_{ijkl}(\mathbf{r}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) \}_S,$$

то можно записать

$$(2.3) \quad \{ \sigma'_{ij}(\mathbf{r}) \}_S = H_{ijkl}(x_k) \{ \varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) \}_S,$$

где $H_{ijkl}(x_k)$ — тензор модуля упругости слоя толщиной dx_k , расположенного перпендикулярно оси Ox_k :

$$(2.4) \quad H_{ijkl}(x_k) = C_{ijkl}^{(2)} I_{mnkl} + \bar{S}_1(x_k) (C_{ijkl}^{(1)} - C_{ijkl}^{(2)}) A_{mnkl}^{(1)}(x_k),$$

где $S_1(x_k)$ — площадь сечения представительного объема V плоскостью $x_k = \text{const}$, занятая первым компонентом; $\bar{S}_1(x_k) = S_1(x_k)/S(x_k)$; $S(x_k) = S_1(x_k) + S_2(x_k)$; $I_{mnkl} = (1/2)(\delta_{mk} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{nk})$.

Тензор $A_{mnkl}^{(1)}(x_k)$ определяется из соотношений

$$\{ \varepsilon_{kl}^{(1)}(\mathbf{r}) \}_{S_1} = A_{klmn}^{(1)}(x_k) \{ \varepsilon_{mn}(\mathbf{r}) \}_S.$$

Умножая уравнение (2.3) на обратный тензор $[H_{ijkl}(x_k)]^{-1}$, а затем осредняя по переменной x_k с учетом (2.2), получим

$$(2.5) \quad \langle \varepsilon_{kl} \rangle = \{ [H_{ijkl}(x_k)]^{-1} \}_L \langle \sigma'_{ij} \rangle,$$

где L — длина проекции представительного объема V вдоль оси Ox_k .

Согласно неравенству (2.1), определим верхнюю границу для C_{ijkl} :

$$(2.6) \quad \{ [[H_{ijkl}(x_k)]^{-1}]_L \}^{-1} \leq C_{ijkl}$$

Второй способ. Теперь пробную функцию $\varepsilon'(\mathbf{r})$ подберем таким образом, чтобы выполнялось

$$(2.7) \quad \frac{\partial}{\partial x_l} \{ \varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) \}_L = 0,$$

т. е. деформация призмы длины L с площадью основания $dx_i dx_j$ постоянна (не зависит от координат x_i, x_j).

Учитывая, что

$$\{ \varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) \}_L = \{ S_{ijkl}(\mathbf{r}) \sigma_{kl}(\mathbf{r}) \}_L,$$

на основе линейности задачи запишем

$$(2.8) \quad \{ \varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) \}_L = M_{ijkl}(x_i, x_j) \{ \sigma_{kl}(\mathbf{r}) \}_L,$$

$M_{ijkl}(x_i, x_j)$ — тензор податливости призмы длины L с площадью основания $dx_i dx_j$, равный

$$(2.9) \quad M_{ijkl}(x_i, x_j) = S_{ijkl}^{(2)} I_{mnkl} + \bar{L}_1(x_i, x_j) (S_{ijkl}^{(1)} - S_{ijkl}^{(2)}) B_{mnkl}^{(1)}(x_i, x_j),$$

где $\bar{L}_1(x_i, x_j)$ — длина прямой, проходящей параллельно оси Ox_k через представитель-

ный объем V по первому компоненту; $\bar{L}_1(x_i, x_j) = L_1(x_i, x_j)/L(x_i, x_j)$; $L(x_i, x_j) = -L_1(x_i, x_j) + L_2(x_i, x_j)$.

Тензор $B_{mnhl}^{(i)}(x_i, x_j)$ определяется из равенства

$$\{\sigma_{mn}^{(1)}(\mathbf{r})\}_{L_1} = B_{mnhl}^{(1)}(x_i, x_j) \{\sigma_{kl}(\mathbf{r})\}_L.$$

Формулы (2.3), (2.8) записаны в предположении линейности уравнений упругости.

Умножая уравнение (2.8) на обратный тензор $[M_{ijhl}(x_i, x_j)]^{-1}$, а затем интегрируя по переменным x_i, x_j с учетом (2.7), получим

$$(2.10) \quad \langle \sigma_{hl} \rangle = \{[M_{ijhl}(x_i, x_j)]^{-1}\}_S \langle \epsilon'_{ij} \rangle.$$

На основе неравенства (2.1) с учетом (2.10) определим нижнюю границу для C_{klij} в виде

$$(2.11) \quad C_{ijkl} \geq \{[M_{ijhl}(x_i, x_j)]^{-1}\}_S.$$

Объединяя неравенства (2.6) и (2.11), имеем

$$(2.12) \quad \{[M_{ijhl}(x_i, x_j)]^{-1}\}_S \leq C_{ijkl} \leq \{[H_{ijhl}(x_h)]^{-1}\}_L^{-1}.$$

Если компоненты неоднородного материала изотропны и однородны, то тензор модуля упругости C_{ijkl} и податливости S_{ijkl} можно представить в виде суммы объемной и девнаторной составляющих:

$$C_{ijkl} = 3KV_{ijkl} + 2\mu D_{ijkl}, \\ S_{ijkl} = (1/3K)V_{ijkl} + (1/2\mu)D_{ijkl},$$

где V_{ijkl} и D_{ijkl} — объемная и девнаторная части единичного тензора четвертого ранга

$$V_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad D_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right)$$

(K — объемный, а μ — сдвиговый модули упругости).

Так как потенциальную энергию упругого тела можно представить в виде суммы потенциальной энергии всестороннего сжатия и потенциальной энергии чистого сдвига, то неравенства (2.12) будут справедливы отдельно для объемной и девнаторной частей тензора модулей упругости:

$$(2.13) \quad \{K(x_i, x_j)\}_S \leq K \leq \{[K(x_h)]^{-1}\}_L^{-1};$$

$$(2.14) \quad \{\mu(x_i, x_j)\}_S \leq \mu \leq \{[\mu(x_h)]^{-1}\}_L^{-1},$$

где $K(x_i, x_j)$, $\mu(x_i, x_j)$ — объемный и сдвиговый модули соответственно, определяемые из (2.9); $K(x_h)$ и $\mu(x_h)$ — объемный и сдвиговый модули, определяемые из (2.4).

Из (2.9) и (2.4) с учетом принятых допущений (2.2), (2.7) можно получить выражения $K(x_i, x_j)$, $K(x_h)$ и $\mu(x_i, x_j)$, $\mu(x_h)$ в виде

$$(2.15) \quad K(x_i, x_j) = \left(\left\{ \frac{n}{K} \right\}_L - 2 \frac{\langle d \rangle_L \langle P \rangle_L}{\langle KP \rangle_L} \right)^{-1}, \quad \mu(x_i, x_j) = \left\{ \frac{1}{\mu} \right\}_L^{-1};$$

$$(2.16) \quad K(x_h) = \langle KP \rangle_S / \langle P \rangle_S, \quad \mu(x_h) = \langle \mu \rangle_S,$$

где

$$P_i = 6m_i/(3 + 4m_i); \quad d_i = (3 - 2m_i)/(3 + 4m_i); \quad n_i = 9/(3 + 4m_i); \quad m_i = \mu_i/K_i;$$

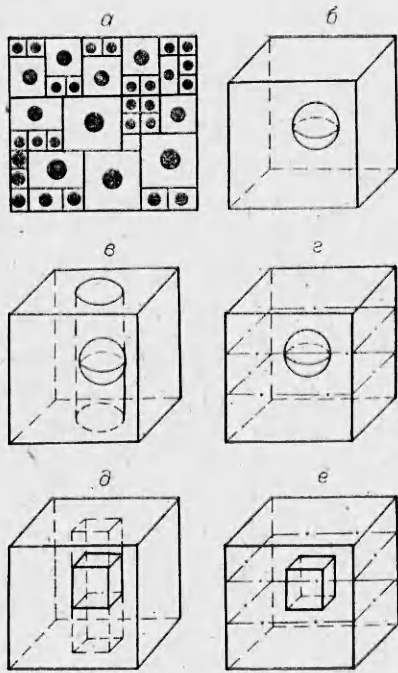
$$\langle f \rangle_L = \bar{L}_1(x_i, x_j)f_1 + \bar{L}_2(x_i, x_j)f_2; \quad \langle f \rangle_S = \bar{S}_1(x_h)f_1 + \bar{S}_2(x_h)f_2;$$

$S_i(x_h)$ — площадь сечения объема V , перпендикулярная оси Ox_h и занятая i -м компонентом ($i = 1, 2$); $S(x_h) = S_1(x_h) + S_2(x_h)$; $\bar{S}_i(x_h) = S_i(x_h)/S(x_h)$; $L_i(x_i, x_j)$ — длина отрезка, проходящего параллельно оси Ox_i по i -му компоненту; $L(x_i, x_j) = -L_1(x_i, x_j) + L_2(x_i, x_j)$; $\bar{L}_i(x_i, x_j) = L_i(x_i, x_j)/L(x_i, x_j)$.

Если $\bar{S}_1(x_h) = v_1$, $\bar{S}_2(x_h) = v_2$, $\bar{L}_1(x_i, x_j) = v_1$, $\bar{L}_2(x_i, x_j) = v_2$, то из (2.13) с учетом (2.15) получим

$$(2.17) \quad \left(\left\langle \frac{n}{K} \right\rangle - 2 \frac{\langle d \rangle \langle P \rangle}{\langle KP \rangle} \right)^{-1} \leq K \leq \frac{\langle KP \rangle}{\langle P \rangle};$$

$$(2.18) \quad \langle 1/\mu \rangle^{-1} \leq \mu \leq \langle \mu \rangle.$$



Фиг. 1

Будем считать, что каждое включение окружено поверхностью S_n , целиком лежащей в матрице и ограничивающей объем V_n так, что $V_1/V_n = v_1$, где V_1 — объем включения (фиг. 1, а). Допускается, что объем V_n имеет форму куба всех размеров (от некоторых конечных до исчезающих малых), так что ими можно заполнить весь объем материала (фиг. 1, б).

Нижняя граница. Элементарную ячейку шар в кубе разобьем на две области: выделим цилиндр, образующие которого параллельны осп Ox_3 , а радиус равен радиусу шара R (фиг. 1, в). В этом случае

$$(3.1) \quad \bar{L}_1(x_i, x_j) = \pi_1 \sqrt{1 - \rho^2}, \quad \bar{L}_2(x_1, x_2) = 1 - \bar{L}_1(x_i, x_j),$$

$$\text{где} \quad \pi_1 = 2(3v_1/4\pi)^{1/3}, \quad \rho^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2, \quad \bar{x}_i = x_i/R.$$

Подставив (3.1) в (2.15), а затем используя выражения для нижней границы в неравенствах (2.13), (2.14), определим вначале свойства цилиндра (объемный κ'_i и сдвиговой γ'_i модули), а затем уже эффективные свойства элементарной ячейки:

$$(3.2) \quad \kappa'_i = 2 \frac{C_2}{\pi_1^2} \ln \frac{P_2}{A_3 \pi_1^2 + A_4 \pi_1 + P_2} - \frac{C_1}{\pi_1} + \frac{C_3}{\pi_1^3} [I_{C_4}(C_5) - I_{C_4}(1 - C_5)];$$

$$(3.3) \quad \gamma' = \frac{2\mu_2}{(t-1)\pi_1} \left\{ 1 - \frac{1}{(t-1)\pi_1} \ln [(t-1)\pi_1 + 1] \right\},$$

где

$$(3.4) \quad A_1 = K_1 P_1 - K_2 P_2, \quad A_2 = K_2 P_2, \quad A_3 = P_1 + P_2 - A, \quad t = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

$$A = \left(\frac{K_2}{K_1} \pi_1 - 2d_1 \right) P_2 + \left(\frac{K_1}{K_2} \pi_1 - 2d_2 \right) P_1, \quad A_4 = A - 2P_2,$$

$$C_1 = A_1/A_3, \quad C_2 = (A_2 A_3 - A_4 A_1)/(2A_3^2), \quad C_3 = (A_4^2 A_1 - A_2 A_3 A_4 -$$

$$- 2A_3 A_5 A_1)/(4A_3^3), \quad C_4 = (A_2 - 4P_1 P_2)/(4A_3 \pi_1^2), \quad C_5 = \frac{A_4}{2A_3 \pi_1}.$$

Когда коэффициенты Пуассона компонентов смеси равны, то (2.17) примет вид (2.19)

$$\langle 1/K \rangle^{-1} \leq K \leq \langle K \rangle.$$

В этом случае (2.18) и (2.19) совпадают с вилкой для K и μ по Фойгту и Ройсу [8].

Необходимо отметить, что отличие полученной вилки для упругих модулей (2.12) от аналогичной оценки границ упругих модулей Хашина — Штрикмана [4] заключается в том, что формулы, входящие в неравенство (2.12), позволяют учитывать более детально микроструктуру неоднородного материала, а следовательно, сузить вилку для K и μ . При этом в нашем случае микронеоднородности могут иметь произвольную форму, обладать анизотропными свойствами и располагаться в объеме случайным образом, что также расширяет возможности применения неравенства (2.12) по сравнению с двусторонними оценками, полученными в предположении строгой периодичности расположения включений правильной формы и изотропности компонентов [15]. В качестве примера использования полученных формул рассмотрим структуру с изолированными включениями.

3. Шар в кубе. Определим верхнюю и нижнюю границы для модулей K и μ с помощью (2.13) и (2.14) для макроскопически однородного и изотропного материала, состоящего из однородной и изотропной матрицы и включений другого компонента сферической формы.

Здесь

$$(3.5) \quad I_b(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{b}} \ln \frac{z - \sqrt{b}}{z + \sqrt{b}}, & b > 0, \\ \frac{1}{z}, & b = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|b|}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{|b|}}, & b < 0. \end{cases}$$

Окончательно получаем нижнюю границу для модулей K' и μ' в виде

$$(3.6) \quad K' = \frac{K_2 P_2 + (\kappa' P' - K_2 P_2) \pi_2}{P_2 + (P' - P_2) \pi_2};$$

$$(3.7) \quad \mu' = \mu_2 + (\gamma' - \mu_2) \pi_2, \quad m' = \frac{\gamma'}{\kappa'}, \quad \pi_2 = \pi^{1/3} \left(\frac{3r_1}{4} \right)^{2/3}.$$

Верхняя граница. В этом случае элементарную ячейку разобьем на две области следующим образом: проведем перпендикулярно оси Ox_3 касательные плоскости к шару (фиг. 1, з). Для области, заключенной между касательными плоскостями, введем обозначения: κ'' — объемный модуль, γ'' — модуль сдвига. При этом

$$(3.8) \quad \bar{S}_1(x_3) = \pi_2 (1 - \bar{x}_3^2), \quad \bar{S}_2(x_3) = 1 - \bar{S}_1(x_3), \quad \bar{x}_3 = x_3/R.$$

Подставляя (3.8) в (2.16), а затем используя выражения для верхней границы неравенств (2.13), (2.14), имеем

$$(3.9) \quad \kappa'' = \left[\frac{B_2}{B_1} - \frac{B_1 B_4 - B_2 B_3}{B_4^2} I_{B_5}(1) \right]^{-1};$$

$$(3.10) \quad \gamma'' = \mu_2 (1 - t) [I_{B_6}(1)]^{-1};$$

$$(3.11) \quad B_1 = P_2 + B_2, \quad B_2 = (P_1 - P_2) \pi_2, \quad B_3 = \pi_2 + t/(1 - t);$$

$$(3.12) \quad B_3 = K_2 P_2 + B_4, \quad B_4 = \pi_2 (K_1 P_1 - K_2 P_2), \quad B_5 = B_3/B_4.$$

Рассматривая область между касательными плоскостями к шару как квазигомогенную с эффективными свойствами κ'' и γ'' , определим эффективные модули K'' и μ'' элементарной ячейки:

$$(3.13) \quad K'' = \left\{ \frac{n_2}{K_2} + \left(\frac{n''}{\kappa''} - \frac{n_2}{K_2} \right) \pi_1 - 2 \frac{[d_2 + (d'' - d_2) \pi_1] [P_2 + (P'' - P_2) \pi_1]}{K_2 P_2 + (\kappa'' P'' - K_2 P_2) \pi_1} \right\}^{-1};$$

$$(3.14) \quad \mu'' = \left(\frac{1 - \pi_1}{\mu_2} + \frac{\pi_1}{\gamma''} \right)^{-1};$$

$$(3.15) \quad n'' = 9/(3 + 4m''), \quad d'' = (3 - 4m'')/(3 + 4m''), \quad P'' = 6m''/(3 + 4m''), \\ m'' = \gamma''/\kappa''.$$

4. Куб в кубе. Заменяем в рассматриваемой выше задаче шары на кубы того же объема. В этом случае элементарная ячейка будет иметь вид, изображенный на фиг. 1, д. Для данной ячейки все вычисления существенно упрощаются.

Нижняя граница. Модули K' и μ' можно определить в виде

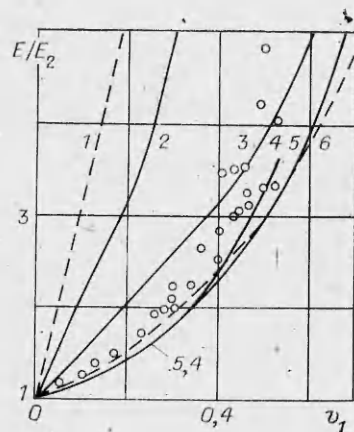
$$(4.1) \quad K' = \frac{K_2 P_2 + (\kappa' P' - K_2 P_2) \alpha^2}{P_2 + (P' - P_2) \alpha^2}, \quad \alpha = v_1^{1/3};$$

$$(4.2) \quad \mu' = \mu_2 + (\gamma' - \mu_2) \alpha^2,$$

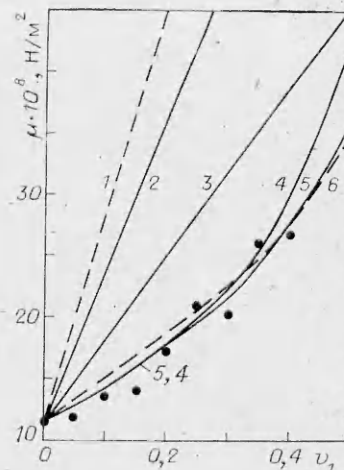
где

$$(4.3) \quad \kappa' = \left\{ \frac{n_2}{K_2} + \left(\frac{n_1}{K_1} - \frac{n_2}{K_2} \right) \alpha - 2 \frac{[d_2 + (d_1 - d_2) \alpha] [P_2 + (P_1 - P_2) \alpha]}{P_2 K_2 + (P_1 K_1 - P_2 K_2) \alpha} \right\}^{-1};$$

$$(4.4) \quad \gamma' = \left(\frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{1 - \alpha}{\mu_2} \right)^{-1}.$$



Ф и г. 2



Ф и г. 3

Верхняя граница. Разбивая элементарную ячейку на области, как указано на фиг. 1, e, можно определить верхнюю границу для объемного K'' и сдвигового μ'' модулей в виде

$$(4.5) \quad K'' = \left\{ \frac{n_2}{K_2} + \left(\frac{n''}{K''} - \frac{n_2}{K_2} \right) \alpha - 2 \frac{[d_2 + (d'' - d_2) \alpha] [P_2 + (P'' - P_2) \alpha]}{P_2 K_2 + (\kappa'' P'' - K_2 P_2) \alpha} \right\}^{-1};$$

$$(4.6) \quad \mu'' = \left(\frac{1 - \alpha}{\mu_2} + \frac{\alpha}{\mu''} \right)^{-1};$$

$$(4.7) \quad \kappa'' = \frac{K_2 P_2 + (K_1 P_1 - K_2 P_2) \alpha^2}{P_2 + (P_1 - P_2) \alpha};$$

$$(4.8) \quad \gamma'' = \mu_2 + (\mu_1 - \mu_0) \alpha^2.$$

5. Сравнение с экспериментальными данными. Настоящая работа близка к подходу Хилла, Хашина — Штрикмана, поэтому работа близка к подходу Хилла, Хашина — Штрикмана, поэтому работа близка к подходу Хилла, Хашина — Штрикмана. На фиг. 2, 3 сравниваются экспериментальные данные с расчетом по формулам (3.2) — (3.15) и (4.1) — (4.8). Экспериментальные точки приведены для системы эпоксидная смола — кварц [16, 17]. Объемная концентрация наполнителя в системе изменяется в диапазоне $0 \leq \nu_1 \leq 0,5$.

Сравнение показывает, что вилка для модулей упругости, рассчитанная на основе моделей шар в кубе (кривые 4, 2) и куб в кубе (кривые 5, 3), более узкая, чем вилка Хашина — Штрикмана [4] (кривые 6, 1). При этом нижние границы для модулей Юнга и сдвига для всех трех схем расчета практически совпадают в диапазоне $0 \leq \nu_1 \leq 0,4$. Наиболее узкая и достаточно хорошо охватывает экспериментальные данные вилка для модулей упругости, полученная на основе модели куб в кубе. Поэтому данную модель и формулы (4.1) — (4.8) можно рекомендовать для расчета систем типа непрерывная матрица — изолированные включения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hill R. Elastic properties of reinforced solid: some theoretical principles. — J. Mech. Phys. Solids, 1963, v. 11, N 5.
2. Дульнев Г. Н., Новиков В. В. Проводимость неоднородных систем. — ИФЖ, 1979, т. 36, № 5.
3. Фиппер И. З. Статистическая теория жидкостей. М.: Физматгиз, 1961.
4. Hashin Z., Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. — J. Mech. Phys., 1962, v. 10, N 4.
5. Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н. К теории упругих свойств поликристаллов. — ЖЭТФ, 1946, т. 16, вып. 11.
6. Хорошун Л. П., Маслов Б. П. Методы автоматизированного расчета физико-механических постоянных композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1980.
7. Волков С. Д., Ставров В. П. Статистическая механика композитных материалов. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1978.
8. Шермергор Т. Д. Теория упругости микрон неоднородных сред. М.: Наука, 1977.
9. Kerner E. H. The elastic and thermoelastic properties of composite media. — Proc. Phys. Soc., 1956, v. B63, N 439B.

10. Канаун С. К. Метод самосогласованного поля в задаче об эффективных свойствах упругого композита. — ПМТФ, 1975, № 4.
11. Композиционные материалы/Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока. М.: Мир, 1978.
12. Иванова В. С., Копьев И. М., Ботвина П. Р., Шермергор Т. Д. Упрочнение металлов волокнами. М.: Наука, 1973.
13. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982.
14. Новиков В. В. Эффективный коэффициент теплового расширения неоднородного материала. — ИФЖ, 1983, т. 44, № 6.
15. Yeh R. H. T. Variational bounds of the elastic moduli of two-phase materials. — J. Appl. Phys., 1971, v. 42, N 3.
16. Tsadi O., Cohen L. J. Elastic properties of filled and porous epoxy composites. — Int. J. Mech. Sci., 1967, v. 9, p. 539.
17. Crowson H. J., Arridge R. G. G. The elastic properties in bulk and shear of a glass bead-reinforced epoxy resin composite. — J. Materials Science, 1977, v. 12, p. 1254.

Поступила 14/VI 1984 г.

УДК 539.874

ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

С. Н. КОСОПУКОВ

(Челябинск)

Вязкопластичность — один из наиболее достоверных и удобных способов учета зависимости прочностных свойств материалов от скорости нагружения [1, 2]. Значительный интерес для практики представляют аналитические решения задач квазистатического нагружения достаточно сложных элементов конструкций, для получения которых удобно линеаризовать основные нелинейные соотношения вязкопластичности.

Данная работа иллюстрирует использование одного из возможных способов линеаризации. Полученные решения для шарнирно-опертых и защемленных кольцевых пластин точно удовлетворяют как кинематическим условиям, так и уравнениям равновесия.

1. Обобщение простейших зависимостей для жестковязкопластического материала приведено в [1] и сводится к динамическому критерию текучести вида

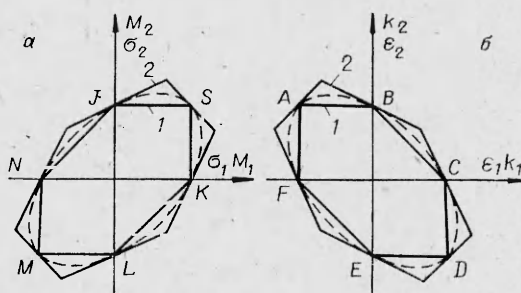
$$(1.1) \quad \sqrt{J_2} = k \left[1 + \Phi^{-1} \left(\frac{\sqrt{I_2}}{\gamma} \right) \right],$$

где k — предел текучести при сдвиге; J_2, I_2 — вторые инварианты девиаторов напряжений и скоростей деформаций; γ — коэффициент, характеризующий отношение вязких и пластических свойств материала; Φ — символ некоторой функции; Φ^{-1} — символ обратной функции.

Ассоциированный закон течения остается в силе. В качестве исходного условия текучести по напряжениям здесь принято нелинейное условие Мизеса. Радиус круговой цилиндрической поверхности текучести в пространстве главных напряжений определяется также нелинейной комбинацией главных скоростей деформаций. Нетрудно видеть, что для плоского напряженного состояния несжимаемого материала точкам, лежащим на эллипсе, подобном эллипсу Мизеса, в плоскости главных напряжений $\sigma_1 - \sigma_2$ соответствуют точки эллипса (фиг. 1) в плоскости главных скоростей деформаций $\epsilon_1 - \epsilon_2$. Для линеаризации исходного нелинейного соотношения достаточно заменить эллипсы некоторыми близкими к ним многоугольниками, сохраняя подобие таких многоугольников при изменении размеров. Например, если заменить эллипс $J_2 = \text{const}$ шестиугольником 1 (фиг. 1, а), подобным шестиугольнику Треска, то, заменяя эллипс $I_2 = \text{const}$ шестиугольником 1 или 2 (фиг. 1, б), для линейной функции Φ получим соответственно, соотношения

$$(1.2) \quad \max(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) = \sigma_T + \mu \max|\epsilon_\gamma|, \quad \max(\sigma_\alpha - \sigma_\beta) = \sigma_T + (1/2)\mu|\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta|,$$

где индексы α, β отвечают максимальным и минимальным значениям величин; ϵ_γ — максимальная по модулю скорость деформации; $\mu = 3k/2\gamma$ — коэффициент вязкости, определяемый экспериментально при одноосном напряженном состоянии.



Фиг. 1