

6. Козлов Б. К., Мологин М. А. О скорости подъема и о гидравлическом сопротивлении газоздушных пузырей в жидкости. Изв. АН СССР, ОНН, Изд-во АН СССР, 1951, № 8, стр. 1188—1197.
7. Angelino H. Hydrodynamique des grosses bulles dans les liquides visqueux. Chem. Eng. Sci., 1966, vol. 21, No. 67, p. 541—550.
8. Van Krevelen D. W., Hofsteyzer P. J. Studies of gas — bubble formation. Calculation of interfacial area in bubble contactors. Chem. Eng. Progr., 1950, vol. 46, No. 1, p. 29—35.
9. Кутателадзе С. С., Стрыкович М. А. Гидравлика газо-жидкостных систем. Госэнергоиздат, 1958.
10. Клинг Г. О динамике образования пузырей при насыщении жидкости под давлением. Сб. «Вопросы физики кипения». «Мир», 1964, стр. 376—402.
11. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.
12. Redfield J. A., Houghton G. Mass transfer and drag coefficient for single bubbles at Reynolds numbers of 0.02—5000. Chem. Eng. Sci., 1965, vol. 20, No. 2, p. 131—139.
13. Красноперов Е. В. Экспериментальная аэродинамика. Часть II. Опытные данные о силах сопротивления тел простейших форм. ОНТИ, 1935, стр. 36—39.
14. Павлов В. В., Попель С. И. Кинетические особенности реакции  $C + O = CO$ , развивающейся на поверхности пузырьков кипящей ванны. Изв. Высп. Учебн. завед. Черная металлургия, 1964, № 6, стр. 5—10.
15. Ладженский Р. М. Исследование движения воздушного пузырька в воде при высоких значениях  $Re$ . Ж. прикл. химии, 1954, т. 27, № 1, стр. 22—32.

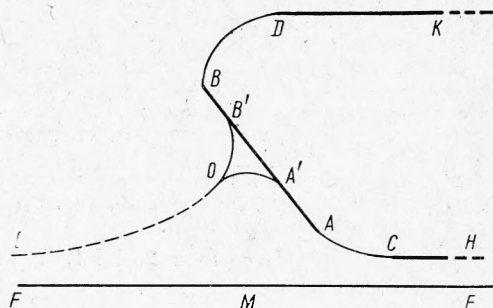
## СТРУЙНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ ВБЛИЗИ СТЕНКИ

Ф. С. Владимиров

(Томск)

Методом С. А. Чаплыгина [1], обобщенным С. В. Фальковичем [2] на случай нескольких характерных скоростей, решена плоская несимметричная задача о струйном обтекании пластинки дозвуковым газовым потоком вблизи твердой стенки. При решении использована схема Жуковского — Рошко [3,4] с застойной зоной перед пластиной [5]. Получены формулы для функции тока, коэффициента нормального давления и геометрических элементов потока. Предельным переходом решение задачи распространено на случай несжимаемой жидкости.

1. Дозвуковой газовый поток, движущийся вдоль твердой горизонтальной стенки  $FME$  со скоростью  $v_1$ , обтекает пластинку  $AB$  длиной  $l$ , расположенную на расстоянии  $h$  от этой стенки. Пластика образует угол  $\alpha = \sigma\pi$  ( $0 < \sigma < 1/2$ ) с отрицательным направлением скорости набегающего потока  $v_1$  и разделяет поток на две несимметричные ветви. Верхняя ветвь безгранична по ширине и несет бесконечное количество жидкости, а нижняя — имеет ширину  $\delta$  и расход  $Q$ . Вблизи пластинки происходит притормаживание жидкости, так что наименьшая скорость  $v_0$  ( $v_0 < v_1$ ) на стенке  $FME$  будет в некоторой точке  $M$ . На струйных поверхностях  $AC$ ,  $BD$  скорость равна  $v_2$  ( $v_2 > v_1$ ). Начало координат поместим в точке  $A$  и ось  $x$  направим по направлению скорости  $v_1$  (фиг. 1).



Фиг. 1

При решении задачи будем использовать схему Жуковского — Рошко [3,4] с застойной зоной перед пластиной. Схема струйного обтекания пластинки с застойной зоной перед ней была предложена С. А. Чаплыгиным [5], при этом скорость на струйных поверхностях, ограничивающих застойную зону, предполагалась произвольной и должна определяться из дополнительных условий.

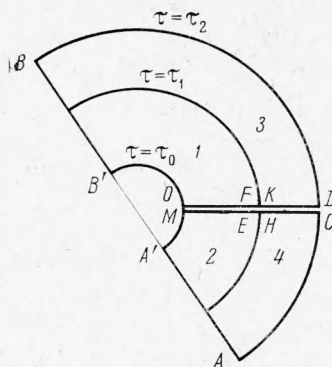
Учитывая это будем предполагать, что скорость на струйных поверхностях  $OA'$  и  $OB'$  равна наименьшей скорости на стенке  $v_0$ .

Хорошо известно [4], что теория струй дает заниженное значение коэффициента нормального давления, поэтому для получения результата близкого к действительному нужно по возможности иметь большее значение давления  $P_0$  в застойной зоне, т. е.

меньшую скорость  $v_0$  на струйных поверхностях  $OA'$  и  $OB'$ . Так как поверхность тока можно принять за жесткую стенку, рассмотрим дозвуковое течение газа в канале, у которого одна стенка прямолинейна  $FME$ , а другая — криволинейная  $LOA'ACH$ . Падение скорости газа в этом канале будет тем больше, чем больше расширение канала вблизи пластинки (линия тока  $LO$  перпендикулярна к пластинке в точке ветвления  $O$ ) и чем меньше ширина канала слева на бесконечности, а это возможно при малых значениях  $\alpha$ , так как в этом случае линия тока  $LO$  претерпевает наибольшее изменение кривизны, и малых  $h$ . Поставленная задача представляет наибольший интерес, именно при малых значениях  $\alpha$  и  $h$ , хотя с математической точки зрения полученное решение справедливо при любых значениях  $\alpha$  и  $h$ , допускаемых принятой схемой течения.

Примем, что на разветвляющейся линии тока  $OA'ACH$  и  $OB'BDK$  функция тока  $\psi = 0$ , тогда на линии тока  $FME$  функция  $\psi = -Q$ .

В плоскости годографа скорости с полярными координатами  $\theta$  и  $\tau = v^2 / v_{\max}^2$  всей области, занятой потоком, будет соответствовать полукольцо с разрезом вдоль луча  $\theta = 0$  и радиусами  $\tau_0, \tau_2$  (фиг 2). Значения, которые должна принимать функция тока вдоль границ области годографа будут следующие:



Фиг. 2

$$\begin{aligned} \psi = 0 & \quad \text{при } \theta = -\sigma\pi, & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_2 \\ \psi = 0 & \quad \text{при } \theta = \gamma\pi, & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_2, \quad \gamma = 1 - \sigma \\ \psi = -Q & \quad \text{при } \theta = 0, & \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \\ \psi = 0 & \quad \text{при } \theta = 0, & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \psi = 0 & \quad \text{при } \tau = \tau_0, & -\sigma\pi \leq \theta \leq 0 \\ \psi = 0 & \quad \text{при } \tau = \tau_0, & 0 \leq \theta \leq \gamma\pi \\ \psi = 0 & \quad \text{при } \tau = \tau_2, & -\sigma\pi \leq \theta \leq 0 \\ \psi = 0 & \quad \text{при } \tau = \tau_2, & 0 \leq \theta \leq \gamma\pi \end{aligned} \quad (1.2)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению внутренней задачи Дирихле для уравнения Чаплыгина

$$4\tau^2(1-\tau) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + 4\tau[1+(\beta-1)\tau] \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + [1-(2\beta+1)\tau] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.3)$$

$$(\beta = 1/(\kappa-1), \kappa = c_p/c_v)$$

в областях полукольца. Так как  $\tau < 1/(2\beta+1)$ , то в рассматриваемой области уравнение (1.3) будет эллиптического типа.

Решение задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(\tau, \theta) &= Q \frac{\theta - \gamma\pi}{\gamma\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n z_\lambda(\tau) + B_n \xi_\lambda(\tau)] \sin \frac{n\theta}{\gamma}, \quad \left(\lambda = \frac{n}{\gamma}\right) \\ \psi_2(\tau, \theta) &= -Q \frac{\theta + \sigma\pi}{\sigma\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} [(C_n z_\omega(\tau) + D_n \xi_\omega(\tau)] \sin \frac{n\theta}{\sigma}, \quad \left(\omega = \frac{n}{\sigma}\right) \\ \psi_3(\tau, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} [E_n z_\lambda(\tau) + F_n \xi_\lambda(\tau)] \sin \frac{n\theta}{\gamma} \\ \psi_4(\tau, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} [G_n z_\omega(\tau) + H_n \xi_\omega(\tau)] \sin \frac{n\theta}{\sigma} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь индекс при  $\psi$  соответствует номеру подобласти полукольца (фиг. 2), в которой ищется решение;  $z_\nu(\tau)$  — интеграл уравнения

$$4\tau^2(1-\tau)z_\nu'' + 4\tau[1+(\beta-1)\tau]z_\nu' - \nu^2[1-(2\beta+1)\tau]z_\nu = 0, \quad (\nu = \omega, \lambda) \quad (1.5)$$

регулярный при  $\tau = 0$ , рассмотренный С. А. Чаплыгиным [1];  $\zeta_\nu(\tau)$  — второй линейно независимый интеграл уравнения (1.5), полученный Лайтхиллом [6] и Черри [7, 8], который при целом положительном  $\nu$  обращается в логарифмическое решение [7]. Этот интеграл в теории газовых струй впервые был использован С. В. Фальковичем [2]. Для вронскиана этих интегралов имеем выражение

$$W_\nu(\tau) = z_\nu'(\tau) \zeta_\nu(\tau) - \zeta_\nu'(\tau) z_\nu(\tau) = \nu(1-\tau)^{\nu-1}, \quad (\nu = \omega, \lambda) \quad (1.6)$$

Коэффициенты  $A_n, B_n, \dots, H_n$  подлежат определению.

Функции тока, определяемые посредством (1.4), удовлетворяют граничным условиям (1.1). Потребуем теперь выполнения граничных условий (1.2), а также условий аналитического продолжения через границы подобластей, т. е.

$$\psi_1 = \psi_3, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi_3}{\partial \tau} \quad \text{при } \tau = \tau_1, \quad 0 \leq \theta \leq \gamma\pi \quad (1.7)$$

$$\psi_2 = \psi_4, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi_4}{\partial \tau} \quad \text{при } \tau = \tau_1, \quad -\sigma\pi \leq \theta \leq 0$$

Условия (1.2), (1.7) приводят к системе  $8n$  алгебраических уравнений с  $8n$  неизвестными, решив которую, найдем искомые коэффициенты, и окончательное решение задачи будет иметь вид

$$\begin{aligned} \psi_1(\tau, \theta) &= \frac{Q}{\gamma\pi} \left[ \theta - \gamma\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \chi_1(\tau) \frac{\sin \lambda\theta}{\lambda} \right], & \psi_3(\tau, \theta) &= \frac{2Q}{\gamma\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_3(\tau) \frac{\sin \lambda\theta}{\lambda} \\ \psi_2(\tau, \theta) &= -\frac{Q}{\sigma\pi} \left[ \theta + \sigma\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \chi_2(\tau) \frac{\sin \omega\theta}{\omega} \right], & \psi_4(\tau, \theta) &= -\frac{2Q}{\sigma\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_4(\tau) \frac{\sin \omega\theta}{\omega} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \chi_i(\tau) &= \frac{T_\nu(\tau, \tau_2) - T_\nu(\tau, \tau_0)}{T_\nu(\tau_2, \tau_0)} - \frac{T_\nu'(\tau_1, \tau_2) - W_\nu(\tau_1)}{T_\nu(\tau_2, \tau_0)} \frac{T_\nu(\tau, \tau_0)}{W_\nu(\tau_1)} \\ \chi_j(\tau) &= \frac{T_\nu(\tau_1, \tau_0) - W_\nu(\tau_1)}{T_\nu(\tau_2, \tau_0)} \frac{T_\nu(\tau, \tau_2)}{W_\nu(\tau_1)} \\ (i=1, \quad j=3, \quad \nu=\lambda; \quad i=2, \quad j=4, \quad \nu=\omega) \end{aligned}$$

$$T_\nu(\tau_i, \tau_j) = z_\nu(\tau_i) \zeta_\nu(\tau_j) - z_\nu(\tau_j) \zeta_\nu(\tau_i), \quad T_\nu(\tau_i, \tau_i) = 0$$

$$T_\nu'(\tau_i, \tau_j) = [T_\nu'(\tau, \tau_j)]_{\tau=\tau_i}, \quad T_\nu'(\tau_i, \tau_i) = W_\nu(\tau_i) \quad (1.9)$$

$$(i, j = 0, 1, 2; \nu = \omega, \lambda)$$

Для дальнейшего заметим, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} \chi_i'(\tau_0) &= \frac{T_\nu'(\tau_0, \tau_2) - W_\nu(\tau_0)}{T_\nu(\tau_2, \tau_0)} - \frac{T_\nu'(\tau_1, \tau_2) - W_\nu(\tau_1)}{T_\nu(\tau_2, \tau_0)} \frac{W_\nu(\tau_0)}{W_\nu(\tau_1)} \\ \chi_j'(\tau_2) &= \frac{T_\nu'(\tau_1, \tau_0) - W_\nu(\tau_1)}{T_\nu(\tau_2, \tau_0)} \frac{W_\nu(\tau_2)}{W_\nu(\tau_1)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \chi_i(\tau_0) &= -1, \quad \chi_j(\tau_2) = 0, \quad \chi_i(\tau_1) = \chi_j(\tau_1) = -1, \quad \chi_i'(\tau_1) + \chi_j'(\tau_1) = 0 \\ (i=1, \quad j=3, \quad \nu=\lambda; \quad i=2, \quad j=4, \quad \nu=\omega) \end{aligned}$$

Для унификации выражений  $\chi_i'(\tau_0)$ ,  $\chi_j'(\tau_2)$  и функций  $H(\nu, \tau)$ ,  $\Pi(\nu, \tau)$ ,  $\Omega(\nu, \tau)$ , определенных в дальнейшем равенствами (2.4), (2.10) и (2.14), в выражение функции  $\chi_i(\tau)$  введен двучлен тождественно равный нулю

$$\frac{W_\nu(\tau_1) T_\nu(\tau, \tau_0)}{T_\nu(\tau_2, \tau_0) W_\nu(\tau_1)} - \frac{T_\nu(\tau, \tau_0)}{T_\nu(\tau_2, \tau_0)}$$

2. Определим связь между параметрами задачи. Вдоль любой струйной поверхности имеет место общая формула

$$dy = 2\tau \frac{(1-\tau)^{-3}}{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \sin \theta \, d\theta \quad (2.1)$$

Подставляя в (2.1) функцию тока  $\psi_4(\tau, \theta)$  из (1.8), интегрируя по  $\theta$  вдоль струйной поверхности  $AC(\tau = \tau_2 = \text{const})$  от  $\theta = \sigma\pi$  ( $y = 0$ ) до  $\theta = 0$  ( $y = y_C$ ), а также учитывая (1.6), (1.10) и выражение для расхода

$$Q = \delta \nu_1 (1 - \tau_1)^\beta \quad (2.2)$$

найдем ординату точки  $C$

$$y_C = -\delta H(\omega, \tau_1) \quad (2.3)$$

Здесь

$$H(\nu, \tau) = 4\tau \left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau}\right)^\beta \left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^{1/2} \frac{\sin k\pi}{k\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\nu^2-1} \frac{T_\nu'(\tau, \tau_0) - W_\nu(\tau)}{T_\nu(\tau_2, \tau_0)} \quad (2.4)$$

$(\nu = \lambda, k = \gamma; \nu = \omega, k = \sigma)$

Совершенно аналогично находится ордината точки  $D$

$$y_D = l \sin \sigma\pi + \delta H(\lambda, \tau_1) \quad (2.5)$$

Сложив  $|y_C|$  из (2.3) с  $y_D$  из (2.5), получим выражение для ширины каверны

$$a = l \sin \sigma\pi + \delta[H(\lambda, \tau_1) + H(\omega, \tau_1)] \quad (2.6)$$

Из геометрического равенства  $\delta + |y_C| = h$  (фиг. 1) следует:

$$\delta = h[1 + H(\omega, \tau_1)]^{-1} \quad (2.7)$$

Путем поворота осей  $x, y$  против часовой стрелки на угол

$$\theta_1 = 1/2 \pi - \sigma\pi = \gamma\pi - 1/2 \pi$$

введем новую систему координат  $x'Ay'$ , в которой вдоль любой линии тока будем иметь

$$dy' = \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{\nu} \left[ 2\tau \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \sin \theta' \, d\theta' - \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)} \frac{\partial \psi}{\partial \theta'} \sin \theta' \, d\tau \right] \quad (2.8)$$

На отрезках пластинки  $B'B$  и  $AA'$ , соответственно,  $\theta' = 1/2 \pi$  и  $\theta' = -1/2 \pi$  ( $\theta' = \theta - \theta_1$ ) и (2.8) можно представить в виде

$$dy' = \pm \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\nu_{\max} \tau^{3/2} (1-\tau)^{\beta+1}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta'} \right)_{\theta' = \mp 1/2 \pi} d\tau \quad (2.9)$$

где знак плюс соответствует отрезку  $AA'$ , а минус — отрезку  $B'B$ . Интегрируя (2.9) от  $\tau_0$  до  $\tau_2$ , находим длину  $l_1$  отрезка пластинки  $B'B$

$$l_1 = -\frac{1}{2\nu_{\max}} \left[ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{1-(2\beta+1)\tau}{\tau^{3/2} (1-\tau)^{\beta+1}} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta'} \right)_{\theta' = -1/2 \pi} d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1-(2\beta+1)\tau}{\tau^{3/2} (1-\tau)^{\beta+1}} \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta'} \right)_{\theta' = 1/2 \pi} d\tau \right]$$

Вычислив интегралы с учетом (1.8), (1.10), (2.4) и (2.7), а также приняв во внимание обозначение

$$\Pi(\nu, \tau) = 4\tau \left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau}\right)^\beta \left(\frac{\tau_2}{\tau_0}\right)^{1/2} \frac{\sin k\pi}{k\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\nu^2-1} \frac{T_\nu'(\tau, \tau_2) - W_\nu(\tau)}{T_\nu(\tau_2, \tau_0)} \quad (2.10)$$

$$\Delta = \left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau_0}\right)^\beta \left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)^{1/2} \quad (\nu = \lambda, k = \gamma; \nu = \omega, k = \sigma)$$

после элементарных преобразований получим

$$l_1 = h[1 - \Delta + H(\lambda, \tau_1) + \Pi(\lambda, \tau_0)] - \Pi(\lambda, \tau_1) \{ [1 + H(\omega, \tau_1)] \sin \sigma\pi \}^{-1} \quad (2.11)$$

При выводе (2.11) были использованы равенства [1]

$$\int \frac{1-(2\beta+1)\tau}{\tau^{3/2} (1-\tau)^{\beta+1}} \chi_i(\tau) \, d\tau = \frac{2}{\nu^2-1} \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{\tau^{1/2}} [\chi_i(\tau) + 2\tau \chi_i'(\tau)]$$

$(i = 1, 3; \nu = \lambda; i = 2, 4; \nu = \omega)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\nu^2-1} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k\pi}{\sin k\pi} \right) \quad (\nu = \lambda, k = \gamma; \nu = \omega, k = \sigma) \quad (2.12)$$

Аналогичным путем определяется длина  $l_2$  отрезка  $AA'$

$$l_2 = h [\Delta - 1 + H(\omega, \tau_1) + \Pi(\omega, \tau_0) - \Pi(\omega, \tau_1)] \{[1 + H(\omega, \tau_1)] \sin \sigma\pi\}^{-1} \quad (2.13)$$

Вставив в (2.1) функцию тока  $\psi_2(\tau, \theta')$ , а затем  $\psi_1(\tau, \theta')$  из (1.8), проинтегрировав по  $\theta$  вдоль струйной поверхности  $A'OB'$  ( $\tau = \tau_0 = \text{const}$ ) от  $\theta' = -1/2\pi$  ( $y' = y_{A'}$ ) до  $\theta' = 1/2\pi$  ( $y' = y_{B'}$ ) и используя (1.10), (2.2), (2.4), (2.10), а также, введя обозначение

$$\Omega(v, \tau) = 4\tau \left(\frac{1-\tau_1}{1-\tau}\right)^\beta \left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)^{1/2} \frac{\sin k\pi}{k\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{v^2-1} \frac{T_{v'}(\tau, \tau_2) - W_v(\tau)}{T_{v'}(\tau_2, \tau_0)} \quad (2.14)$$

$$t_n = -(1)^{n-1} + \cos k\pi \quad (v = \lambda, k = \gamma; v = \omega, k = \sigma)$$

найдем длину  $l_3$  отрезка  $A'B'$  в виде

$$l_3 = h [\Omega(\lambda, \tau_0) - \Omega(\lambda, \tau_1) + \Omega(\omega, \tau_0) - \Omega(\omega, \tau_1)] \{[1 + H(\omega, \tau_1)] \sin \sigma\pi\}^{-1} \quad (2.15)$$

После сложения (2.11), (2.13) и (2.15) имеем

$$l = h [\Pi(\lambda, \tau_0) - \Pi(\lambda, \tau_1) + \Pi(\omega, \tau_0) - \Pi(\omega, \tau_1) + \Omega(\lambda, \tau_0) - \Omega(\lambda, \tau_1) + \Omega(\omega, \tau_0) - \Omega(\omega, \tau_1) + H(\lambda, \tau_1) + H(\omega, \tau_1)] \{[1 + H(\omega, \tau_1)] \sin \sigma\pi\}^{-1} \quad (2.16)$$

Используя (2.7), (2.16), преобразуем (2.6) к виду

$$a = h \{ \Pi(\lambda, \tau_0) - \Pi(\lambda, \tau_1) + \Pi(\omega, \tau_0) - \Pi(\omega, \tau_1) + \Omega(\lambda, \tau_0) - \Omega(\lambda, \tau_1) + \Omega(\omega, \tau_0) - \Omega(\omega, \tau_1) + 2[H(\lambda, \tau_1) + H(\omega, \tau_1)] \} [1 + H(\omega, \tau_1)]^{-1} \quad (2.17)$$

Соотношения (2.2), (2.7), (2.16), (2.17) определяют расход газа  $Q$ , ширину струи  $\delta$ , скорость на струйных поверхностях застойной зоны  $\tau_0$ , ширину каверны  $a$  в функции от  $\tau_1, \tau_2, h, l$ .

3. Равнодействующую сил давления  $R$  на пластинку  $AB$  определим путем интегрирования вдоль пластинки, в результате чего будем иметь

$$R = I_1 + I_2 + p_0 l_3 - p_2 l, \quad I_1 = \int_{B'}^B p dy', \quad I_2 = \int_{A'}^A p dy' \quad (3.1)$$

Здесь  $p$  — давление перед пластинкой;  $p_0$  — давление в застойной зоне;  $p_2$  — давление за пластинкой. Принимая во внимание (2.9) и используя соотношения

$$p = p^0 (1 - \tau)^{\beta+1}, \quad p_i = p^0 (1 - \tau_i)^{\beta+1}, \quad p^0 = v_{\max}^2 / 2(\beta + 1) \quad (i = 0, 1, 2) \quad (3.2)$$

Здесь  $p^0$  — давление газа в точке торможения, представим  $I_1$  в виде

$$I_1 = -\frac{p^0}{2v_{\max}} \left[ \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau^{3/2}} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta'} \right)_{\theta' = 1/2\pi} d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1 - (2\beta + 1)\tau}{\tau^{3/2}} \left( \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta'} \right)_{\theta' = 1/2\pi} d\tau \right]$$

Вычислив интегралы с учетом (1.8) по формуле [1]

$$\int \tau^{-3/2} [1 - (2\beta + 1)\tau] \chi_i(\tau) d\tau = \frac{2}{v^2 - 1} \left\{ \frac{1 - \tau}{\sqrt{\tau}} [\chi_i(\tau) + 2\tau \chi_i'(\tau)] + 2(\beta + 1) \tau^{1/2} \chi_i(\tau) \right\}$$

а также используя (1.10), (2.2), (2.4), (2.7), (2.10) и (2.12), преобразуем (3.3) к форме

$$I_1 = p^0 h \langle (1 - \tau_1)^\beta \tau_1^{1/2} \{ [1 + (2\beta + 1)\tau_1] \tau_1^{-1/2} - [1 + (2\beta + 1)\tau_0] \tau_0^{-1/2} \} + H(\lambda, \tau_1) (1 - \tau_2)^{\beta+1} + (1 - \tau_0)^{\beta+1} [\Pi(\lambda, \tau_0) - \Pi(\lambda, \tau_1)] \rangle \{ [1 + H(\omega, \tau_1)] \sin \sigma\pi \}^{-1} \quad (3.4)$$

Аналогичное выражение можно найти для  $I_2$

$$I_2 = p^0 h \langle (1 - \tau_1)^\beta \tau_1^{1/2} \{ [1 + (2\beta + 1)\tau_0] \tau_0^{1/2} - [1 + (2\beta + 1)\tau_1] \tau_1^{1/2} \} + H(\omega, \tau_1) (1 - \tau_2)^{\beta+1} + (1 - \tau_0)^{\beta+1} [\Pi(\omega, \tau_0) - \Pi(\omega, \tau_1)] \rangle \{ [1 + H(\omega, \tau_1)] \sin \sigma\pi \}^{-1} \quad (3.5)$$

После подстановки (3.2), (3.4), (3.5), (2.15), (2.16) в (3.1), найдем  $R$

$$R = p^0 h [(1 - \tau_0)^{\beta+1} - (1 - \tau_2)^{\beta+1}] [\Omega(\lambda, \tau_0) - \Omega(\lambda, \tau_1) + \Omega(\omega, \tau_0) - \Omega(\omega, \tau_1) + \Pi(\lambda, \tau_0) - \Pi(\lambda, \tau_1) + \Pi(\omega, \tau_0) - \Pi(\omega, \tau_1)] \{ [1 + H(\omega, \tau_1)] \sin \sigma\pi \}^{-1}$$

Отсюда легко получить выражение для коэффициента нормального давления

$$c_n = \varepsilon F(\tau_0, \tau_1, \tau_2) [\Omega(\lambda, \tau_0) - \Omega(\lambda, \tau_1) + \Omega(\omega, \tau_0) - \Omega(\omega, \tau_1) + \Pi(\lambda, \tau_0) - \Pi(\lambda, \tau_1) + \Pi(\omega, \tau_0) - \Pi(\omega, \tau_1)] \{ [1 + H(\omega, \tau_1)] \sin \sigma \pi \}^{-1} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon = \frac{h}{l} F(\tau_0, \tau_1, \tau_2) = \frac{1 - \tau_0}{(\beta + 1) \tau_1} \left( \frac{1 - \tau_0}{1 - \tau_1} \right)^\beta \left[ 1 - \left( \frac{1 - \tau_2}{1 - \tau_0} \right)^{\beta+1} \right]$$

Заметим, что

$$\lim F(\tau_0, \tau_1, \tau_2) = (v_2^2 - v_0^2) v_1^{-2} \text{ при } v_{\max} \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

Соотношения (2.7), (2.16), (2.17), (3.6) дают решение задачи.

4. Полученный результат легко распространить на случай несжимаемой жидкости. Действительно, если позаимствовать выражения для функций  $z_v(\tau)$ ,  $\zeta_v(\tau)$  из работ [1, 8] и учесть (1.6), (1.9) можно найти пределы

$$\lim_{v_{\max} \rightarrow \infty} \tau_i \frac{T'_v(\tau_i, \tau_2) - W_v(\tau_i)}{T'_v(\tau_2, \tau_0)} = \frac{v q_{0i}^v (1 - q_{i2}^v)^2}{2 (1 - q_{02}^{2v})}, \quad q_{ij} = \left( \frac{\tau_i}{\tau_j} \right)^{1/2} = \frac{v_i}{v_j} \quad (4.1)$$

$$\lim_{v_{\max} \rightarrow \infty} \tau_i \frac{T'_v(\tau_i, \tau_0) - W_v(\tau_i)}{T'_v(\tau_2, \tau_0)} = \frac{v q_{i2}^v (1 - q_{0i}^v)^2}{2 (1 - q_{02}^{2v})} \quad (v = \omega, \lambda)$$

$(i, j = 0, 1, 2)$

Переходя к пределу при  $v_{\max} \rightarrow \infty$  ( $\tau \rightarrow 0$ ) в (2.7), (2.16), (2.17) и (3.6) с учетом (3.7) и (4.1), приведем эти выражения к виду

$$\delta = h [1 + H_0(\omega, v_1)]^{-1}$$

$$l = h [\Pi_0(\lambda, v_0) - \Pi_0(\lambda, v_1) + \Pi_0(\omega, v_0) - \Pi_0(\omega, v_1) + \Omega_0(\lambda, v_0) - \Omega_0(\lambda, v_1) + \Omega_0(\omega, v_0) - \Omega_0(\omega, v_1) + H_0(\lambda, v_1) + H_0(\omega, v_1)] \{ [1 + H_0(\omega, v_1)] \sin \sigma \pi \}^{-1}$$

$$a = h \{ \Pi_0(\lambda, v_0) - \Pi_0(\lambda, v_1) + \Pi_0(\omega, v_0) - \Pi_0(\omega, v_1) + \Omega_0(\lambda, v_0) - \Omega_0(\lambda, v_1) + \Omega_0(\omega, v_0) - \Omega_0(\omega, v_1) + 2[H_0(\lambda, v_1) + H_0(\omega, v_1)] \} \{ [1 + H_0(\omega, v_1)] \}^{-1}$$

$$c_n = \varepsilon q_{12}^{-2} (1 - q_{02}^{2v}) [\Pi_0(\lambda, v_0) - \Pi_0(\lambda, v_1) + \Pi_0(\omega, v_0) - \Pi_0(\omega, v_1) + \Omega_0(\lambda, v_0) - \Omega_0(\lambda, v_1) + \Omega_0(\omega, v_0) - \Omega_0(\omega, v_1)] \{ [1 + H_0(\omega, v_1)] \sin \sigma \pi \}^{-1}$$

Здесь приняты обозначения

$$H_0(v, v_i) = \lim_{\tau_i \rightarrow 0} H(v, \tau_i) = 2q_{12} \frac{\sin \sigma \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 - k^2} \frac{q_{i2}^v (1 - q_{0i}^v)^2}{1 - q_{02}^{2v}}$$

$$\Pi_0(v, v_i) = \lim_{\tau_i \rightarrow 0} \Pi(v, \tau_i) = 2q_{10} \frac{\sin \sigma \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 - k^2} \frac{q_{0i}^v (1 - q_{i2}^v)^2}{1 - q_{02}^{2v}}$$

$$\Omega_0(v, v_i) = \lim_{\tau_i \rightarrow 0} \Omega(v, \tau_i) = 2q_{10} \frac{\sin \sigma \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} i_v \frac{n}{n^2 - k^2} \frac{q_{0i}^v (1 - q_{i2}^v)^2}{1 - q_{02}^{2v}}$$

$$(v = \lambda, k = \gamma; v = \omega, k = \sigma; i = 0, 1)$$

Поступила 23 I 1968

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Сочинения, М.—Л., Гостехтеориздат, 1948, т. 2, стр. 19—137.
2. Фалькович С. В. К теории газовых струй. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
3. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости данной на неизвестной линии тока. Сочинения, М.—Л., Гостехиздат, 1949, т. 2, стр. 489—626.
4. Roshko A. On the Wake and Drag of Bluff Bodies. J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 2. (Рус. пер.: Рошко А. О вихревом следе и сопротивлении плохобтекаемых тел. Механика, Сб. обзор. и пер. иностр. период. лит., 1956, № 1).
5. Чаплыгин С. А. К вопросу о струях в несжимаемой жидкости., Сочинения, М.—Л., Гостехтеориздат, 1948, т. 2, стр. 5—18.
6. Lighthill M. J. The hodograph transformation in transonic flow. II. Auxiliary theorems on the hypergeometric functions  $\psi_n(\tau)$ . Proc. Royal Soc., ser. A, 1947, vol. 191, p. 341—352.
7. Cherry T. M. Flow of a compressible fluid about a cylinder. II. Flow with circulation. Proc. Royal Soc., ser. A, 1949, vol. 196, No. 1044.
8. Cherry T. M. Asymptotic expansions for the hypergeometric functions occurring in gas — flow theory. Proc. Royal Soc., ser. A, 1950, vol. 202, No. 1071.