

5. N a n b u K. Vortex flow over a flat surface with suction. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 8.
6. C h a m T. S. The laminar boundary layer of a source and vortex flow. Aeronaut. Quart., 1971, vol. 22, No. 2.
7. S e r r i n J. The swirling vortex. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A., 1972, vol. 271, No. 1214.
8. Я ц е в В. И. Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1950, т. 20, вып. 11.
9. Б и р к г о ф Г., С а р а н т а н е л л о Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
10. Г о л ь д ш т и к М. А., С и л а н т ь е в Б. А. К теории затопленных струй. ПМТФ, 1965, № 5.

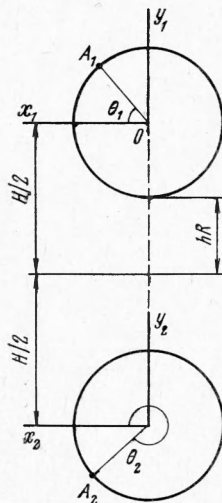
УДК 534.2

## ОБ АКУСТИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ

Д. Н. Горелов

(Новосибирск)

В работе исследуются некоторые особенности распространения звуковых волн от кругового цилиндра, колеблющегося вблизи экрана или свободной поверхности. При определенных значениях параметров обнаружено резкое изменение интенсивности звукового поля, обусловленное акустическим резонансом между колеблющимся цилиндром и собственными колебаниями газа в соответствующей области.



Фиг. 1

и граничным условиям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r_n} = F_n(\theta_n) \quad \text{при } r_n = 1 \quad (n = 1, 2) \quad (4)$$

$$\lim_{r_n \rightarrow \infty} r_n^{1/2} \Phi = 0, \quad \lim_{r_n \rightarrow \infty} r_n^{1/2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r_n} - ik\Phi \right) = 0 \quad (5)$$

Здесь  $r_n, \theta_n$  — безразмерные полярные координаты, связанные с  $x_n, y_n$  соотношениями

$$x_n = Rr_n \cos \theta_n, \quad y_n = Rr_n \sin \theta_n \quad (n = 1, 2) \quad (6)$$

Рассмотрим задачу об акустическом взаимодействии двух круговых цилиндров радиуса  $R$ , колеблющихся по некоторому заданному гармоническому закону с малыми амплитудами. Среду предположим идеальной и сжимаемой, а движение среды — плоскопараллельным и потенциальным. С каждым цилиндром свяжем декартову систему координат  $x_n, y_n$  ( $n = 1, 2$ ) с центром на оси цилиндра. Оси  $y_1, y_2$  направим вдоль прямой, соединяющей начала координат, полагая

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 - H \quad (1)$$

где  $H$  — расстояние между осями цилиндров (фиг. 1).

В дальнейшем в качестве основной системы координат выбираем  $x_1, y_1$ , применяя для этих координат обозначения  $x, y$ .

Предположим, что потенциал скорости  $\varphi(x, y, t)$  может быть представлен в виде

$$\varphi(x, y, t) = Ra\Phi(x, y)e^{i\omega t} \quad (2)$$

где  $\Phi(x, y)$  — безразмерная амплитудная функция потенциала скорости,  $a$  — скорость звука,  $\omega$  — круговая частота колебаний цилиндров. Тогда в рамках сделанных предположений функция  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + k^2\Phi = 0 \quad (k = \omega R/a) \quad (3)$$

а  $F_n(\theta_n)$  — безразмерные амплитудные функции нормальных составляющих скоростей точек контура  $n$ -го цилиндра

$$\partial \varepsilon_n / \partial t = a F_n(\theta_n) e^{i\omega t} \quad (7)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — нормальные составляющие вектора перемещения точек контура первого и второго цилиндров соответственно.

Решение задачи (3) — (5) будем строить методом интерференции [1]. Представим  $\Phi$  в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^2 [\Phi_n(r_n, \theta_n) + \Psi_n(r_n, \theta_n)] \quad (8)$$

Здесь  $\Phi_n$  — амплитудная функция потенциала скорости обтекания одиночного цилиндра, колеблющегося по заданному закону (7). Функция  $\Psi_n$  также соответствует течению около одиночного цилиндра, колеблющегося по некоторому дополнительному закону, введение которого позволяет учесть взаимное влияние (интерференцию) цилиндров. Этот неизвестный закон колебаний цилиндров определяется из условий непротекания (4).

Решение задачи для функции  $\Phi_n$ , удовлетворяющей уравнению (3) и условиям (4), (5), имеет вид

$$\Phi_n(r_n, \theta_n) = \frac{2}{k} \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(kr_n) \frac{a_m^{(n)} \cos m\theta_n + b_m^{(n)} \sin m\theta_n}{H_{m-1}^{(2)}(k) - H_{m+1}^{(2)}(k)} \quad (9)$$

Здесь  $a_m^{(n)}, b_m^{(n)}$  — коэффициенты Фурье для функции  $F_n(\theta_n)$ , а  $H_m^{(2)}$  — функции Ганкеля второго рода.

Функции  $\Psi_n(r_n, \theta_n)$  определяются теми же формулами (9), в которых вместо известных коэффициентов  $a_m^{(n)}, b_m^{(n)}$  следует поставить соответственно искомые коэффициенты  $c_m^{(n)}, d_m^{(n)}$ . Уравнения для определения этих коэффициентов получим из условий непротекания (4), подставляя в них выражение (8)

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial r_j} + \sum_{p=1}^2 \frac{\partial \Psi_p}{\partial r_j} = F_j(\theta_j) \quad \text{при } r_j = 1 \quad (j, n = 1, 2; n \neq j) \quad (10)$$

Решение системы уравнений (10) будем искать для случаев колебаний цилиндра вблизи экрана и свободной поверхности.

При колебаниях цилиндра вблизи экрана действие последнего можно учесть, введя второй цилиндр, зеркально отраженный от первого относительно экрана. Тогда в соответственных точках  $A_1$  и  $A_2$  будет выполняться условие

$$F_1(\theta_1) = F_2(\theta_2) \quad \text{при } \theta_2 = 2\pi - \theta_1 \quad (11)$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{(1)} \cos m\theta_1 + b_m^{(1)} \sin m\theta_1) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^{(2)} \cos m\theta_1 - b_m^{(2)} \sin m\theta_1)$$

Отсюда следует, что закон колебаний второго цилиндра связан с колебаниями первого соотношениями

$$a_m^{(1)} = a_m^{(2)}, \quad b_m^{(1)} = -b_m^{(2)} \quad (12)$$

В случае колебаний цилиндра вблизи свободной поверхности, которая предполагается плоской, ее действие также заменяется вторым цилиндром, расположенным симметрично относительно этой поверхности. При этом можно показать, что в точках  $A_1$  и  $A_2$  должно быть выполнено условие

$$F_1(\theta_1) = -F_2(\theta_2) \quad \text{при } \theta_2 = 2\pi - \theta_1 \quad (13)$$

которое приводит к соотношениям

$$a_m^{(1)} = -a_m^{(2)}, \quad b_m^{(1)} = b_m^{(2)} \quad (14)$$

Выражения (12) и (14) позволяют свести систему уравнений (10) в рассматриваемых случаях к одному уравнению вида

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \{c_n^{(1)} [M_n(\theta_1) + \sigma \cos n\theta_1] + d_n^{(1)} [N_n(\theta_1) + \sigma \sin n\theta_1]\} = \\ = - \sum_{n=0}^{\infty} [a_n^{(1)} M_n(\theta_1) + b_n^{(1)} N_n(\theta_1)] \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $\sigma = -1$  для экрана и  $\sigma = 1$  для свободной поверхности

$$\begin{aligned} M_n(\theta_1) = - \frac{k/z}{H_{n-1}^{(2)}(k) - H_{n+1}^{(2)}(k)} \left\{ (1 + h_1 \sin \theta_1) \cos n\theta_2 [H_{n-1}^{(2)}(z) - \right. \\ \left. - H_{n+1}^{(2)}(z)] + \frac{2nh_1}{z} \cos \theta_1 \sin n\theta_2 H_n^{(2)}(z) \right\} \\ N_n(\theta_1) = \frac{k/z}{H_{n-1}^{(2)}(k) - H_{n+1}^{(2)}(k)} \left\{ (1 + h_1 \sin \theta_1) \sin n\theta_2 [H_{n-1}^{(2)}(z) - \right. \\ \left. - H_{n+1}^{(2)}(z)] - \frac{2nh_1}{z} \cos \theta_1 \cos n\theta_2 H_n^{(2)}(z) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$h_1 = 2(1+h) = H/R, \quad z = k \sqrt{1 + 2h_1 \sin \theta_1 + h_1^2} \quad (17)$$

а переменная  $\theta_2$  связана с  $\theta_1$  соотношениями

$$\cos \theta_2 = kz^{-1} \cos \theta_1, \quad \sin \theta_2 = kz^{-1} (h_1 + \sin \theta_1) \quad (18)$$

Представляет интерес расчет давления  $p$  в звуковом поле вдали от колеблющихся цилиндров. Пренебрегая квадратом возмущений скорости, из интеграла Коши — Лагранжа имеем

$$p - p_{\infty} = -\rho (\partial \varphi / \partial t) \quad (p_{\infty} = \text{const}) \quad (19)$$

где  $\rho$  — плотность среды.

С учетом (2), (9) выражение (19) принимает вид

$$p - p_{\infty} = 1/2 \rho a^2 C_p, \quad C_p = -2ik \Phi(x, y) e^{i\omega t} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = \frac{2}{k} \sum_{n=0}^{\infty} [H_{n-1}^{(2)}(k) - H_{n+1}^{(2)}(k)]^{-1} \{ (a_n^{(1)} + c_n^{(1)}) [H_n^{(2)}(kr_1) \cos n\theta_1 - \\ - \sigma H_n^{(2)}(kr_2) \cos n\theta_2] + (b_n^{(1)} + d_n^{(1)}) [H_n^{(2)}(kr_1) \sin n\theta_1 + \\ + \sigma H_n^{(2)}(kr_2) \sin n\theta_2] \} \end{aligned} \quad (21)$$

Давление вдали от цилиндров в направлении осей  $x$  и  $y$  запишем соответственно в виде

$$\begin{aligned} p - p_{\infty} = 1/2 \rho a^2 P_x |x|^{-1/2} e^{i\omega t} \quad (|x| \gg R, |y| \sim R) \\ p - p_{\infty} = 1/2 \rho a^2 P_y |y|^{-1/2} e^{i\omega t} \quad (|x| \sim R, |y| \gg R) \end{aligned} \quad (22)$$

Практический интерес представляют модули амплитудных функций давления  $|P_x|$ ,  $|P_y|$ . Используя асимптотические представления для функций Ганкеля, имеем

$$|P_x| = 4 \sqrt{\frac{1}{\pi k}} (1 - \sigma) \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^{(1)} + c_n^{(1)}}{H_{n-1}^{(2)}(k) - H_{n+1}^{(2)}(k)} \right| \quad (23)$$

$$\begin{aligned} |P_y| = 4 \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \left| \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left[ \frac{b_{2j+1}^{(1)} + d_{2j+1}^{(1)}}{H_{2j}^{(2)}(k) - H_{2j+2}^{(2)}(k)} (1 + \sigma) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a_{2j}^{(1)} + c_{2j}^{(1)}}{H_{2j-1}^{(2)}(k) - H_{2j+1}^{(2)}(k)} (1 - \sigma) \right] \right| \quad (24) \end{aligned}$$

В частном случае колебаний одиночного цилиндра в безграничной среде  $\sigma = 0$ ,  $c_n^{(1)} = d_n^{(1)} = 0$ .

Для проведения расчетов закон колебаний рассматриваемого цилиндра задавался в виде

$$\varepsilon_1(\theta_1, t) = R \varepsilon f(\theta_1) e^{i\omega t} \quad (\varepsilon = \text{const}) \quad (25)$$

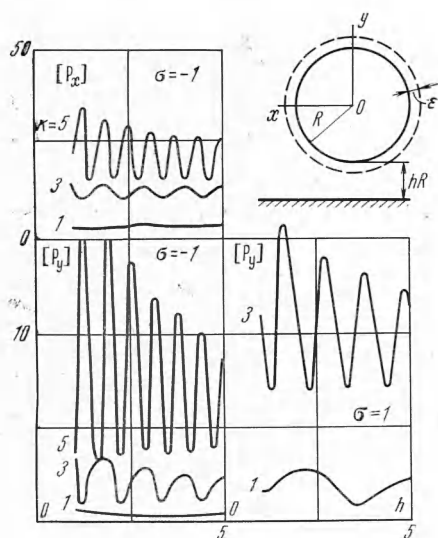
Тогда нормальная составляющая скорости цилиндра равна  $\partial \varepsilon_1 / \partial t$ , а функция  $F_1(\theta_1) = ik \varepsilon f(\theta_1)$ . В качестве примера выбирались формы колебаний цилиндра

$$f(\theta_1) = \cos m\theta_1 \quad (a_n^{(1)} = i\delta_{nm}k\varepsilon, b_n^{(1)} = 0, m = 0, 1, 2, 3) \quad (26)$$

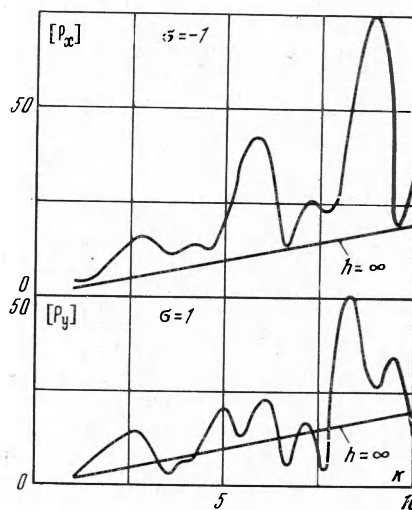
$$f(\theta_1) = \sin m\theta_1 \quad (a_n^{(1)} = 0, b_n^{(1)} = i\delta_{nm}k\varepsilon, m = 1, 2, 3)$$

где  $\delta_{nm}$  — символ Кронекера.

Функции  $\Psi_1, \bar{\Psi}_2$  аппроксимировались конечным числом слагаемых с комплексными коэффициентами  $c_n^{(1)}, d_n^{(1)}$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ), которые определялись методом коллокаций путем выполнения уравнения (15) в  $2N + 1$  равноотстоящих точках. Расчет проводился для  $N = 10$  (основной) и  $N = 7$  (контрольный). Результаты расчета в обоих случаях практически совпали (в рассмотренном диапазоне изменения параметров  $h$  и  $k$ ).



Фиг. 2



Фиг. 3

При этом помимо коэффициентов  $c_n^{(1)}, d_n^{(1)}$  вычислялись величины  $|P_x|, |P_y|$ , характеризующие давление в звуковом поле вдали от цилиндров. Некоторые результаты расчетов (для формы колебаний  $f = 1$ ) представлены на фиг. 2, 3. Экрану соответствует  $\sigma = -1$ , а свободной поверхности —  $\sigma = 1$ . Случай  $h = \infty$  соответствует колебаниям одиночного цилиндра в безграничной среде. Характерной особенностью всех расчетов является резкое увеличение  $|P_x|, |P_y|$  при определенных значениях параметров  $k$  и  $h$ , меняющихся периодически на величину  $kh \approx \pi$ . Интересно отметить, что такой же период изменения характерен для нулей функций Бесселя. Эта особенность решения позволяет предположить, что периодическое возрастание амплитуды давления вдали от системы двух колеблющихся цилиндров вызвано акустическим резонансом с собственными колебаниями безграничной среды, форма которых

$$\Phi = I_n(kr) \begin{cases} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{cases} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (27)$$

где  $k$  — произвольное положительное число, а  $r, \theta$  — полярная система координат с началом в точке  $x_1 = 0, y_1 = -H/2$ .

В частности, при колебаниях цилиндра вблизи экрана ( $\theta = 0, \pi$ ) может возникнуть резонанс с собственными колебаниями безграничной жидкости для форм колебаний  $\Phi = I_0(kr)$  или  $\Phi = I_2(kr) \cos 2\theta$ , которые удовлетворяют соотношению (11) и условию непротекания жидкости через экран.

Автор благодарен В. Б. Курзину за полезное обсуждение результатов расчета.

Поступила 3 VII 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов Д. Н. О расчете аэродинамической интерференции системы тел в идеальной жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 5.

УДК 539.196.2

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОГО ГАЗОВОГО ПОТОКА С ПОВЕРХНОСТЬЮ СЕРЕБРЯНЫХ ДАТЧИКОВ

Д. Парлаз, С. Ж. Токтомышев

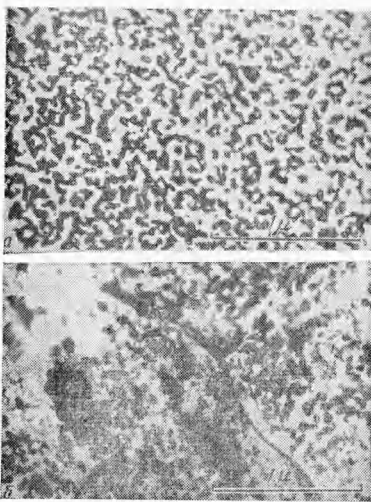
(Будапешт—Фрунзе)

В работах [1-3] наблюдалось изменение электрического сопротивления тонких пленок серебра при взаимодействии с атомарными частицами и полное поглощение атомов кислорода на поверхности в условиях свободномолекулярного течения газового потока.

При практическом использовании датчиков из тонких пленок серебра возникли трудности, связанные с абсолютной градуировкой датчиков по атомарному кислороду [1-4]. Так градуировка датчиков по методу, предложенному в работе [3], позволяет определять  $O$  в среде с точностью до 25%. В данной работе приводятся результаты измерений степени диссоциации свободномолекулярного потока молекулярного кислорода при обтекании датчиков методом электронного парамагнитного резонанса (ЭПР). Излагаются экспериментальные данные электронно-графического и рентгеноструктурного анализов структуры поверхности датчиков.

Эксперименты проводились на установке, описанной в [5, 6]. Свободномолекулярное течение газового потока в рабочем объеме создавалось с помощью газового накатателя при непрерывной откачке вакуумной системой. Диссоциация газов производилась с помощью безэлектродного высокочастотного разряда при минимальной мощности ВЧ генератора [6].

Измерение степени диссоциации  $\alpha$  в  $O_2$  производилось методом ЭПР, для чего использовался радиоспектрометр Varian E-3. Схема измерений приведена в [1]. Метод основывается на измерении изменения интенсивности спектра ЭПР  $O_2$  в рабочем объеме вследствие диссоциации молекул кислорода. Поэтому основная ошибка в определении  $\alpha$  зависит от точности измерения интенсивности ЭПР  $O_2$  спектра в молекулярном и диссоциированном



Фиг. 1

ном потоках газа. Согласно оценкам авторов  $\Delta\alpha/\alpha \sim 5\%$ , а при определении концентрации атомов кислорода  $\Delta n/n \sim 7-10\%$ .

Структура поверхности датчиков исследовалась на рентгеновской установке УРС-60 с применением камеры ВРС. Источником излучения служила рентгеновская трубка с хромовым анодом. Образец для снятия рентгенограмм располагался под углом  $15^\circ$  к рентгеновскому пучку. При толщине наносимого слоя серебра  $h \sim 1 \text{ мк}$  экспозиция составила 3 час. Обработка рентгенограмм производилась согласно методике, описанной в работах [7, 8]. Ошибка в определении межплоскостных расстояний  $d/n$  и  $\theta$  — угол Вульфа — Брегга не превышала 2%.