

К РАСЧЕТУ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИ ТЕЧЕНИИ СТРУКТУРНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. Лемберский

(Новосибирск)

Наступление переходного режима при течении ньютоновской жидкости определяется критическим значением числа Рейнольдса, ниже которого турбулентное движение невозможно. Для неньютоновских жидкостей предложено несколько модификаций числа Рейнольдса [1-3].

Наиболее широкое распространение получил критерий, введенный Метцнером и Ридом [4]. На основании рассмотрения уравнений движения и неразрывности Бэрд [5] показал, что этот критерий не может однозначно характеризовать момент наступления переходного режима, что было экспериментально подтверждено Ульбрехтом [7]. Замечание Бэрда справедливо и для используемого Ульбрехтом критерия. Как отмечено в [7], постоянство этого критерия наблюдалось в интервале значений показателя степенного закона $0.6 < n < 1.0$, т. е. для жидкостей со сравнительно слабо выраженными неньютоновскими свойствами.

Райан и Джонсон [6] предложили рассматривать обобщенный локальный критерий Рейнольдса вида

$$Z = \frac{D\rho w}{\tau_w} \frac{\partial w}{\partial y}$$

Здесь D — диаметр, ρ — плотность, w — локальная скорость, τ_w — касательное напряжение на стенке, y — нормальная к стенке координата.

Так как в выражение для Z входят локальные значения скорости и градиента скорости, то оно меняется по сечению канала. Райан и Джонсон предположили, что максимальное значение Z одинаково как для ньютоновской, так и для неньютоновской жидкостей.

Преобразуем критерий Z к виду

$$Z = R\omega\sigma \quad (R = \rho\phi D\langle w \rangle, \quad \omega = w/\langle w \rangle, \quad \sigma = \tau/\tau_w)$$

Здесь R — число Рейнольдса, ϕ — истинная текущая, $\langle w \rangle$ — средняя скорость, τ — локальное значение касательного напряжения.

Из этого выражения для Z сразу видно, что оно не может быть одинаковым для ньютоновской и неньютоновской жидкостей хотя бы потому, что относительные скорости ω описываются различными выражениями [9].

То же замечание справедливо и для предложенного Ханксом [3] критерия, который в случае круглой трубы отличается от Z постоянным множителем.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение движения

$$\rho \partial w_i / \partial t + \rho w_j \partial w_i / \partial x_j = - \partial p / \partial x_i + \partial \tau_{ji} / \partial x_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Здесь w_i — компоненты вектора скорости, t — время, p — давление, τ_{ji} — компоненты девятатора тензора напряжений, x_j — координаты прямоугольной декартовой системы координат. Введем безразмерные переменные

$$\xi = x/l, \quad \omega = w/w_0, \quad \vartheta = w_0 t/l, \quad \pi = p/\rho w_0^2, \quad \sigma = \tau/\tau_w \quad (1.2)$$

Здесь w_0 и l — соответственно характерная скорость и длина.

Уравнение движения примет вид

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial \vartheta} + \omega_j \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi_j} = - \frac{\partial \pi}{\partial \xi_i} + \frac{\zeta}{8} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial \xi_j} \quad \left(\zeta = \frac{\tau_w}{\rho w_0^2} \right) \quad (1.3)$$

где ζ — коэффициент сопротивления.

Под структурно-вязкой жидкостью понимается жидкость, у которой физические параметры не зависят от времени. Ньютоновская жидкость — частный случай структурно-вязкой жидкости, когда вязкость не зависит от напряжения сдвига.

Так как уравнение (1.3) однозначно описывает процесс движения жидкости и единственной интегральной характеристикой этого уравнения будет коэффициент сопротивления ζ , то естественно предположить, что наступлению переходного режима при течении структурно-вязких жидкостей должно соответствовать критическое значение коэффициента сопротивления ζ_* . Постоянство ζ_* отмечалось в работе [4] на основании большого числа опытных данных.

Здесь необходимо заметить, что рассматриваются жидкости с равным нулю пределом текучести, т. е. такие жидкости, которые начинают течь уже при приложении бесконечно малой нагрузки. Если жидкость обладает пределом текучести, то в центре потока возникает твердое ядро, и уравнение (1.3) неприменимо ко всему сечению канала.

2. **Круглая труба.** При течении ньютоновской жидкости в круглой трубе $\zeta_* \approx 2.8 \cdot 10^{-2}$.

Следуя [9], примем, что движение структурно-вязкой жидкости подчиняется закону вязкого трения Ньютона с переменным коэффициентом текучести

$$\varphi \tau = (\mathbf{n} \cdot \nabla) w \quad (2.1)$$

Воспользуемся линейным законом текучести [9]

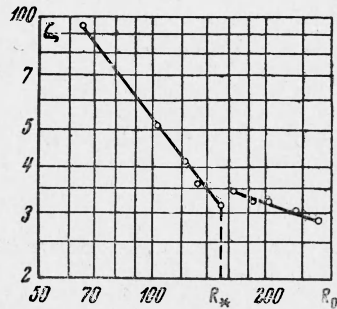
$$\varphi = \varphi_0 + \theta |\tau| \quad (2.2)$$

Здесь φ_0 — текучесть при нулевом сдвиге, θ — коэффициент структурной неустойчивости.

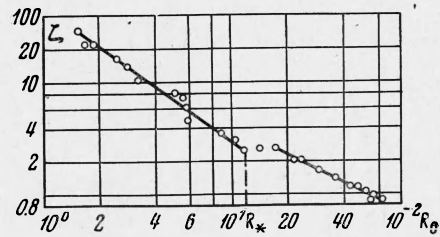
В полярных координатах с центром на оси трубы справедливо соотношение

$$\sigma = \xi \quad (\xi = r/r_0) \quad (2.3)$$

Здесь r — радиальная координата, r_0 — радиус трубы.



Фиг. 1. Зависимость коэффициента сопротивления ζ от числа R_0 для 0.3%-ного водного раствора карбопола, $D = 2.54$ см



Фиг. 2. Зависимость коэффициента сопротивления ζ от числа R_0 для 0.3%-ного водного раствора натрозола типа Н, $D = 2.54$ см

Сопоставляя уравнения (2.1) и (2.2), найдем

$$dw/dr = -\varphi_0 \tau - \theta \tau^2 \quad (2.4)$$

Используя безразмерные переменные (1.2) и учитывая соотношение (2.3), преобразуем уравнение (2.4) к виду

$$\frac{d\omega}{d\xi} = -\frac{R_0 \zeta}{16} \xi - \frac{R_0^3 \zeta^2}{128 \theta_*} \xi^2 \quad (2.5)$$

$$\left(R_0 = \rho \varphi_0 D \langle w \rangle, \quad \theta_* = \frac{\rho \varphi_0^3 D^2}{\theta}, \quad \zeta = \frac{8 \tau_m}{\rho \langle w \rangle^2} \right)$$

Запишем уравнения неразрывности в виде

$$2 \int_0^1 \xi \omega d\xi = 1 \quad (2.6)$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^1 \xi^2 \frac{d\omega}{d\xi} d\xi = -1 \quad (2.7)$$

Подставляя уравнение (2.5) в (2.7) и полагая $\zeta = \zeta_*$, получим

$$R_*^3 + 3.6 \cdot 10^2 \theta_* R_* - 8.2 \cdot 10^5 \theta_* = 0 \quad (2.8)$$

Здесь R_* — критическое значение числа R_0 , которому соответствует начало переходного режима.

Запишем выражение для R_* в явном виде при помощи формулы Кардана

$$R_* = (4.1 \cdot 10^6 \theta_* + \sqrt{1.68 \cdot 10^{11} \theta_*^2 + 2.2 \cdot 10^6 \theta_*^3})^{1/3} + (4.1 \cdot 10^6 \theta_* - \sqrt{1.68 \cdot 10^{11} \theta_*^2 + 2.2 \cdot 10^6 \theta_*^3})^{1/3} \quad (2.9)$$

Выражение (2.9) можно аппроксимировать следующим образом:

$$R_* \approx 93.5 (\theta_*)^{1/3} \text{ при } \theta_* < 1.5 \cdot 10^4, \quad R_* \approx 2300 \text{ при } \theta_* \geq 1.5 \cdot 10^4 \quad (2.10)$$

3. Плоская щель. Для жидкости с линейным законом текучести (2.2) безразмерный градиент скорости имеет вид

$$\frac{d\omega}{d\xi} = -\frac{R_0 \xi}{32} \xi - \frac{R_0^3 \xi^2}{256\theta_*} \xi^2$$

$$R_0 = 4\rho\varphi_0 h \langle w \rangle, \theta_* = \frac{16\rho\varphi_0^3 h}{\theta}$$

$$\xi = \frac{y}{h} \quad (3.1)$$

Здесь $2h$ — высота щели. Запишем уравнения неразрывности следующим образом:

$$\int_0^1 \omega d\xi = 1 \quad (3.2)$$

На основании работы [10], в которой исследовался переходный режим при течении воды в прямоугольном канале с соотношением сторон 1:20, можно положить $\xi_* = 3.6 \cdot 10^{-2}$.

Подставляя это значение коэффициента сопротивления в уравнение (3.1) и решая совместно уравнения (3.1) и (3.2), получим

$$R_*^3 + 3 \cdot 10^3 \theta_* R_* - 7.9 \cdot 10^5 \theta_* = 0$$

Можно также использовать приближенные зависимости

$$R_* \approx 92.5 \sqrt[3]{\theta_*} \quad \text{при } \theta_* < 2.5 \cdot 10^4$$

$$R_* \approx 2700 \quad \text{при } \theta_* \geq 2.5 \cdot 10^4 \quad (3.4)$$

4. Кольцевой зазор. В случае течения структурно-вязкой жидкости в осевом направлении между концентрическими цилиндрами безразмерный градиент скорости равен

$$\frac{d\omega}{d\xi} = -\frac{R_0 \xi}{16(1-\xi_a^2)} \left(\xi - \frac{\xi_0^2}{\xi} \right) - \frac{R_0^3 \xi^2}{1280_* (1-\xi_a^2)} \left(\xi^2 - 2\xi_a^2 + \frac{\xi_a^4}{\xi^2} \right) \quad (4.1)$$

$$R_0 = 2\rho\varphi_0 (r - r_0) \langle w \rangle, \quad \theta_* = \frac{4\rho\varphi_0^3 (r - r_0)^2}{\theta}$$

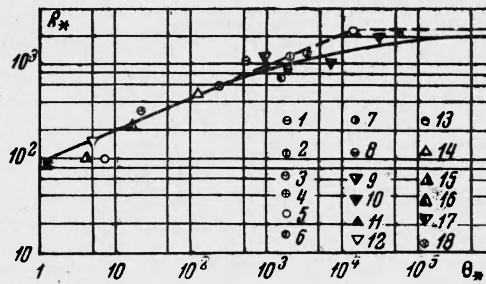
$$\xi = \frac{r}{r_0}, \quad \xi_a = \frac{r_a}{r_0}, \quad \xi_a = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2c}$$

$$a = \frac{R_0 \xi \ln \xi_0}{16(1-\xi_0)} - \frac{R_0^3 \xi^2}{1280_* \xi_0}, \quad b = \frac{R_0 \xi (1 - \xi_0^2 - 2 \ln \xi_0)}{32(1-\xi_0)} + \frac{R_0^3 \xi^2}{640_*}$$

$$c = \frac{R_0 \xi (1 + \xi_0)}{32} + \frac{R_0^3 \xi^2 (1 + \xi_0 + \xi_0^2)}{3840_*}, \quad \xi_0 = \frac{r_0}{r}$$

Здесь r_a — радиус, которому соответствует максимальное значение скорости, r_0 и r — радиусы внутреннего и наружного цилиндров соответственно. Уравнение неразрывности после интегрирования по частям имеет вид

$$\int_0^1 \xi^2 \frac{d\omega}{d\xi} d\xi = \xi_0^2 - 1 \quad (4.2)$$



Фиг. 3. Зависимость критического числа R_* от критерия θ_* . Точки 1, ..., 18 соответствуют различным водным растворам; данные заимствованы из литературных источников [...], одновременно указаны значения диаметров в сантиметрах

1	0.3%-ный натрозол типа Н	1.27	[12]
2	0.3%-ный натрозол типа Н	2.54	[12]
3	1.0%-ный натрозол типа G	1.27	[12]
4	1.0%-ный натрозол типа G	2.54	[12]
5	0.29%-ный олеат аммония	0.30	[13]
6	0.75%-ная карбоксиметилцеллюлоза	1.47	[6]
7	0.75%-ная карбоксиметилцеллюлоза	1.90	[6]
8	1.0%-ная карбоксиметилцеллюлоза	1.27	[6]
9	0.2%-ный карбопол	1.27	[6]
10	0.2%-ный карбопол	1.54	[6]
11	0.3%-ный карбопол	1.27	[6]
12	0.3%-ный карбопол	2.54	[6]
13	0.4%-ный карбопол	1.27	[6]
14	0.4%-ный карбопол	2.54	[6]
15	0.5%-ный карбопол	1.27	[6]
16	0.5%-ный карбопол	2.54	[6]
17	бутадиен-стироловый латекс № 3	1.975	[7]
18	бутадиен-стироловый латекс № 4	1.975	[7]

Решая совместно (4.1) и (4.2), найдем, что R_* определяется нелинейным уравнением

$$\frac{R_*^3 \xi_*^2}{1280_* (1 - \xi_*^2)^2} \left[\frac{1 - \xi_0^5}{5} - \frac{2}{3} \xi_a^2 (1 - \xi_0^3) + \xi_a^4 (1 - \xi_0) \right] + \frac{R_* \xi_*}{16 (1 - \xi_a^2)} \left[\frac{1 - \xi_0^4}{4} - \frac{\xi_a^2}{2} (1 - \xi_a^2) \right] - (1 - \xi_0)^2 (1 + \xi_0) = 0 \quad (4.3)$$

Критическое значение коэффициента сопротивления меняется в зависимости от величины отношения радиусов ξ_0 . Так как надежные опытные данные во всем диапазоне значений ξ_0 отсутствуют, то можно рекомендовать при ξ_0 , близких к нулю, использовать значение ξ_* для круглой трубы, а при ξ_0 , близких к единице, ξ_* для плоской щели.

5. Пограничный слой на пластине. Запишем безразмерную скорость в виде

$$\omega = 4.25 R_0^{**} c_f (\xi - \xi^3 + 1/2 \xi^4) + 2.130_*^{-1} R_0^{**3} c_f^2 (4/7 \xi + 2\xi^6 + 9/5 \xi^5 + \xi^4 - 2\xi^3 + \xi) \quad (5.1)$$

$$R_0^{**} = \rho \Phi_0 \delta^{**} w_0, \quad \theta_* = \frac{\rho \Phi_0^3 \delta^{**2}}{\theta}, \quad c_f = \frac{2\tau_w}{\rho w_0^2}, \quad \omega = \frac{w}{\langle w \rangle}, \quad \xi = \frac{0.179y}{\delta^{**}}$$

Здесь c_f — коэффициент трения, δ^{**} — толщина потери импульса, w_0 — скорость потенциального потока. При $\omega = 1$ и $\xi = 1$

$$R_*^{**3} + \frac{2.690_*}{c_{f*}} R_*^{**} - 1.26 \frac{\theta_*}{c_{f*}} = 0 \quad (5.2)$$

Наступление переходного режима в пограничном слое на пластине существенно зависит от интенсивности турбулентности во внешнем течении. Коэффициент трения в случае ньютоновской жидкости можно найти из соотношения $c_f = 0.44/R^{**}$ и кривой зависимости критического числа Рейнольдса [12] от $1/3 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)/w_0^2$, где u_i — компонента пульсационной скорости набегающего потока.

6. Сопоставление с опытом. Экспериментальные данные [6, 7, 12, 13] по течению псевдопластических жидкостей ($\theta > 0$) в круглых трубах были обработаны в виде зависимостей $\varphi = \varphi(\tau)$ и $\zeta = \zeta(R_0)$.

Эти жидкости приближенно подчинялись линейному закону текучести вплоть до наступления переходного режима. Константы закона — текучесть при нулевом сдвиге Φ_0 и коэффициент структурной неустойчивости θ — находились при помощи метода наименьших квадратов. Начало переходного режима определялось по излому кривой $\zeta = \zeta(R_0)$. Примеры таких графиков приведены на фиг. 1 и 2.

На фиг. 3 опытные данные сопоставлены с формулами (2.9) — сплошная линия и (2.10) — штриховая линия. Согласование с опытом можно признать достаточным.

Автор благодарит С. С. Кутателадзе за научное руководство, Е. М. Хабахпашеву за обсуждение.

Поступила 2 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Winding C. C., Baumann G. P., Kranich W. L. Flow properties of pseudo-plastic fluids, p. II. Chem. Engng Progr., 1947, vol. 43, No. 10.
2. Alves G. E., Boucher D. T., Pigford R. L. Pipe-line design for non-Newtonian solutions and suspensions. Chem. Engng Progr., 1952, vol. 48, No. 8.
3. Dailey J. W., Bugliarello G. A particular non-Newtonian flow. Industr. and Engng Chem., 1959, vol. 51, No. 7, p. 887—888.
4. Metzner A. B., Reed J. C. Flow of non-Newtonian fluids—correlation of the laminar, transition, and turbulent-flow regions., AIChE Journ., 1959, vol. 5.
5. Bird R. B. Correlation of friction factors in non-Newtonian flow. AIChE Journ., 1956, vol. 2, No. 3, p. 428—429.
6. Ryan N. W., Johnson M. M. Transition from laminar to turbulent flow in pipes. AIChE Journ., 1959, vol. 5, No. 4, p. 433—435.
7. Ulbricht J. Przepływ uwarstwiony cieczy pseudoplastycznych. Chem. stosow., 1964, B. 1, No. 1, p. 45—56.
8. Hanks R. W. The laminar-turbulent transition for flow in pipes, concentric annuli, and parallel plates. AIChE Journ., 1963, vol. 9, No. 1, p. 45—48.
9. Кутателадзе С. С., Попов В. И., Хабахпашева Е. М. К гидродинамике жидкостей с переменной вязкостью. ПМТФ, 1966, № 1.
10. Whan G. A., Rothfus R. R. Characteristics of transition flow between parallel plates. AIChE Journ., 1959, vol. 5, No. 2, p. 204—208.
11. Турбулентные течения и теплопередача (под ред. Линь Цзя-цзяо). Изд. иностр. лит., 1963.
12. Meter D. M. Tube flow of non-Newtonian polymer solutions, p. II. AIChE Journ., 1964, vol. 10, No. 6, p. 881—884.
13. Ostwald Wo. Weitere Beiträge zur Kenntnis von Solen mit Struktur-Viscosität. Kolloid-Z., 1927, B. 43, H. 3, S. 155—184.