

Счет кавитационного параметра перед каждой корректировкой свободной границы производится по формуле

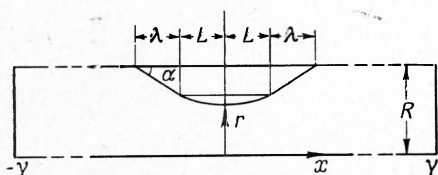
$$\sigma^s = \frac{1}{(R^2 - z_{k+1,0}^s)(z_{\psi}^s)_{k+1,0}^2} \left[4(R^2 - z_{k+1,0}^s) + \left(\frac{z_{k,0} - z_{k-1,0}}{h_{k,j}} \right)^2 \right] - 1 \quad (1.3)$$

де производная z_{ψ} по-прежнему расписывается по трем точкам [2]. Формула (1.3) обеспечивает гладкое примыкание свободной поверхности к кавитатору.

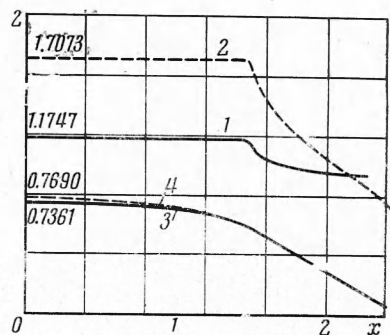
Расчеты проведены при следующих значениях параметров задачи (фиг. 1);

$$\alpha = 30^\circ, \quad \lambda = 1, \quad L = 1,5, \quad R = 2$$

В таблице приведены результаты расчетов для осесимметричного и плоского каналов



Фиг. 1



Фиг. 2

лов. На фиг. 2 для осесимметричного канала свободная поверхность и профиль скорости изображены сплошной линией, для плоского канала — пунктиром.

Поступила 24 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов Б. Г., Шепеленко В. Н., Яненко Н. Н. Расчет формы карверны в поле тяготения с учетом поверхностного натяжения. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1967, № 13, вып. 3.
2. Шепеленко В. Н. К расчету кавитационных течений. ПМТФ, 1968, № 5.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ДЛЯ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ КАВИТАЦИИ

Л. А. Галин, В. Г. Марков, А. П. Фролов

(Москва)

Рассматривается начальная стадия развития кавитации при обтекании тела потоком жидкости. Предлагается некоторая схема гидродинамических процессов, связанных с возникновением кавитационных течений, при условии, что число кавитации сравнительно велико и в некоторой зоне движется жидкость с относительно небольшим содержанием парогазовых пузырьков.

Результаты проведенных расчетов сравниваются с экспериментальными данными по определению размеров зоны кавитации. В качестве примера рассматривалось обтекание ступенчатого выступа в плоском канале.

1. При эксплуатации высоконапорных гидротехнических сооружений и различных гидравлических машин весьма распространены случаи кавитационной эрозии бетона и металлов, когда в начальной стадии кавитации возникает на выступах гладкой поверхности при сравнительно высоких числах кавитации

$$\kappa = \frac{2(p - p_v)}{\rho v^2} \quad (1.1)$$

Здесь p , ρ , v — соответственно давление, плотность и скорость жидкости, p_v — давление паров жидкости.

Как известно, при потенциальном обтекании идеальной жидкостью некоторого тела наименьшие давления наблюдаются на его поверхности, где и следует ожидать первоначальное возникновение кавитации. Из тщательно проведенных экспериментов видно, что при достижении соответствующего статического давления в районе минимума давления на поверхности обтекаемого тела возникают многочисленные паровые пузырьки. Вследствие наличия в обычной воде достаточно крупных ядер кавитации пузырьки образуются при давлениях лишь немногим меньших давления насыщающих паров [1]. По мере снижения давления или увеличения скорости набегающего потока возрастают растягивающие напряжения и создаются условия для развития ядер кавитации все более мелкого размера. Одновременно увеличивается длина участка поверхности обтекаемого тела, вдоль которого происходит развитие пузырьков.

Определение размера этого участка позволяет оценить величину той зоны, где будет иметь место кавитационная эрозия.

Фотоснимки, производимые с весьма небольшим интервалом времени, показывают, что положение конца кавитационной области пульсирует. Однако среднее положение конца этого участка будет вполне определенным. В дальнейшем исследуется некоторое осредненное движение.

Ряд экспериментальных исследований, в частности многочисленные опыты, результаты которых изложены в [2], позволяет сделать заключение, что в зоне, где возникает кавитация, давление на границе обтекаемого жидкостью тела равно постоянной величине. Это граничное условие будет использовано в дальнейшем при формулировке краевой задачи.

Явления, происходящие в зоне кавитации, можно описать следующим образом. В непосредственной близости к обтекаемому телу вектор скорости жидкости и вектор скорости некоторой фиктивной среды, состоящей из выделяющихся пузырьков, имеют различные величины и направления. Затем скорость и направление движения пузырьков и жидкости выравниваются, и в этой области движется смесь жидкости и пузырьков, которую, как известно, можно интерпретировать как некоторую сжимаемую жидкость [3,4], причем в начальной стадии кавитации движение будет дозвуковым.

Будем полагать, что ширина области, где происходит «двухскоростное» движение, мала и ее можно рассматривать как своеобразный пограничный слой. Поэтому в дальнейшем, как и в случае замены обтекания вязкой жидкостью обтеканием идеальной жидкостью, этим пограничным слоем будем пренебрегать, полагая, что вся область вне тела занята жидкостью с относительно небольшим содержанием пузырьков газа. Уравнение, которое описывает движение подобной жидкости, будет уравнением эллиптического типа, которое для небольших дозвуковых скоростей близко к уравнению Лапласа.

Ниже при решении задачи об отыскании длины зоны кавитации в качестве первого приближения будет использовано уравнение Лапласа.

Эти предположения, как видно из сравнения расчетных данных с опытными, будут вполне приемлемыми, так как они позволяют достаточно точно определить размеры зоны кавитации, величина которой представляет наибольший интерес. Этого, в общем, можно было ожидать, поскольку величина этой зоны является в известном смысле интегральной характеристикой.

При сделанных предположениях граничное условие на части поверхности обтекаемого тела, состоящее в том, что в зоне кавитации давление постоянно, приводит к различию на этом участке отличной от нуля нормальной составляющей скорости.

Это обстоятельство является следствием известной приближенности нашего рассмотрения. Следует заметить, что появление подобных фиктивных расходов встречается и в некоторых других моделях кавитационных течений (например, в модели Эффроса — Гильбарга). Для определения размера зоны кавитации используется естественное условие непрерывности давления во всей области, занятой движущейся жидкостью.

Будем полагать, что на части поверхности обтекаемого тела, где возникла кавитация, давление постоянно, т. е. постоянен модуль скорости, а на остальной части имеет место условие обтекания, т. е. будет задано направление вектора скорости.

Если ввести в рассмотрение функцию $\omega = \ln \zeta$, где ζ — комплексная скорость, то будем иметь

$$\omega = \ln |\zeta| + i \arg \zeta = u_1 + i v_1 \quad (1.2)$$

и таким образом для определения ω имеем условия задачи Гильберта. В задаче, которая ниже будет рассмотрена, оказывается более удобным воспользоваться методом годографа скорости.

При построении дальнейшего приближения нужно иметь в виду следующее обстоятельство: если ввести в качестве новых переменных модуль скорости β и угол θ , который составляет с осью координат вектор скорости, уравнение движения сжимаемой жидкости преобразуется к линейным уравнениям типа уравнений Чаплыгина. Точное решение в этом случае может быть построено для случая, когда контур тела состоит из отдельных прямых.

2. Рассмотрим начальную стадию кавитационного обтекания идеальной жидкостью выступа ступенчатой формы, имеющегося на дне плоского канала. Основное внимание будет уделено исследованию влияния относительной высоты выступа h/b (h — высота выступа, b — высота канала) и его геометрии на протяженность зоны кавитации.

Предполагая, что кавитационные пузырьки распределены в жидкости равномерно и достаточно малы, так что среду в первом приближении можно считать изотропной и несжимаемой, будем иметь для потенциала скоростей $\varphi(x, y)$ уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

Введем в рассмотрение плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ (фиг. 1). Задача об отыскании размера области постоянного давления состоит в построении комплексного потенциала потока $w(z) = \varphi + i\psi$, где $\psi(x, y)$ — функция тока.

Комплексная скорость

$$\zeta = dw/dz = \xi + i\eta$$

удовлетворяет следующим условиям: в бесконечно удаленной точке A $\zeta = v_A$; на участках AE , AB , DE имеем $\eta = 0$. Согласно сделанным предположениям давление на участке CD постоянно. Вследствие этого из интеграла Бернулли находим

$$|\zeta|^2 = v_A^2 + 2(p - p_v)/\rho \text{ на } CD$$

В частности, отсюда получаем

$$v_C^2 = v_D^2 = v_A^2 + 2(p - p_v)/\rho$$

Таким образом, в плоскости годографа ζ области действительного течения соответствует внутренность кругового сектора с углом раствора $\alpha\pi$ ($0 < \alpha \leq 1/2$), (фиг. 1).

Для решения задачи необходимо найти конформное отображение, переводящее область, занятую движущейся жидкостью, в сектор на плоскости годографа. Первоначально переведем рассматриваемые области в верхнюю полуплоскость вспомогательного переменного u (фиг. 1) с указанным соответствием точек.

Функция, осуществляющая отображение верхней полуплоскости u на область течения в плоскости z , определяется интегралом Кристоффеля — Шварца

$$z = c_1 \int_{-1}^u \frac{(u+1)^\alpha du}{(u-u_A)(u-u_E)} \quad (2.1)$$

Для нахождения постоянной интегрирования c_1 и неизвестных координат точек A и E на плоскости u воспользуемся тем обстоятельством, что при обходе точек A и E на плоскости u по бесконечно малым полуокружностям функция, определяемая интегралом (2.1), получает приращения $-(b+h)i$ и bi соответственно (фиг. 1).

Имеем два алгебраических уравнения

$$c_1 \frac{(u_E+1)^\alpha}{u_E-u_A} = \frac{b}{\pi}, \quad c_1 \frac{(u_A+1)^\alpha}{u_E-u_A} = \frac{b+h}{\pi} \quad (2.2)$$

Из (2.2) две неизвестные величины можно выразить через третью, например, u_A и геометрические размеры канала

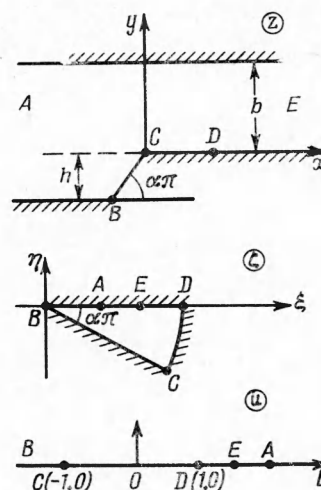
$$u_E = (u_A+1) \left(\frac{b}{b+h} \right)^{1/\alpha} - 1, \quad c_1 = \frac{h}{\pi} \frac{u_A - u_E}{(u_A+1)^\alpha - (u_E+1)^\alpha} \quad (2.3)$$

Постоянную u_A определим несколько позже.

Выражение интеграла (2.1) через элементарные функции возможно только при рациональных α . Поэтому в дальнейшем положим $\alpha = m/n$, где m, n — натуральные числа.

Представляя интеграл (2.1) в виде суммы двух интегралов и используя в каждом из них замену переменного вида

$$(u+1)^{1/n} = t \quad (2.4)$$



Фиг. 1

получим

$$z = \frac{c_1 n}{u_A - u_E} \left[(u_A + 1) \int_0^t \frac{t^{m-1} dt}{t^n - (u_A + 1)} - (u_E + 1) \int_0^t \frac{t^{m-1} dt}{t^n - (u_E + 1)} \right] \quad (2.5)$$

Рассмотрим первый интеграл из (2.5). Разложение подынтегральной функции на простые дроби дает

$$\frac{t^{m-1}}{t^n - (u_A + 1)} = \frac{1}{n(u_A + 1)} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{t_\nu^m}{t - t_\nu} \quad (2.6)$$

$$(t_\nu = |u_A + 1|^{1/n} e^{2\nu\pi i/n})$$

При интегрировании каждого слагаемого из (2.6) в пределах от 0 до t выбирается главное значение логарифма

$$\Lambda(t, t_\nu) = \int_0^t \frac{dt}{t - t_\nu} = \ln \left(1 - \frac{t}{t_\nu} \right) \quad (2.7)$$

Окончательно отображающую функцию $z(u)$ получим в виде

$$z = \frac{c_1}{u_A - u_E} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} t_\nu^m \Lambda(t, t_\nu) - \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu^m \Lambda(t, s_\nu) \right] \quad (2.8)$$

где s_ν — корни уравнения

$$s^n - (u_E + 1) = 0$$

Используя некоторые элементарные функции, построим конформное отображение внутренности кругового сектора плоскости ζ (фиг. 1) на верхнюю полуплоскость u

$$u = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\zeta}{v_D} \right)^{1/\alpha} + \left(\frac{v_D}{\zeta} \right)^{1/\alpha} \right] \quad (2.9)$$

Координату точки A на плоскости u находим из (2.9) при $\zeta = v_A$

$$u_A = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v_A}{v_D} \right)^{1/\alpha} + \left(\frac{v_D}{v_A} \right)^{1/\alpha} \right] \quad (2.10)$$

После того как все постоянные, входящие в отображающую функцию (2.8), определены, координата точки D , равная длине области постоянного давления l на плоскости z , находится из (2.8) при $u = 1$ (фиг. 1)

$$l = \frac{c_1}{u_A - u_E} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \left\{ t_\nu^m \ln \left(1 - \frac{2^{1/n}}{t_\nu} \right) - s_\nu^m \ln \left(1 - \frac{2^{1/n}}{s_\nu} \right) \right\} \right] \quad (2.11)$$

В частности, при наличии на дне канала выступа прямоугольной формы ($\alpha = 1/2$) формула (2.8) значительно упрощается

$$z = \frac{h}{\pi (\sqrt{u_A + 1} - \sqrt{u_E + 1})} \left(\sqrt{u_E + 1} \ln \frac{\sqrt{u_E + 1} + \sqrt{u + 1}}{\sqrt{u_E + 1} - \sqrt{u + 1}} - \sqrt{u_A + 1} \ln \frac{\sqrt{u_A + 1} + \sqrt{u + 1}}{\sqrt{u_A + 1} - \sqrt{u + 1}} \right) \quad (2.12)$$

Учитывая соотношение

$$v_D^2 = v_A^2 (1 + \kappa)$$

запишем в явном виде зависимость l от числа кавитации κ при $\alpha = 1/2$

$$l = \frac{b}{\pi} \ln \frac{[bf + (b+h)\sqrt{2}](f - \sqrt{2})}{[bf - (b+h)\sqrt{2}](f + \sqrt{2})} - \frac{h}{\pi} \ln \frac{f + \sqrt{2}}{f - \sqrt{2}} \quad (2.13)$$

где

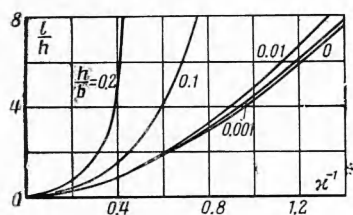
$$f^2 = \frac{(2 + \kappa)^2}{2(\kappa + 1)}$$

Совершая в формуле (2.13) предельный переход при $b \rightarrow \infty$, получим длину области постоянного давления при обтекании прямоугольного выступа безграничным потоком

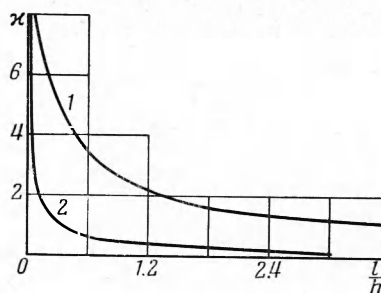
$$l_{\infty} = \frac{h}{\pi} \left[\frac{4(\kappa + 2) \sqrt{\kappa + 1}}{\kappa^2} - 2 \ln \frac{\sqrt{\kappa + 1} + 1}{\sqrt{\kappa + 1} - 1} \right] \quad (2.14)$$

На фиг. 2 представлена зависимость относительной длины зоны постоянного давления l/h от числа кавитации κ , рассчитанная по формуле (2.13) для некоторых значений относительной высоты выступа h/b . Обнаружено, что высота канала оказывает значительное влияние на размер зоны кавитации при $h/b > 0.001$.

Сравним длину зоны кавитации, определяемую формулой (2.14), с размером области, где давление меньше давления паров жидкости и которая получается при решении задачи о безотрывном обтекании прямоугольного выступа безграничным потоком жидкости, способной выдерживать бесконечные растягивающие напряжения. При этом граничное условие $\eta = 0$ выполняется уже на всей полупрямой SE (фиг. 1).



Фиг. 2

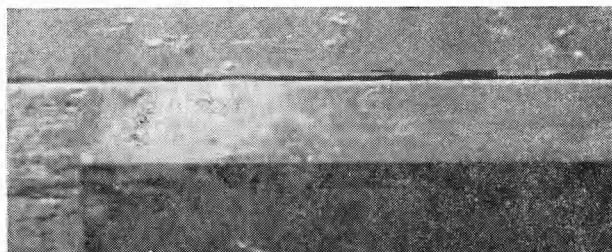


Фиг. 3

Длина участка l_{∞}^* , где давление $p < p_v$, находится известным способом и определяется формулой

$$l_{\infty}^* = \frac{h}{\pi} \left[\frac{2 \sqrt{1 + \kappa}}{\kappa} - \ln \frac{\sqrt{1 + \kappa} + 1}{\sqrt{1 + \kappa} - 1} \right] \quad (2.15)$$

Зависимости $l_{\infty}(\kappa)$ и $l_{\infty}^*(\kappa)$ приведены на фиг. 3, где кривая 1 соответствует длине зоны кавитации согласно формуле (2.14), кривая 2 — длине области, в которой $p < p_v$, по формуле (2.15). Из фиг. 3 видно, что $l_{\infty} \approx 10 l_{\infty}^*$ при малых значениях κ ; при больших числах кавитации $l_{\infty}/l_{\infty}^* \rightarrow 2$.



Фиг. 4

3. Для подтверждения положений, на основании которых построен теоретический анализ, была проведена серия экспериментальных исследований кавитационного обтекания выступов в кавитационной лаборатории ИПМ АН СССР при участии К. К. Шальнева.

Эксперименты проводились в гидродинамической трубе, имеющей рабочую камеру размером $24 \times 100 \text{ мм}^2$. Модели выступов высотой $h = 9.0, 7.0, 3.6$ и 1.8 мм устанавли-

