

3. Антонов А. Н., Бондарев Е. Н. Приближенный метод расчета турбулентного пограничного слоя при положительном градиенте давления.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1968, № 1.
4. Юделович М. Я. Приближенная методика расчета донного давления для тел сферической формы.— «Изв. АН СССР. Механика», 1965, № 3.
5. Антонов А. Н. Расчет взаимодействия турбулентного пограничного слоя с внешним сверхзвуковым потоком за уступом.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1971, № 3.
6. Kuehn D. M. Turbulent boundary-layer separation induced by flares on cylinders at zero angle of attack. NASA Techn. Rep. R — 117, 1961.
7. Богдонов, Кешлер. Отрыв турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— Сб. пер. Вопросы ракетной техники, 1956, № 6.
8. Меллор Дж. Л., Джибсон Д. М. Равновесные турбулентные пограничные слои.— Сб. пер. Механика, 1967, № 2 (102).
9. McDonald H. The turbulent supersonic base pressure problem and comparison between a theory and some experimental evidence.— «Aeronaut. Quart.», 1966, N 17.
10. Chapman D., Kuehn D., Larson H. Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. NASA, Rep. N 1356, 1956.
11. Дьяконов Ю. Н., Зайцев Н. А. Обтекание затупленного тела сверхзвуковым потоком идеального газа.— «Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение», 1963, № 1.

УДК 532.517.4

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ

М. А. Гольдштик, М. Х. Правдина

(Новосибирск)

Произведены проверка и уточнение расчетов [1] и критический анализ интерпретации экспериментальных данных [2, 3]. Предложена модель, непосредственно учитывающая в уравнениях движения члены, описывающие взаимодействие возмущения с турбулентными пульсациями. Показаны преимущества такого подхода по сравнению с использованием моделей турбулентной вязкости.

В последние годы возрос интерес к проблеме устойчивости турбулентных потоков, связанный с попытками предсказания осредненных характеристик турбулентного потока на основе свойств его устойчивости [4—7]. До недавнего времени задача об устойчивости решалась только в квазиламинарном приближении, когда взаимодействие возмущения с пульсациями не учитывалось [5]. Это было связано с отсутствием экспериментального материала, который позволил бы апробировать какие-либо модели, описывающие такое взаимодействие. В 1970—1972 гг. появилась серия работ Рейнольдса и Хуссейна [1—3], осуществивших уникальные эксперименты и первые расчеты по моделям, учитывающим взаимодействие слабого неслучайного сигнала с турбулентностью для течения в канале.

В некотором сечении канала вносилось периодическое возмущение (вибрирующие полоски около стенок) и изучалось его распространение вниз по течению. Был выделен слабый неслучайный сигнал, составлявший около 4% от турбулентных пульсаций скорости. Эксперименты производились для четырех частот при числе Рейнольдса ($Re=13800$), рассчитанном по полуширине канала и максимальной скорости [2].

В связи с этим экспериментом ставится пространственная задача об устойчивости турбулентного потока в линейном приближении. На

правомерность линейного приближения указывает экспоненциальный характер затухания сигнала [2—3].

Уравнения для возмущений имеют вид

$$(1) \quad \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial (U_j \langle v_i \rangle + U_i \langle v_j \rangle)}{\partial x_j} = - \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \langle v_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} - \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle v_i v_j^m + v_i^m v_j \rangle; \quad \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_j} = 0,$$

где v_i , p — возмущения скорости и давления; v_i^m — пульсационная скорость в невозмущенном течении; U_i — осредненная скорость. Угловые скобки обозначают осреднение по ансамблю.

Последний член в правой части уравнения (1) описывает взаимодействие возмущения с турбулентными пульсациями. В квазиламинарном приближении он отбрасывается. В моделях, предложенных в [1], этот член учитывается с помощью эффективной турбулентной вязкости. Решение разыскивается в виде

$$(2) \quad \langle v_i \rangle = u_i(y) e^{i(\alpha x - \omega t)},$$

где x и y — координаты вдоль и поперек канала; ω — заданная частота; α — комплексное собственное значение. Если в таком же виде представить последний член уравнения (1)

$$\langle v_i v_j^m + v_i^m v_j \rangle = \tau_{ij}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)},$$

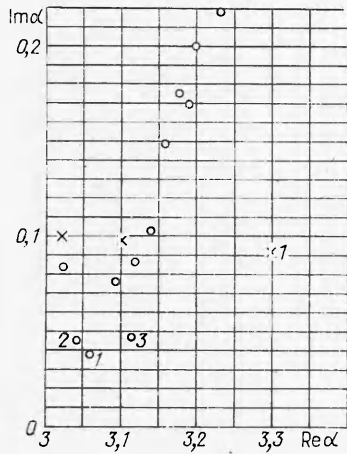
где τ_{ij} — комплексная амплитуда пульсаций возмущений рейнольдсовых напряжений, то для комплексных амплитуд пульсаций получится уравнение Орра-Зоммерфельда вида [1]

$$\alpha (U_x - c) (u_y'' - \alpha^2 u_y) - \alpha U_x'' u_y = - \frac{i}{\text{Re}} (u_y^{\text{IV}} - 2\alpha^2 u_y'' + \alpha^4 u_y) + \\ + i\alpha^2 (\tau_{xx}' - \tau_{yy}') + \alpha (\tau_{xy}'' + \alpha^2 \tau_{xy}).$$

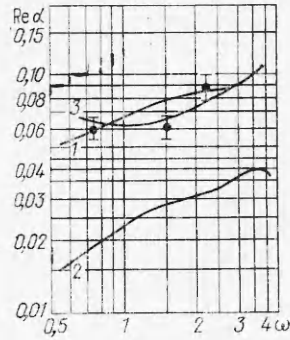
При расчетах в [1] последние два члена отбрасывались, а в качестве компенсации число $\frac{1}{\text{Re}}$ заменялось на $\frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re}_m}$, где $\text{Re}_m = \frac{\nu}{\varepsilon} \text{Re}$ — турбулентное число Рейнольдса, рассчитанное по турбулентной вязкости ε (ν — молекулярная кинематическая вязкость). Сравнение экспериментальных данных с результатами расчетов, проведенное в [1], показало, что декременты затухания, рассчитанные по квазиламинарной модели, значительно превышают экспериментальные, а также рассчитанные по моделям с турбулентной вязкостью. Последний результат является непредвиденным, поскольку ожидалось, что учет взаимодействия возмущения с пульсациями должен привести к стабилизации. Поэтому нами осуществлена проверка этих вычислений.

На фиг. 1 кружочками изображены несколько первых собственных значений (пронумерованных в порядке возрастания декремента), рассчитанных по квазиламинарной модели методом дифференциальной прогонки [8] при $\omega=3$ и $\text{Re}=13800$. На фиг. 2 (кривая 2) показана зависимость декремента затухания от частоты для первой моды.

Собственные значения можно разделить на два класса, соответствующие приосевым и пристенным модам. Пристенные моды характеризуются тем, что при увеличении частоты их фазовая скорость уменьшается и критический слой смещается к стенке, тогда как у приосевых мод фазовая скорость растет с частотой и критический слой смещается к оси. Выяс-



Ф и г. 1



Ф и г. 2

нилось, что в [1] по квазиламинарной модели была рассчитана не первая мода, а мода с номером > 30 , оказавшаяся первой из пристенных.

Хорошего согласия с экспериментом от квазиламинарного приближения можно ожидать в двух случаях: во-первых, для пристенных мод в условиях локальности [9], во-вторых, для коротких волн при относительно слабой степени турбулентности. В обоих случаях последний член уравнения (1) становится несущественным. Действительно, объединяя в уравнении (1) последний член в правой части с последним членом в левой части, получим

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} [(U_j + v_j^m) v_i + (U_i + v_i^m) v_j] \right\rangle$$

или после дифференцирования с использованием уравнения неразрывности

$$(3) \quad \left\langle (U_j + v_j^m) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial (U_i + v_i^m)}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Вблизи стенки, где скорости малы, первым членом в (3) можно пренебречь по сравнению со вторым, который содержит градиенты скоростей. При слабой турбулентности в этой области $|\text{grad } U_x| \gg |\text{grad } v_i^m|$, поэтому влияние турбулентности несущественно и пристенные моды в условиях локальности [9] ($\text{Re } \alpha \geq 1,5$) должны хорошо описываться квазиламинарной моделью. Вблизи оси в случае коротких волн первый член много больше второго, но при слабой турбулентности в нем можно пренебречь v^m по сравнению с U , и снова годится квазиламинарная модель. В случае длинных волн второй член в (3) становится существенным и квазиламинарное приближение не проходит, это позволяет заключить, что для сравнения расчета по квазиламинарной модели с экспериментом следует использовать первую пристенную моду. Но анализ данных [2,3] показал, что в эксперименте на участке стабилизации присутствуют только приосевые моды и, следовательно, по приосевым модам нужно вести сравнение. Здесь квазиламинарная модель дает сильно заниженные декременты затухания, так как вблизи оси $|\text{grad } v_i^m| \gg |\text{grad } U_x|$, и снова влияние последнего члена в (3) становится существенным. Если учитывать это влияние, вводя эффективную турбулентную вязкость, как сделано в [1], то в условиях локальности для приосевых мод, когда $\text{Re } \alpha \geq 0,2$

[9], не имеет смысла рассматривать переменную по сечению турбулентную вязкость и можно заменить ее постоянной, но зависящей от частоты.

В [1] рассчитана модель постоянной турбулентной вязкости при $\varepsilon/\nu=40$. Первая мода оказалась приосевой. Результаты этих расчетов нами подтверждены, но сравнение с экспериментальными данными, как и интерпретация последних, неудовлетворительное. Поскольку авторам [2,3] не удалось выделить единственную моду, то декременты, полученные как некоторые средние по сечению или по какому-либо максимуму, скорее отражают взаимодействие мод, чем затухание.

Эксперимент показал, что наименее затухают приосевые моды. Первая мода, рассчитанная по модели турбулентной вязкости, тоже оказалась приосевой. Поэтому для сравнения было бы интересно выделить декременты затухания вблизи оси. Анализ графиков, приведенных в [3], показал, что декременты затухания для $y/\delta=0,1$ (δ — полуширина канала, расстояние y отсчитывается от оси) неплохо описываются моделью постоянной турбулентной вязкости $\varepsilon/\nu=40$ для $\omega=0,75-2,25$ (см. фиг. 2, кривая 1). При $\omega=3$ в точке $y/\delta=0,1$ имеет место нарастание. Это означает, что различные моды слишком сильно перекрываются и данные при $\omega=3$ не следует рассматривать. Остается непонятным, почему нужно принять $\varepsilon/\nu=40$, тогда как по данным [10] в этих условиях $\varepsilon/\nu=80$.

Задача о затухании сигнала в турбулентном потоке осложняется тем, что возмущение вовлекается в каскадный процесс. Энергия сигнала, имевшего первоначально заданную частоту, передается другим частотам. Для точного решения необходимо найти каждую из порождаемых гармоник и сам каскадный процесс, что пока неосуществимо. Наша задача — изучить поведение сигнала первоначальной частоты. Влияние на него турбулентности будем учитывать лишь эффективно. Если это возможно, то упомянутое влияние должно быть таким, чтобы уравнения движения допускали гармоническое решение. Отсюда следует, во-первых, требование линейности моделируемого члена по скорости возмущения

$$(4) \quad \langle v_i v_j^m + v_i^m v_j \rangle = v_i w_j + v_j w_i,$$

во-вторых, независимость от однородных переменных вектора w , который имеет смысл некоторой средней скорости и должен определяться лишь осредненными характеристиками турбулентного потока; вообще w должен зависеть от всех моментов, однако в качестве первого пробного шага ограничимся при его построении лишь первыми и вторыми моментами: осредненной скоростью и тензором напряжений Рейнольдса с его инвариантами.

К модели последнего члена в уравнении (1)

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \langle v_i v_j^m + v_i^m v_j \rangle$$

должны быть предъявлены следующие требования: 1) линейность по скорости возмущения, 2) линейность по интенсивности турбулентных пульсаций; 3) близость к моделируемому объекту по порядку величины, сохранение порядка убывания к стенке, 4) сохранение порядка дифференцирования и дивергентности, 5) локальность, 6) сохранение свойств симметрии.

Заметим, что подстановка (4) в (1) эквивалентна замене U_i на $U_i + w_i$, т. е. вектор w играет роль некоторой добавочной скорости. Его величина не должна зависеть от осредненной скорости и поэтому может определяться лишь компонентами тензора напряжений Рейнольдса. Вектор U может оказывать только ориентирующее влияние. По порядку величины вектор

w должен быть близок к среднеквадратичному значению турбулентных пульсаций скорости.

Можно указать только две инвариантные комбинации рассматриваемых осредненных величин, дающие нужный порядок величины для w :

$$(6) \quad w_i = \gamma \frac{\langle v_i^m v_j^m \rangle}{\sqrt{\langle v_k^m v_k^m \rangle}} \frac{U_j}{|U|};$$

$$(7) \quad w_i = \gamma \sqrt{\langle v_i^m v_j^m \rangle} \frac{U_j}{|U|}.$$

Здесь γ — численный коэффициент порядка единицы.

При подстановке каждой из этих комбинаций в (5) удовлетворяются требования 1)–5). Требованию 6) удовлетворяет только комбинация (6), так как (7) не удовлетворяет условию симметрии.

Численный коэффициент γ в (6) определим из следующих соображений. Считая, что в ядре потока турбулентность близка к однородной и изотропной $\langle (v_x^m)^2 \rangle \approx \langle (v_y^m)^2 \rangle \approx \langle (v_z^m)^2 \rangle$, потребуем, чтобы на оси выполнялось $w_x \approx \sqrt{\langle (v_x^m)^2 \rangle}$, отсюда $\gamma \approx \sqrt{3}$.

Подставляя (4) в (1) и разыскивая решение в виде (2), получим для комплексных амплитуд пульсаций уравнение

$$(8) \quad \alpha(U_x + w_x - c)(u_y'' - \alpha^2 u_y) - \alpha(U_x'' + w_x'') u_y = - \\ - \frac{i}{\text{Re}} (u_y^{\text{IV}} - 2\alpha^2 u_y'' + \alpha^4 u_y) + i[(w_y u_y)'' - \alpha^2 (w_y u_y)' - \alpha^2 (w_y' u_y)].$$

Для сравнения с экспериментом рассчитываются симметричные по y возмущения, поэтому граничные условия имеют вид

$$(9) \quad u_y = u_y' = 0 \quad \text{на стенке,} \\ u_y' = u_y'' = 0 \quad \text{на оси.}$$

Расчеты производились для (8), (9) с учетом (6) при $\gamma = \sqrt{3}$. Осредненные характеристики брались из экспериментальных данных [2,11]. Уравнение решалось методом дифференциальной прогонки [8].

Как видно из фиг. 1 (крестиками нанесены первые собственные значения для $\omega=3$), модель предсказывает существование нескольких мод с очень близкими декрементами затухания и близкими волновыми числами. Первые моды оказались приосевыми. В диапазоне частот, исследованном экспериментально, модель хорошо описывает затухание вблизи оси (см. фиг. 2, кривая 3). Декременты затухания для одной моды в эксперименте не были выделены, поэтому сравнение проводилось по данным в приосевой зоне.

Заметим, что модель и моделируемый объект близки по порядку величины, отсюда влияние нового члена сказывается только там, где квазиламинарное приближение неприменимо. Это является преимуществом по отношению к моделям турбулентной вязкости, в которые необходимо вводить зависимость от частоты. В частности, для коротких волн, когда возмущение теряет энергию преимущественно вязким образом, эффективная турбулентная вязкость ϵ должна обращаться в нуль. В [12] предпринимается попытка дать обоснование моделям турбулентной вязкости и выяснить соответствующую зависимость от частоты, которая будет сложной и искусственной, так как введение турбулентной вязкости вместо последнего члена уравнения (1) не отражает характер моделируемого

объекта, а просто заменяет один механизм передачи энергии другим.

К сожалению, экспериментальных данных еще слишком мало, чтобы можно было сделать на их основании окончательные выводы. Но очевидно, что прямое моделирование члена, описывающего взаимодействие возмущения с пульсациями, отражая ряд существенных свойств моделируемого объекта, позволит описать явление относительно просто, без введения больших коэффициентов, сложно зависящих от частоты.

Авторы приносят благодарность В. Н. Штерну за обсуждение работы.

Поступила 23 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Reynolds W. C., Hussain A. K. M. F. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Pt 3. Theoretical models and comparisons with experiments.— «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 54, pt 2, p. 263—288.
2. Hussain A. K. M. F., Reynolds W. C. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow.— «J. Fluid Mech.», 1970, vol. 41, pt 2, p. 241—258.
3. Hussain A. K. M. F., Reynolds W. C. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. Pt 2. Experimental results.— «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 54, pt 2, p. 241—261.
4. Гольдштик М. А. Принцип максимальной устойчивости осредненных турбулентных течений.— «Докл. АН СССР», 1968, т. 182, № 5, с. 1026.
5. Гольдштик М. А., Кутателадзе С. С. Вычисление константы пристенной турбулентности.— «Докл. АН СССР», 1969, т. 185, № 3, с. 535.
6. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Определение закона турбулентного трения в ядре потока на основе принципа максимальной устойчивости.— «Докл. АН СССР», 1969, т. 188, № 4, с. 772.
7. Гольдштик М. А., Сапожников В. А., Штерн В. Н. Определение профиля скорости в вязком подслое на основе принципа максимальной устойчивости.— «Докл. АН СССР», 1970, т. 193, № 4, с. 784.
8. Сапожников В. А. Решение задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.— В кн.: Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости (II). Новосибирск, «Наука», 1969.
9. Штерн В. Н. Глобальная и локальная устойчивость течения вязкой жидкости.— В кн.: Пристенная турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1973.
10. Reynolds W. C., Tiederman W. G. Stability of turbulent channel flow, with application to Malkus's theory.— «J. Fluid Mech.», 1967, vol. 27, pt 2, p. 253—272.
11. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., «Мир», 1968.
12. Davis R. E. Perturbed turbulent flow, eddy viscosity and the generation of turbulent stresses.— «J. Fluid Mech.», 1974, vol. 63, pt 4, p. 673—693.

УДК 532.62+532.592+594

РАЗВИТЫЕ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ, ОБТЕКАЕМОЙ ГАЗОМ

Л. Н. Маурин, Г. Э. Одишария, А. А. Точигин

(Иваново, Москва)

Рассматриваются волновые квазигармонические движения тонкой жидкой пленки, текущей по вертикальной плоскости под действием силы тяжести, капиллярных сил и касательного напряжения, действующего на границе пленка — газ.

Найдены область существования и спектральные характеристики волновых квазигармонических решений в разных режимах движения пленки (в прямооттоке и противотоке).

1. Рассмотрим движение тонкой пленки вязкой жидкости, текущей по вертикальной плоскости под действием гравитационных и капиллярных сил и напряжений, возникающих на поверхности пленки при обтека-