ПМТФ, № 5, 1970

К УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

А. Н. Спорыхин

(Воронеж)

Обсуждается устойчивость упруго-пластической среды, когда одна часть тела находится в упругом, а другая — в пластическом состоянии.

На устойчивость деформирования упруго-вязко-пластической упрочняющейся среды обобщаются результаты, полученные в [1] в предположении, что все тело находится в пластическом состоянии.

Линеаризированные соотношения применяются для изучения устойчивости толстостенных труб при плоской деформации под действием внутреннего давления для различных случаев поведения нагрузки как «следящей», так и «мертвой» при малых отклонениях тела от невозмущенного равновесия.

Аналогичная задача в квазистатической постановке для трубы из упрочняющегося идеально пластического материала и по теории малых упруго-пластических деформаций рассматривалось в [2].

1. Рассмотрим невозмущенное равновесие упрочняющегося упруго-вязко-пластического тела объема V, характеризуемое вектором перемещений $u_i^\circ(x_k, t)$, тензором напряжений $\sigma_{ij}^\circ(x_k, t)$, векторами объемных и поверхностных сил F_i° и p_i°, и пусть $x_i(\zeta, t)$ есть поверхность, разделяющая области упругого и пластического состояний среды.

Исследование устойчивости равновесия тела объема V сводится к решению уравнений в вариациях и соответствующих граничных условий [3], которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$(\overset{+}{\sigma}_{ij} + \overset{\circ}{\sigma}_{jk} u_{i,\overset{+}{k}})_{,j} + \overset{+}{F}_i - \rho \ddot{u}_i^{+} = 0, \qquad (\overset{+}{\sigma}_{ij} + \overset{\circ}{\sigma}_{jk} u_{i,\overset{+}{k}}) n_j = \overset{+}{p}_i \tag{1.1}$$

Компоненты характеристик возмущенного движения отмечены значком плюс.

На упруго-пластической границе напряжения и перемещения непрерывны. Отсюда

$$[\overset{+}{\sigma}_{ij} + \overset{\circ}{\sigma}_{ij,k} x_k^{+}] \nu_j = 0, \quad [u_i^{+} + \overset{\circ}{u}_{i,k} x_k^{+}] = 0 \quad (i, j = 1, 2) \tag{1.2}$$

Здесь квадратные скобки означают разность соответствующих величин.

Определяющие вариационные соотношения могут быть записаны в виде следующих зависимостей [1]:

а) в пластической зоне

$$\begin{gathered}[2\mu\overset{+}{\sigma}_{ij} - {}^2/_3\mu(3\lambda + 2\mu)\overset{+}{e}_{kk}\delta_{ij} - c(\lambda \overset{+}{e}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu \overset{+}{e}_{ij} - \overset{+}{\sigma}_{ij}) - \\ - \eta(\lambda \dot{\overset{+}{e}}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu \dot{\overset{+}{e}}_{ij} - \dot{\overset{+}{\sigma}}_{ij})](\overset{\circ}{s}_{ij} - c e_{ij}^{p\circ} - \eta \dot{e}_{ij}^{p\circ}) = 0\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}(1 + \eta\psi_0)(\lambda \dot{\overset{+}{e}}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu \dot{\overset{+}{e}}_{ij} - \dot{\overset{+}{\sigma}}_{ij}) + c\psi_0(\lambda \overset{+}{e}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu \overset{+}{e}_{ij} - \overset{+}{\sigma}_{ij}) = \\ = k^{-2}(\lambda \dot{\overset{+}{e}}_{nn}\delta_{kl} + 2\mu \dot{\overset{+}{e}}_{kl} - \dot{\overset{+}{\sigma}}_{kl})(\overset{\circ}{s}_{kl} - c e_{kl}^{p\circ} - \eta \dot{e}_{kl}^{p\circ})(\overset{\circ}{s}_{ij} - c e_{ij}^{p\circ} - \eta \dot{e}_{ij}^{p\circ}) + \\ + \psi_0(2\mu\sigma_{ij}^{+} - {}^2/_3\mu(3\lambda + 2\mu) e_{kk}^{+}\delta_{ij})\end{gathered}$$

б) в упругой зоне

$$\overset{+}{\sigma}_{ij} = \lambda \overset{+}{e}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu \overset{+}{e}_{ij} \tag{1.4}$$

Здесь деформации связаны с перемещениями по формулам

$$e_{ij} = {}^1/_2 (u_{i,j}^{+} + u_{j,i}^{+} + \overset{\circ}{u}_{k,i} u_{k,j}^{+} + \overset{\circ}{u}_{k,j} u_{k,i}^{+}) \tag{1.5}$$

Применяя методику, развитую в п. 2—4 работы [1], можно аналогичным образом свести краевую задачу (1.1) — (1.5) к исследованию системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При этом уравнения равновесия и граничные условия на поверхности (1.1) приводятся к уравнениям

$$(\textstyle\sum_{ij} + \overset{\bullet}{\sigma}_{jk} U_{i,k})_{,j} + F_i + \rho\omega^2 U_i = 0, \quad (\textstyle\sum_{ij} + \overset{\circ}{\sigma}_{jk} U_{i,k}) n_j = p_i \tag{1.6}$$

В дальнейшем индекс p будет обозначать величины, относящиеся к пластической области, e — упругой.

Из (1.3) получим

$$\textstyle\sum_{ij}^{p} = \lambda E_{kk}\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} - \dfrac{4\mu^2}{k^2(2\mu + c + s\eta)} (E_{kl} - {}^1/_3 E_{mm}\delta_{kl})(\overset{\circ}{s}_{kl} - ce_{kl}^{p\circ}) \times$$
$$\times (\overset{\circ}{s}_{ij} - ce_{ij}^{p\circ}), \quad s = i\omega \tag{1.7}$$

В упругой области имеют место соотношения

$$\textstyle\sum_{ij}^{e} = \lambda E_{kk}\delta_{ij} + 2\mu E_{ij} \tag{1.8}$$

При этом из (1.5) получим

$$E_{ij} = {}^1/_2 (U_{i,j} + U_{j,i} + \overset{\circ}{u}_{k,i} U_{k,j} + \overset{\circ}{u}_{k,j} U_{k,i}) \tag{1.9}$$

Условия (1.2) принимают вид

$$[\textstyle\sum_{ij} + \overset{\circ}{\sigma}_{ij,k} X_k] = 0, \qquad [U_i + \overset{\circ}{u}_{i,k} X_k] = 0 \tag{1.10}$$

2. Рассмотрим трубу радиусов r_1 и r_2, находящуюся под действием внутреннего давления p.

Известно [3], что характер поведения нагрузки при малых отклонениях тела от невозмущенного равновесия может оказать существенное влияние на устойчивость (неустойчивость).

В отличие от [2], где принято, что в результате малых возмущений нагрузка не изменяет свое направление, рассмотрим случай следящей нагрузки. В этом случае правая часть второго уравнения (1.6) имеет вид

$$p_i = p_j^{\circ} U_{i,j} \tag{2.1}$$

Напряженное и деформируемое состояние трубы из упрочняющегося упруго-вязко-пластического материала при плоской деформации до потери устойчивости определяется выражениями

$$\sigma_r^{p\circ} = -p_0 + (2 + c_0)^{-1} [4k_0 \ln(r/\alpha) - c_0 C(r^{-2} - \alpha^{-2})] \tag{2.2}$$
$$\sigma_\theta^{p\circ} = -p_0 + (2 + c_0)^{-1} [4k_0 (1 + \ln(r/\alpha)) + c_0 C(r^{-2} + \alpha^{-2})], \quad \sigma_{r\theta}^{p\circ} = 0$$
$$e_r^{p\circ} = (k_0 r^2 - C)/r^2(2 + c_0), \quad e_\theta^{p\circ} = -(k_0 r^2 - C)/r^2(2 + c_0), \quad e_{r\theta}^{p\circ} = 0$$
$$\sigma_r^{e\circ} = C(1 - r^{-2}), \quad \sigma_\theta^{e\circ} = C(1 + r^{-2}), \quad \sigma_{r\theta}^{e\circ} = 0, \quad u^{\circ} = C/r, \quad C = k_0\gamma^2,$$
$$\alpha = r_1 | r_2$$

где r — текущий безразмерный радиус, причем здесь и в дальнейшем все величины, имеющие размерность длины, отнесены к внешнему радиусу r_2, а величины, имеющие размерность напряжения, отнесены к модулю сдвига μ и им приписан нуль внизу.

Радиус упруго-пластической границы γ удовлетворяет уравнению

$$\gamma^2 (1 - c_0 / (2 + c_0) \alpha^2) = 4 \ln (\gamma / \alpha) / (2 + c_0) - p_0 / k_0 + 1 \qquad (2.3)$$

Отметим, что давление, при котором вся труба приходит в пластическое состояние, определяется выражением

$$P = -(2 + c_0)^{-1} (4 \ln \alpha - c_0 / \alpha^2)$$

Уравнения равновесия (1.6) для компонент возмущения (1.7), (1.8) в случае плоской формы потери устойчивости могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered}\sum\nolimits_{r,r} + r^{-1} \sum\nolimits_{r\theta,\theta} + r^{-1} \left(\sum\nolimits_r - \sum\nolimits_\theta\right) + (\sigma_r{}^\circ U_{r,r})_{,r} + \\ + r^{-1} (r^{-1} U_{r,\theta\theta} - 2r^{-1} U_{\theta,\theta} + U_{r,r} - r^{-1} U_r) \sigma_\theta{}^\circ + \rho_0 \omega^2 U_r = 0 \qquad (2.4)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\sum\nolimits_{r\theta,r} + r^{-1} \sum\nolimits_{\theta,\theta} + 2r^{-1} \sum\nolimits_{r\theta} + (\sigma_r{}^\circ U_{\theta,,r})_{,r} + r^{-1} (r^{-1} U_{\theta,\theta\theta} + 2r^{-1} U_{r,\theta} + U_{\theta,r}) + \\ + \rho_0 \omega^2 U_\theta = 0, \quad \rho_0 = \rho r_2{}^2 / \mu\end{gathered}$$

Из условия (1.6) с учетом (2.1) получим

$$\sum\nolimits_r = 0, \quad \sum\nolimits_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = 1, \ r = \alpha \qquad (2.5)$$

Условия на упруго-пластической границе (1.10)

$$[U_r] = 0, \quad [U_\theta] = 0, \quad \left[\sum\nolimits_r\right] = 0, \quad \left[\sum\nolimits_{r\theta}\right] = 0 \quad \text{при } r = \gamma \qquad (2.6)$$

Для несжимаемого материала в рассматриваемом случае зависимости (1.7) принимают вид

$$\begin{gathered}S_r{}^p = 2U_{r,r}^p + a_0 [r^{-1} (U_r{}^p + U_{\theta,\theta}^p) - U_{r,r}^p] \qquad (2.7) \\ S_\theta{}^p = 2r^{-1} (U_r{}^p + U_{\theta,\theta}^p) - a_0 [r^{-1} (U_r{}^p + U_{\theta,\theta}^p) - U_{r,r}^p] \\ \sum\nolimits_{r,\theta}^p = r^{-1} U_{r,\theta}^p + U_{\theta,r}^p - r^{-1} U_\theta{}^p, \quad a_0 = 4 / (2 + c_0 + i\omega\tau)\end{gathered}$$

Соответственно, из (1.8) для упругой области $\gamma \leqslant r \leqslant 1$ получим

$$S_r{}^e = 2U_{r,r}^e, \quad S_\theta{}^e = 2r^{-1} (U_r{}^e + U_{\theta,\theta}^e), \quad \sum\nolimits_{r,\theta}^e = r^{-1} U_{r,\theta}^e + U_{\theta,r}^e - r^{-1} U_\theta{}^e \qquad (2.8)$$

Решение в области $\alpha \leqslant r \leqslant \gamma$ будем искать в виде

$$U_r{}^p = \varphi_1 (r) \cos m\theta, \quad U_\theta{}^p = \varphi_2 (r) \sin m\theta \qquad (2.9)$$

После подстановки (2.9) в уравнении равновесия (1.6), учитывая при этом связь между напряжениями и деформациями (2.7), а также условие несжимаемости, можно получить дифференциальное уравнение относительно функции $\varphi_1 (r)$

$$\begin{gathered}r^4 (1 + \sigma_r{}^{p^\circ}) \varphi_1{}^{(IV)} + r^3 [6 + \sigma_\theta{}^{p^\circ} + 5\sigma_r{}^{p^\circ} + 2r\sigma_{r,r}^{p^\circ}] \varphi_1{}^{(III)} + \\ + r^2 [5 - 2m^2 (1 - 2a_0) + (3 - m^2)(\sigma_r{}^{p^\circ} + \sigma_\theta{}^{p^\circ}) + r (r\sigma_{r,rr}^{p^\circ} + \\ + 7\sigma_{r,r}^{p^\circ} + r\rho_0\omega^2)] \varphi_1{}^{(II)} + r [-1 - 2m^2 (1 + \sigma_\theta{}^{p^\circ}) + \\ + r (2 - m^2) \sigma_{r,r}^{p^\circ} + 2r^2 \sigma_{r,rr}^{p^\circ} + 3r^2 \rho_0 \omega^2] \varphi_1{}^{(I)} + \qquad (2.10) \\ + [1 - 2m^2 + m^4 + m^2 (m^2 - 2) \sigma_\theta{}^{p^\circ} + r^2 (1 - m^2) \rho_0 \omega^2] \varphi_1 = 0\end{gathered}$$

Аналогично будем искать решение в области $\gamma \leqslant r \leqslant 1$ в форме

$$U_r{}^e = f_1 (r) \cos m\theta, \quad U_\theta{}^e = f_2 (r) \sin m\theta \qquad (2.11)$$

Аналогичным путем, что и для уравнения (2.10), для функции $f_1(r)$ получаем

$$r^4(1+\sigma_r^{e^\circ})f_1^{(IV)} + r^3[6+\sigma_\theta^{e^\circ} + 5\sigma_r^{e^\circ} + 2r\sigma_{r,r}^{e^\circ}]f_1^{(''')} + \tag{2.12}$$
$$+ r^2[5-2m^2+(3-m^2)(\sigma_r^{e^\circ}+\sigma_\theta^{e^\circ}) + r(r\rho_0\omega^2 + 7\sigma_{r,r}^{e^\circ} + r\sigma_{r,rr}^{e^\circ})]f_1^{('')} +$$
$$+ r[-1-2m^2(1+\sigma_\theta^{e^\circ}) + 3r^2\rho_0\omega^2 + r(2-m^2)\sigma_{r,r}^{e^\circ} + 2r^2\sigma_{r,rr}^{e^\circ}]f_1^{(')} +$$
$$+ [1+m^2(m^2-2)(1-\sigma_\theta^{e^\circ}) + r^2(1-m^2)\rho_0\omega^2]f_1 = 0$$

В (2.10) и (2.12) напряжения σ_r°, σ_θ° и их производные определяются формулами (2.2).

Полагая в уравнениях равновесия (1.6) члены, содержащие внешнюю нагрузку, малыми, т. е. не принимая во внимание различие между геометрией начального, невозмущенного состояния, устойчивость которого исследуется, и геометрией других, близких к нему состояний, а также полагая $m = 1$, что соответствует первой критической силе, из (2.10) и (2.12) получаем упрощенные уравнения (2.13)

$$r^3\varphi_1^{(IV)} + 6r^2\varphi_1^{(''')} + r(3+4a_0+\rho_0\omega^2r^2)\varphi_1^{('')} + (-3+4a_0+3\rho_0\omega^2r^2)\varphi_1^{(')} = 0$$

$$r^3 f_1^{(IV)} + 6r^2 f_1^{(''')} + r(3+\rho_0\omega^2r^2)f_1^{('')} + (-3+3\rho_0\omega^2r^2)f_1^{(')} = 0 \tag{2.14}$$

Из уравнений (2.4), (2.7), (2.8), (2.9), (2.11), учитывая, что материал трубы несжимаемый, в рассматриваемом случае получим следующие зависимости;

а) в пластической зоне (2.15)

$$\textstyle\sum_r^p = -[r^2\varphi_1^{(''')} + 4r\varphi_1^{('')} + (-2+4a_0+\rho_0\omega^2r^2)\varphi_1^{(')} + \rho_0\omega^2 r\varphi_1)\cos\theta + K^p$$

$$\textstyle\sum_\theta^p = -[r^2\varphi_1^{(''')} + 4r\varphi_1^{('')} + (2+\rho_0\omega^2r^2)\varphi_1^{(')} + \rho_0\omega^2 r\varphi_1]\cos\theta + K^p$$

$$\textstyle\sum_{r\theta}^p = -(r\varphi_1^{('')} + \varphi_1^{(')})\sin\theta$$

б) в упругой зоне

$$\textstyle\sum_r^e = -[r^2 f_1^{(''')} + 4r f_1^{('')} + (-2+\rho_0\omega^2r^2)f_1^{(')} + \rho_0\omega^2 r f_1]\cos\theta + K^e \tag{2.16}$$

$$\textstyle\sum_\theta^e = -[r^2 f_1^{(''')} + 4r f_1^{('')} + (2+\rho_0\omega^2r^2)f_1^{(')} + \rho_0\omega^2 r f_1]\cos\theta + K^e$$

$$\textstyle\sum_{r\theta}^e = -(r f_1^{('')} + f_1^{(')})\sin\theta$$

где K^p и K^e определяются из граничных условий

$$\cos\theta[\alpha^2\varphi_1^{(''')} + \alpha(6-4a_0-\rho_0\omega^2\alpha^2)\varphi_1^{('')} + \rho_0\omega^2\alpha\varphi_1] = K^{(p)} \text{ при } r = \alpha$$
$$\cos\theta[f_1^{(''')} + (6-\rho_0\omega^2)f_1^{('')} + \rho_0\omega^2 f_1] = K^e \text{ при } r = 1 \tag{2.17}$$

Граничные условия (2.5) совместно с (2.15), (2.16) дают

$$\varphi_1^{(')} + \alpha\varphi_1^{('')} = 0 \quad \text{при } r = \alpha, \quad f_1^{(')} + f_1^{('')} = 0 \quad \text{при } r = 1 \tag{2.18}$$

Из (2.6), (2.15), (2.16) получим, что при $r = \gamma$

$$f_1 = \varphi_1, \qquad f_1^{(')} = \varphi_1^{(')}, \qquad f_1^{('')} = \varphi_1^{('')} \tag{2.19}$$
$$\cos\theta[\gamma^2(\varphi_1^{(''')} - f_1^{(''')}) + 4a_0\varphi_1^{(')}] + K^e - K^p = 0$$

Решение уравнений (2.13) и (2.14) может быть найдено в виде

$$\varphi_1 = \left[\ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} M_0 r^{2n}\right] A_1 + \left[\frac{r^k}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n+k}}{2n+k} M_{-k}\right] A_2 +$$

$$+ \left[\frac{r^{-k}}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n-k}}{2n-k} M_k\right] A_3 + A_4 \qquad (2.20)$$

$$f_1 = (rb)^{-1} \left[I_3 (r \sqrt{b}) - 4 (r \sqrt{b})^{-1} I_2 (r \sqrt{b})\right] C_1 +$$

$$+ (rb)^{-1} \left[Y_3 (r \sqrt{b}) - 4 (r \sqrt{b})^{-1} Y_2 (r \sqrt{b})\right] C_2 + r^{-2} C_3 + C_4 \qquad (2.21)$$

$$M_k = \frac{(-1)^n b^n (n - k/2)!}{\prod\limits_{l=1}^{n} [(al - 3 - ak/2) + (2l - 1 - k)(l - 1 - k/2)(2l + 3 - k)]}, \qquad b = \rho_0 \omega^2$$

$$k = 2\sqrt{1 - a_0}, \quad a = 3 + 4a_0, \quad M_k = M_{-k} \text{ при } k = -k, \quad M_k = M_0 \text{ при } k = 0$$

Здесь I_ν, Y_ν, ($\nu = 2, 3$) — бесселевы функции первого и второго рода, C_i и A_i ($i = 1, \ldots, 4$) — постоянные интегрирования.

Подстановка (2.20), (2.21) в (2.18), (2.19) дает линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно шести произвольных постоянных. Так как в случае потери устойчивости эта система должна иметь ненулевое решение, то ее определитель должен быть равен нулю

$$|a_{ik}| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 6) \qquad (2.22)$$

Здесь

$$a_{11} = \frac{1 + \sqrt{b}}{\sqrt{b}} I_2 (\sqrt{b}) - I_3 (\sqrt{b}), \qquad a_{21} = \frac{1}{\gamma}\left[I_3 (\gamma \sqrt{b}) - \frac{4}{\gamma \sqrt{b}} I_2 (\gamma \sqrt{b})\right]$$

$$a_{31} = 0, \qquad a_{41} = I_2 (\gamma \sqrt{b}), \qquad a_{51} = \frac{1}{\sqrt{b}} I_2 (\gamma \sqrt{b}) - \gamma I_3 (\gamma \sqrt{b}) \qquad (2.23)$$

$$a_{61} = \gamma[(b - 3) I_3 (\sqrt{b}) + (b - 2 - 4\sqrt{b}) I_2 (\sqrt{b})] - \gamma^2 \left[I_3 (\gamma \sqrt{b}) - \frac{4}{\gamma \sqrt{b}} I_2 (\gamma \sqrt{b})\right]$$

$$a_{13} = 4, \quad a_{23} = \gamma^{-2}, \quad a_{33} = 0, \quad a_{43} = -2\gamma^{-2}, \quad a_{53} = 6\gamma^{-2}, \quad a_{63} = \gamma(4 - b) + 24\gamma^{-2}$$

$$a_{16} = 0, \qquad a_{26} = -\left[-\frac{1}{k}\gamma^{-k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n - k} M_k \gamma^{2n-k}\right]$$

$$a_{36} = -\frac{k}{\alpha^k} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n - k) M_k \alpha^{2n-k}, \qquad a_{46} = -\left[\gamma^{-k} + \sum_{n=1}^{\infty} M_k \gamma^{2n-k}\right]$$

$$a_{56} = \frac{k + 1}{\gamma^k} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n - k - 1) M_k \gamma^{2n-k}, \qquad a_{66} = -\frac{\gamma}{\alpha}\Big\{\Big[(k + 1)(k + 2) -$$

$$- 4(k + 1) + (-2 + 4a_0 + b\alpha^2) - \frac{b\alpha^2}{k}\Big] \frac{1}{\alpha^k} + \sum_{n=1}^{\infty} R_k M_k \alpha^{2n-k}\Big\} +$$

$$+ 4a_0 \left[\gamma^{-k} + \sum_{n=1}^{\infty} M_k \gamma^{2n-k}\right] + (k + 1)(k + 2) \gamma^{-k} +$$

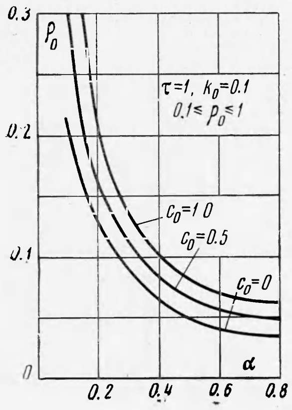
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (2n - k - 1)(2n - k - 2) M_k \gamma^{2n-k}$$

$$a_{24} = -\left[\ln\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}M_0\gamma^{2n}\right], \qquad a_{64} = -\gamma\Big[-4 + 4a_0 + b\alpha^2(1+\ln\alpha) +$$

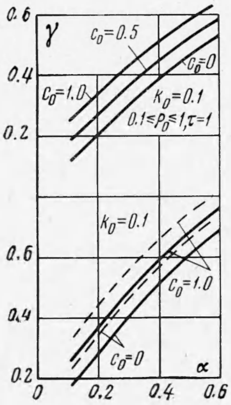
$$+\sum_{n=1}^{\infty}R_0M_0\alpha^{2n}\Big]\alpha^{-1} + 4a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}M_0\gamma^{2n}\right] + \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)(2n-2)M_0\gamma^{2n} + 2$$

$$R_k = -2 + 4a_0 + b\alpha^2 + b\alpha^2/(2n-k) + (2n-k-1)(2n-k+2)$$

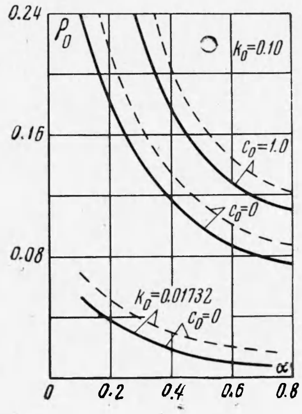
Далее заметим, что элементы второго столбца определителя совпадают с соответствующими элементами первого столбца, если в последних бесселеву функцию первого рода I_ν заменить на бесселеву функцию второго рода Y_ν. Элементы пятого столбца могут быть получены из элементов



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

шестого, если в последних формально k заменить на $-k$, и, наконец, элементы четвертого столбца получим из элементов пятого при $k = 0$, за исключением элементов a_{24} и a_{64}, которые указаны выше. На фиг. 1 представлена зависимость критического давления p_0 от α при $0.1 \leqslant \rho_0 \leqslant 1$, $0 \leqslant c_0 \leqslant 1$, $k_0 = 0.1$ и $\tau = 1$. Величина упруго-пластической границы γ, соответствующая критической нагрузке p_0, при тех же значениях ρ_0, c_0, k_0 и τ показана на фиг. 2, *а*. Заметим, что при уменьшении k_0 величина критического давления уменьшается, что следует из (2.3), так как $p_0 = k_0\{\ldots\}$, и построение p_0 от α при $0 < k_0 < 1$ сделать нетрудно.

Предположение, что потеря устойчивости может происходить по типу статической неустойчивости, приводит к существенным упрощениям.

Не приводя промежуточных вычислений, укажем лишь, что уравнение для определения критического давления получим после раскрытия определителя (2.22), который в данном случае имеет следующие элементы:

$$a_{11} = \ln\gamma,\ a_{21} = 1,\ a_{31} = -1,\ a_{41} = -2(1+2\gamma),\ a_{51} = a_{61} = 0 \qquad (2.24)$$

$$a_{12} = \gamma^2,\ a_{22} = a_{32} = 2\gamma^2,\ a_{42} = -12\gamma,\ a_{52} = 0,\ a_{62} = 1$$

$$a_{13} = \gamma^{-2},\ a_{23} = -2\gamma^{-2},\ a_{33} = 6\gamma^{-2},\ a_{43} = -12\gamma(1-2\gamma),\ a_{53} = 0,\ a_{63} = 1$$

$$a_{14} = -\ln\gamma,\ a_{24} = -1,\ a_{34} = 1,\ a_{44} = 2\left[1 + 2a_0(1-\gamma\alpha^{-1}) + 2\gamma\alpha^{-1}\right]$$

$$a_{54} = a_{64} = 0,\ a_{15} = -\sin(k\ln\gamma),\ a_{25} = -k\cos(k\ln\gamma)$$

$$a_{35} = k(k \sin k \ln \gamma + \cos k \ln \gamma), \quad a_{45} = 3k^2 (\sin k \ln \gamma - \gamma\alpha^{-1} \sin k \cdot \ln \alpha) + k(2 - k^2 + 4a_0)(\cos k \ln \gamma - \gamma\alpha^{-1} \cos k \ln \alpha) + 6k\gamma\alpha^{-1} \cos k \ln \alpha$$

$$a_{55} = \sin k \ln \alpha, \quad a_{65} = 0, \quad a_{16} = -\cos k \ln \gamma$$

$$a_{26} = k \sin k \ln \gamma, \quad a_{36} = k(k \cos k \ln \gamma - \sin k \ln \gamma)$$

$$a_{46} = 3k^2 (\cos k \ln \gamma - \gamma\alpha^{-1} \cos k \ln \alpha) - k(2 - k^2 + 4a_0)(\sin k \ln \gamma - \gamma\alpha^{-1} \sin k \ln \alpha) - 6k\gamma\alpha^{-1} \sin k \ln \alpha, \quad a_{56} = \cos k \ln \alpha, \quad a_{66} = 0$$

Рассмотрение статической задачи, соответствующей системе (2.4) с консервативными граничными условиями (1.6), приводит к определителю, элементы которого совпадают с (2.24), за исключением

$$a_{44} = 2 + 4a_0 (1 - \gamma\alpha^{-1}) + (4 - p_0)\gamma\alpha^{-1}, \qquad a_{54} = -p_0$$

$$a_{45} = 3k^2 (\sin k \ln \gamma - \gamma\alpha^{-1} \sin k \ln \alpha) + k(2 - k^2 + 4a_0)(\cos k \ln \gamma - \gamma\alpha^{-1} \cos k \ln \alpha) + (6 - p_0) k\gamma\alpha^{-1} \cos k \ln \alpha \qquad (2.25)$$

$$a_{55} = (1 + p_0) k^2 \sin k \ln \alpha - p_0 k \cos k \ln \alpha, \quad a_{46} = 3k^2 (\cos k \ln \gamma - \gamma\alpha^{-1} \cos k \ln \alpha) - k(2 - k^2 + 4a_0)(\sin k \ln \gamma - \gamma\alpha^{-1} \sin k \ln \alpha) - (6 - p_0) k\gamma\alpha^{-1} \sin k \ln \alpha$$

$$a_{56} = (1 + p_0) k^2 \cos k \ln \alpha + p_0 k \sin k \ln \alpha$$

На фиг. 3 даны графики зависимости критических значений p_0 и γ от α для уравнения (2.22) с коэффициентами (2.25) (сплошные линии) и (2.22) с элементами (2.24) (пунктирные линии).

Как видно из фиг. 2,*б* и 3, величина критической силы, вычисленная при консервативных граничных условиях, незначительно меньше, чем при неконсервативных граничных условиях.

Сравнение с [2] (при $k_0 = 0.01732$ и $c_0 = 0$) показывает, что величина γ несколько меньше, чем в [2].

Из фиг. 1 и 3 следует, что наличие вязкости при пластических деформациях уменьшает величину критической силы, т. е. вязкость дестабилизирует трубу.

Все вычисления, связанные с построением графиков, проведены на ЭВМ М-20.

Поступила 22 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Спорыхин А. Н., Об устойчивости деформирования упруго-вязко-пластических тел. ПМТФ, 1967, № 4.
2. Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 8.
3. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости М., Физматгиз, 1961.