

УДК 532.526

НОВОЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ТЕЧЕНИИ КУЭТТА — ПУАЗЕЙЛЯ

С. Н. Аристов, Д. В. Князев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь
E-mails: asn@icmm.ru, dvk5@yandex.ru

Получено точное решение задачи о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости под действием перепада давления в зазоре между коаксиальными цилиндрами в случае, когда внутренний цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью. Найденное решение отличается от классического результата Куэтта — Пуазейля наличием радиального переноса массы, обеспечивающего взаимодействие полой и азимутальной циркуляций. Установлена линейная зависимость расхода от угловой скорости вращения внутреннего цилиндра.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, точные решения, течение Куэтта — Пуазейля.

1. Рассмотрим вращательно-симметричное стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между бесконечными коаксиальными цилиндрами. Пусть внутренний цилиндр радиусом R_0 вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно собственной оси, внешний цилиндр радиусом R_1 покоится. Разность средних давлений в двух поперечных сечениях зазора S_1 и S_2 , отстоящих друг от друга на расстояние h , известна. Требуется определить гидродинамические поля возникающего в этих условиях течения, а также вычислить расход. Будем считать, что ось z цилиндрической системы координат (r, φ, z) совпадает с общей осью цилиндров, а ее начало расположено в сечении S_1 .

Движение жидкости описывается системой уравнений Навье — Стокса

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

дополненной условиями прилипания на границах зазора:

$$r = R_0: \quad v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = \omega R_0, \quad r = R_1: \quad v_r = v_z = v_\varphi = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ — вектор скорости; P — давление, отнесенное к постоянной плотности; ν — кинематическая вязкость.

Согласно постановке задачи помимо граничных условий следует задать разность средних по сечениям S_1 и S_2 давлений:

$$\Delta P = \frac{1}{\pi(R_1^2 - R_0^2)} \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{2\pi} (P|_{z=0} - P|_{z=h}) r d\varphi dr. \quad (3)$$

Полагая продольную и окружную компоненты скорости линейными функциями координаты z , вращательно-симметричное стационарное решение задачи (1)–(3) будем искать в виде [1, 2]

$$v_r = \frac{\nu}{R_1} \frac{u(x)}{\sqrt{x}}, \quad v_\varphi = \frac{\nu}{R_1} \sqrt{\frac{2}{x}} (V(x) + Zv(x)), \quad v_z = -2 \frac{\nu}{R_1} (W(x) + Zu'(x)),$$

$$P = P_0 + 2 \frac{\nu^2}{R_1^2} (B(x) - 4ZF'(x) - 2Z^2G(x)). \quad (4)$$

Здесь P_0 — давление на стенке внутреннего цилиндра в сечении S_1 ; $x = (r/R_1)^2$, $Z = z/R_1$ — новые безразмерные переменные; u, v, G, W, V, F — безразмерные функции аргумента x ; штрих обозначает дифференцирование по x .

Представление гидродинамических полей в виде (4) позволяет свести уравнения Навье — Стокса с условиями (2), (3) к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных u, v, G, W, V, F :

$$2xu''' = 2G + (u - 2)u'' - u'u', \quad 2xv'' = uv' - vu', \quad 4x^2G' = -v^2; \quad (5)$$

$$x = x_0: \quad u = u' = v = 0, \quad x = 1: \quad u = u' = v = 0; \quad (6)$$

$$2xW'' = 2F' + (u - 2)W' - u'W, \quad 2xV'' = uV' - vW, \quad 4x^2F'' = -vV; \quad (7)$$

$$x = x_0: \quad W = 0, \quad V = \Omega, \quad F = F_0, \quad x = 1: \quad W = V = F = 0; \quad (8)$$

$$B = u' - \frac{u^2}{4x} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \left(\frac{V(t)}{t} \right)^2 dt.$$

Здесь $x_0 = (R_0/R_1)^2$; $\Omega = \omega R_0^2 / (\sqrt{2}\nu)$ — безразмерная компонента осевого момента импульса $\mathbf{M}_1 = \Omega \mathbf{z}$ вращающегося цилиндра; \mathbf{z} — единичный вектор, направление которого совпадает с положительным направлением оси z . Константа F_0 связана с заданной разностью средних давлений (3) в сечениях S_1 и S_2 равенством

$$\Delta P = \frac{8\nu^2 H}{R_1^2 - R_0^2} \left(\frac{gH}{2} - F_0 \right), \quad H = \frac{h}{R_1}, \quad g = \int_{x_0}^1 G(x) dx.$$

Отметим, что неизвестные u, v, G определяются не содержащей параметров (кроме заданного x_0) изолированной подсистемой (5), (6), а подчиненная ей краевая задача (7), (8) линейна относительно W, V и F . Это позволяет считать движение вязкой жидкости вида (4) суперпозицией фонового потока (u, v, G) и индуцированного им, а также вращением внутреннего цилиндра однородного в осевом направлении течения (W, V, F).

2. В отсутствие фонового потока ($u = 0, v = 0, G = 0$) решение задачи (7), (8) совпадает с решением Куэтта — Пуазейля:

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = \frac{\nu}{R_1} \sqrt{\frac{2}{x}} V = \frac{\sqrt{2}\nu\Omega}{R_1\sqrt{x}} \frac{1-x}{1-x_0},$$

$$v_z = -2 \frac{\nu}{R_1} W = \frac{(1-x_0)R_1\Delta P}{4\nu H} \left(\frac{1-x}{1-x_0} - \frac{\ln x}{\ln x_0} \right), \quad (9)$$

$$\Delta P = -\frac{8\nu^2 H}{R_1^2 - R_0^2} F_0, \quad Q = \frac{\pi R_1^3 \Delta P}{8\nu H} (1-x_0^2) \left(1 + \frac{2}{\ln x_0} \frac{1-x_0}{1+x_0} \right)$$

(Q — объемный расход жидкости).

Данный режим течения характеризуется нулевым радиальным потоком массы: $v_r = 0$. Вследствие этого полоидальная и азимутальная циркуляции не взаимодействуют. Полоидальная циркуляция полностью определяется продольным градиентом давления, азимутальная — скоростью вращения внутреннего цилиндра. По той же причине расход, пропорциональный перепаду давления, не зависит от угловой скорости ω .

3. В работе [3] показано, что тривиальное решение нелинейной краевой задачи (5), (6) неединственно. В указанной работе в рамках класса точных решений (4) ($W = 0$, $V = 0$, $F = 0$) рассмотрена задача о течении вязкой жидкости в зазоре между покоящимся внешним и растягивающимся внутренним цилиндрами (предельный случай $R_0 = 0$ изучен в [1]). Исследование этой задачи сводится к нахождению решений системы уравнений (5) с граничными условиями

$$x = x_0: \quad u = v = 0, \quad u' = s, \quad x = 1: \quad u = u' = v = 0, \quad (10)$$

совпадающими с (6) при $s = 0$. Зависимость параметров $u''(x_0, s) = u''_0(s)$, $v'(x_0, s) = v'_0(s)$, $G(x_0, s) = G_0(s)$ задачи Коши, эквивалентной (5), (10), от безразмерной постоянной s , характеризующей скорость растяжения внутреннего цилиндра, представлена на рис. 1. В точке $s = 0$, соответствующей недеформированному цилиндру, значения перечисленных параметров отличны от нуля (при $x_0 = 0,01$ $u''_0(0) = -4,10423 \cdot 10^3$, $v'_0(0) = 116,8048$, $G_0(0) = 1,35366 \cdot 10^3$). Таким образом, при $s = 0$ система (5), (10), а также (5), (6) имеют нетривиальное решение. Решение задачи приведено на рис. 2.

Численный анализ задачи (5), (6) показал, что при всех значениях геометрического параметра в диапазоне $x_0 = 0,01 \div 0,90$ знак функции v сохраняется (рис. 2). Это означает, что направление безразмерного вектора осевого момента импульса фонового течения $\mathbf{M}_2 = vZ\mathbf{z}$ во всех точках выбранного нормального сечения зазора $Z = \text{const}$ не меняется. Функция $u \leq 0$ также не меняет знак (рис. 2).

Найденное решение описывает вращательно-симметричное течение вязкой жидкости в зазоре между неподвижными бесконечными цилиндрами с нулевым расходом и нулевым средним (по всему объему) осевым моментом импульса. Источником этого движения

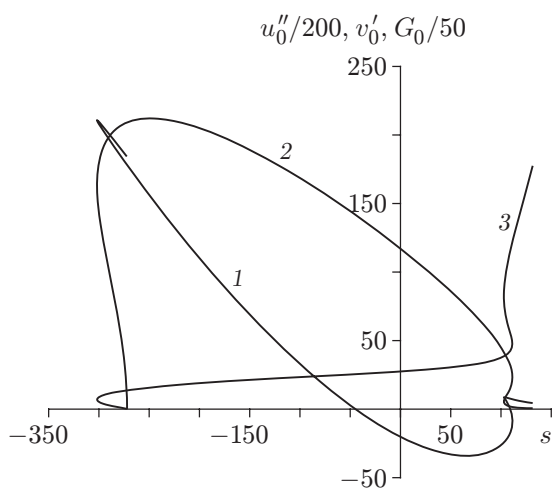


Рис. 1

Рис. 1. Параметры задачи (5), (10):

1 — $u''_0(s)$; 2 — $v'_0(s)$; 3 — $G_0(s)$

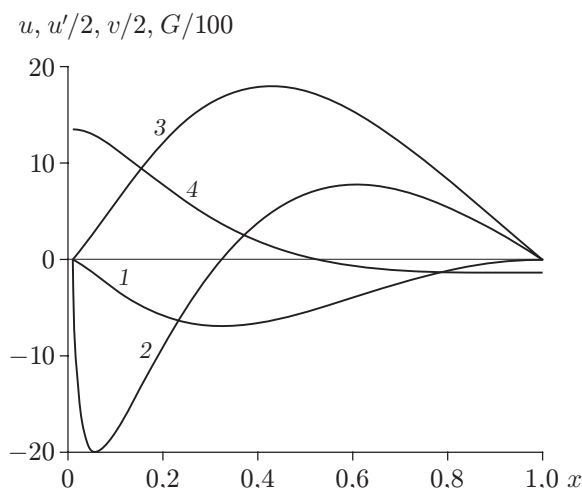


Рис. 2

Рис. 2. Решение задачи (5), (6) при $x_0 = 0,01$:

1 — $u(x)$; 2 — $u'(x)$; 3 — $v(x)$; 4 — $G(x)$

является закрутка жидкости (в соответствии с (4)) в равноотстоящих от плоскости S_1 сечениях $z = h_1, z = -h_1$. Такое торсионное вращение среды приводит к появлению в ней радиального и продольного градиентов давления (см. первое и третье уравнения в (5)), индуцирующих течения в соответствующих направлениях.

4. В силу линейности задачи (7), (8) зависимость ее решения от входящих в граничные условия параметров F_0 и Ω также должна быть линейной. В этом легко убедиться, выполнив замену

$$W = \Omega W_1 - \frac{F_0}{g} u', \quad V = \Omega V_1 - \frac{F_0}{g} v, \quad F = \Omega F_1 + \frac{F_0}{g} \int_x^1 G(t) dt, \quad (11)$$

где новые неизвестные W_1, V_1, F_1 удовлетворяют уравнениям (7) с не содержащими параметры граничными условиями

$$x = x_0: \quad W_1 = F_1 = 0, \quad V_1 = 1, \quad x = 1: \quad W_1 = V_1 = F_1 = 0. \quad (12)$$

В соответствии с (11) имеет место линейная зависимость продольной и окружной компонент скорости (4) от заданного среднего перепада давления ΔP и безразмерного осевого момента импульса вращающегося цилиндра Ω .

Графики функций W_1, V_1, F_1' (при $x_0 = 0,01$ $W_1'(x_0) = -26,286, V_1' = -12,658, F_1'(x_0) = 22,976$) приведены на рис. 3.

Важной характеристикой течений в трубах и каналах является расход. Из (4) с учетом краевых условий и (11) находим

$$Q = \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{2\pi} v_z r d\varphi dr = 2\pi R_1 \Omega q, \quad q = - \int_{x_0}^1 W_1(x) dx. \quad (13)$$

В течении Куэтта — Пуазейля (9) жидкость движется вдоль канала в направлении уменьшения давления с расходом, пропорциональным $\Delta P/H$. Анализ формулы (13) приводит к иному выводу: расход пропорционален угловой скорости вращения внутреннего

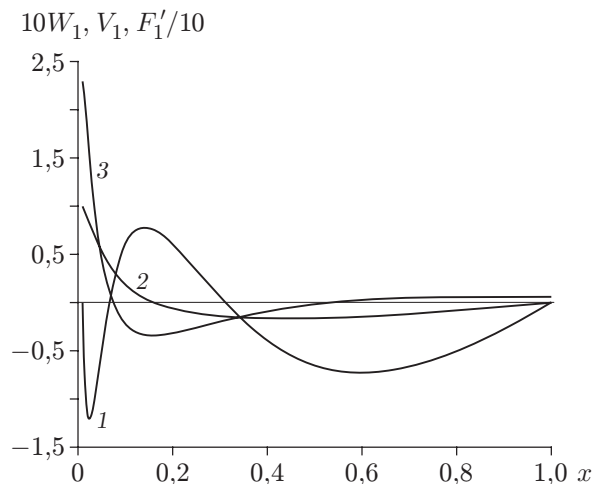


Рис. 3. Решение задачи (7), (12) при $x_0 = 0,01$:
1 — $W_1(x)$; 2 — $V_1(x)$; 3 — $F_1'(x)$

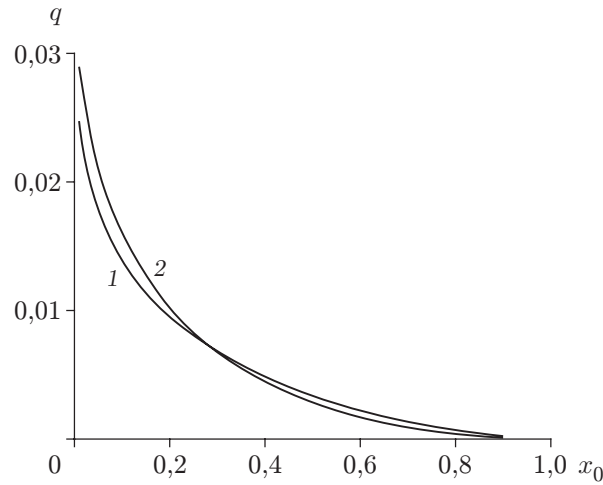


Рис. 4. Зависимость безразмерного расхода от отношения квадратов радиусов внутреннего и внешнего цилиндров x_0 :

1 — $q = Q/(2\pi R_1 \Omega)$, течение, описываемое уравнениями (4) ($v \geq 0$); 2 — $q = -Q/(20\pi R_1 F_0)$, течение Куэтта — Пуазейля (9)

цилиндра и не зависит от перепада давления, а также от относительной длины участка зазора H , к которому эта разность давлений приложена.

Столь необычное поведение потока обусловлено наличием в нем фонового течения специального вида (5), (6), нарушающего монотонность продольного распределения давления. Это течение в совокупности с движением, индуцируемым вращением внутреннего цилиндра, формирует самосогласованное поле сил инерции, в качестве одной из характеристик которого целесообразно ввести вектор

$$\mathbf{J} = \mathbf{z} \frac{\partial I}{\partial Z} = \Omega v \mathbf{z}$$

с потенциалом I , равным скалярному произведению осевых моментов импульса вращающегося цилиндра и фонового течения ($\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 = \Omega v Z$).

Нетрудно убедиться в том, что направление вектора среднего потока жидкости $\mathbf{j} = Q\mathbf{z}$ однозначно определяется полем \mathbf{J} . Для этого достаточно заметить, что система (5)–(7), (12) допускает преобразование неизвестных u, v, G, W_1, V_1, F_1 и соответствующее преобразование векторов:

$$\begin{aligned} v \rightarrow -v: \quad u \rightarrow u, \quad G \rightarrow G, \quad W_1 \rightarrow -W_1, \quad V_1 \rightarrow V_1, \quad F_1 \rightarrow -F_1, \\ \mathbf{J} \rightarrow -\mathbf{J}: \quad \mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}, \quad \mathbf{M}_2 \rightarrow -\mathbf{M}_2. \end{aligned}$$

Учитывая также результаты численного исследования задачи (5)–(7), (12) (рис. 4), согласно которым при $v \geq 0$ ($v \leq 0$) постоянная q положительна (отрицательна) во всем диапазоне значений геометрического параметра x_0 , можно сделать вывод, что векторы \mathbf{j} и \mathbf{J} сонаправлены. Таким образом, средний перенос массы в течении (4) происходит в направлении увеличения потенциала I (как функции Z), т. е. в ту часть канала, где его внутренняя стенка и фоновый поток вращаются в одном направлении ($\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 = I > 0$).

5. Линиями тока классического течения Куэтта — Пуазейля (9) являются цилиндрические спирали с постоянным шагом. Течение типа (4) обладает значительно более сложной пространственной структурой. На рис. 5 представлены качественные картины

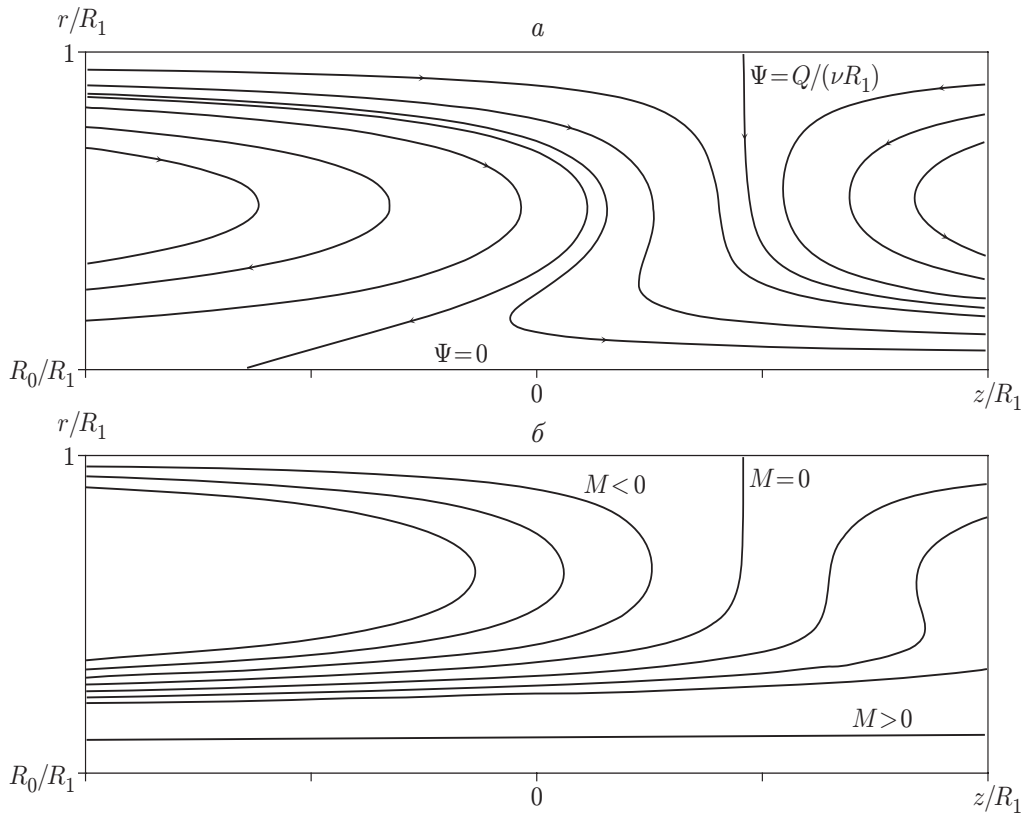


Рис. 5. Изолинии безразмерных функции тока Ψ (а) и осевого момента импульса M (б)

изолиний безразмерных функции тока и осевого момента импульса течения (4), определенных по формулам

$$\Psi = \frac{\psi}{\nu R_1} = \Omega \int_{x_0}^x W_1(t) dt + \left(Z - \frac{F_0}{g} \right) u, \quad M = \frac{r v_\varphi}{\sqrt{2} \nu} = \Omega V_1 + \left(Z - \frac{F_0}{g} \right) v,$$

где ψ — истинная (размерная) функция тока.

Полоидальное течение, представленное на рис. 5,а ($v \geq 0$, $\Omega > 0$), можно условно разделить на три области: проточная зона, расположенная между изолиниями $\Psi = 0$ и $\Psi = Q/(\nu R_1)$, и две рециркуляционные зоны: $\Psi < 0$ и $\Psi > Q/(\nu R_1)$. В проточной области (при отрицательных значениях z) жидкость движется вдоль внешнего цилиндра (рис. 5,а), вращаясь в направлении, противоположном направлению вращения внутреннего цилиндра (рис. 5,б). В окрестности сечения $z = 0$ поток, изменяя направление закрутки, перемещается к внутренней стенке зазора и течет вдоль нее, вращаясь почти как твердое тело. Поскольку $u \leq 0$, во всей области течения жидкие частицы движутся по направлению к внутреннему цилиндру, т. е. вращающаяся стенка зазора подсасывает жидкость.

Следует отметить, что при $x \approx 1$ функции G и F' остаются почти постоянными (см. рис. 2, 3). Как следствие вблизи твердой внешней стенки давление слабо меняется в радиальном направлении, что свидетельствует о возможном наличии пограничного слоя. В результате столкновения потоков проточной зоны и рециркуляционного течения $\Psi > Q/(\nu R_1)$ происходит отрыв пограничного слоя от внешней твердой стенки в точке ответвления от последней изолинии $\Psi = Q/(\nu R_1)$. Срыв потока происходит также на вра-

щающемся цилиндре (изолиния $\Psi = 0$), что сопровождается возникновением возвратного течения в проточной области (см. рис. 5,а).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аристов С. Н.** Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой жидкости // Докл. РАН. 2001. Т. 377, № 4. С. 477–480.
2. **Аристов С. Н., Пухначев В. В.** Об уравнениях вращательно-симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости // Докл. РАН. 2004. Т. 394, № 5. С. 611–614.
3. **Аристов С. Н., Князев Д. В.** Вращательно-симметричное течение вязкой жидкости между коаксиальными растягивающимися цилиндрами // Тр. 3-й Междунар. конф. “Симметрия и дифференциальные уравнения”, Красноярск, 25–29 авг. 2002 г. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 2002. С. 21–25.

*Поступила в редакцию 21/VIII 2006 г.,
в окончательном варианте — 26/X 2006 г.*
