

11. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. — Л.: Наука, 1980.
12. Tolstoy I. On elastic waves in prestressed solids // J. Geophys. Res. — 1982. — V. 87, N B8. — P. 6823—6827.
13. Engelhard L. Stress-induced anisotropy in elastic media // Geophys. Trans. — 1988. — N 1. — P. 59—81.
14. Norris A.N. Propagation of plane waves in pre-stressed medium // J. Acoust. Soc. Amer. — 1983. — V. 74, N 5. — P. 1642—1643.
15. Aggson J.R. The potential application of ultrasonic spectroscopy to underground site characterization. — San Francisco, 1978. — (Prepr. 48th Annual meeting of the SEG, 1978).
16. Egle D.M., Bray D.E. Measurement of acoustoelastic and third order elastic constants for rail steel // J. Acoust. Soc. Amer. — 1976. — V. 60, N 3. — P. 741—744.
17. Nur A., Simmons G. Stress-induced velocity anisotropy in rock: an experimental study // J. Geophys. Res. — 1969. — V. 74, N 27. — P. 6667—6674.
18. Backus G.E. Possible forms seismic anisotropy of the uppermost mantle under oceans // J. Geophys. Res. — 1965. — V. 70. — P. 3429—3439.
19. Глебов А.Ф. Поляризация квазипродольных и квазипоперечных волн в анизотропных средах // Геология и геофизика. — 1994. — № 2.
20. Беляков В.Л. Автоматический контроль параметров нефтяных эмульсий: Справочное пособие. — М.: Недра, 1992.

г. Новосибирск

Поступила 12/V 1993 г.

УДК 621.762

А.Л. Максименко, Е.А. Олевский

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

Термин нестационарные задачи в работе используется в смысле, предложенном в [1]. Речь идет об исследовании медленных эволюционных процессов деформирования жесткопластической среды. Определенный опыт решения таких задач накоплен в теории обработки давлением пористых и порошковых материалов. Подходы, развиваемые в теории сжимаемых пластических сред, позволяют по-новому взглянуть и на решение классических задач теории пластичности, рассматривая несжимаемый материал как материал предельно малой сжимаемости. Для нахождения полей скоростей в данной работе используются вариационные принципы теории пластического течения.

1. Особенности эволюционных задач теории пластичности. Наиболее простая схема решения задач, в которых необходимо проследить эволюцию пластического деформирования материала в процессе его нагружения, предложена, например, в [1]. Для выяснения картины течения необходимо задаться некоторым шагом изменения параметра нагрузки Δt , найти мгновенные скорости в объеме материала, проследить изменение геометрии течения и параметров упрочнения, снова найти скорости и т.д. Главные препятствия, возникающие на пути реализации такого подхода, связаны с тем, что поле скоростей в жесткопластическом материале определяется, вообще говоря, неединственным образом. При численном моделировании эта неединственность проявляется как некорректность, т.е. малые изменения параметров задачи приводят к большим изменениям поля скоростей. Например, в задаче о внедрении штампа в жесткопластическое однородное несжимаемое полупространство как угодно малая вариация предела текучести в области, прилегающей к штампу, резко меняет скорости материала. При этом симметричное относительно штампа поле скоростей может, например, переходить в несимметричное. Достаточное число примеров такого рода приведено в [2]. Некорректность, в свою очередь, влечет неопределенность в выборе шага Δt . Понятно, что чем с большей скоростью происходит процесс,

© А.Л. Максименко, Е.А. Олевский, 1994

тем с меньшим шагом необходимо следить за его эволюцией. Если скорости меняются мгновенно, Δt должно быть равно нулю. Этот же вывод получим, если будем рассматривать жесткопластический материал как предельный случай вязкопластического. Представим реологические соотношения для вязкопластического материала в виде [3]

$$e_{ij} = \beta \left\langle \Phi \left(\frac{F}{F_0} \right) \right\rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}$$

где Q — вязкопластический потенциал; F — функция, задающая поверхность нагружения; F_0 — нормировочный множитель; символом $\langle \rangle$ обозначена ступенчатая функция вида

$$\langle u \rangle = \begin{cases} 0 & \text{при } u < 0, \\ u & \text{при } u \geq 0. \end{cases}$$

Для упруговязкопластического материала шаг по времени не должен превышать величины Δt_{\max} [4]:

$$(1.1) \quad \Delta t < \Delta t_{\max} = \frac{4(1 + \nu)Y}{3\beta E}$$

(E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала в упругом состоянии). Оценка получена для вязкопластического потенциала $Q = F$:

$$Q = \sqrt{\tau^2 - Y}, \quad \Phi(F/F_0) = F/Y,$$

что отвечает условию текучести Мизеса. Для пластического материала напряжения находятся на поверхности нагружения ($F = 0$) и соответственно при ненулевых скоростях деформирования ($\dot{\gamma} = \infty$ и $\Delta t_{\max} = 0$).

2. Влияние учета необратимой сжимаемости на особенности пластического течения материала. Несмотря на трудности, в последнее время появился целый ряд работ [5—8], в которых используется указанный выше подход для моделирования значительных пластических деформаций материала. Во многих технологических задачах получены численные результаты, качественно, а иногда и количественно совпадающие с экспериментальными данными.

Упомянутые выше работы посвящены исследованию необратимого деформирования сжимаемых пластических сред. Преимущества, которые дает учет сжимаемости, нетрудно понять на примере задачи о пластическом деформировании панели. Нахождение поля скоростей в этой задаче сводится к минимизации функционала [9]

$$D = \int_0^1 \int_{-1}^1 \left[(u'_x)^2 + \frac{1}{\varepsilon^4} (v'_y)^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} (u'_y + v'_x)^2 \right] dx dy - G(u, v),$$

где L — длина панели; $2h$ — толщина; x, y — безразмерные координаты; u, v — безразмерные составляющие вектора скорости; $G(u, v)$ — линейный функционал по u и v (безразмерная мощность заданных сил, действующих на панель); малый параметр $\varepsilon = h/L$.

Функционал с точностью до множителя является выражением диссипативной функции для материала с условием пластичности Мизеса, его можно представить в виде

$$D = \int_0^1 \int_{-1}^1 \sqrt{\gamma^2} dx dy - G(u, v)$$

(γ — второй инвариант деватора тензора скоростей деформаций). На поле скоростей, удовлетворяющем условиям Кирхгофа — Лява и несжимаемости среды [9],

$$u = P_0 u_0(x) + P_1(y) u_1(x),$$

$$v = -\sqrt{3} P_0 \int_0^x u_1(\lambda) d\lambda - \varepsilon^2 u'_0(x) P_0(y + 1) - \varepsilon^2 u'_1(x) \int_{-1}^y P_1(\lambda) d\lambda$$

функционал приводится к виду

$$D = \int_0^1 \int_{-1}^1 \{ \sqrt{2} |P_0 u'_0(x) + P_1 u'_1(x)| - (q_1^0 - q_2^0)(P_0 u'_0(x) + P_1 u'_1(x)) \} dx dy$$

(P_0, P_1 — первые два полинома ортонормированной на отрезке $[-1, 1]$ системы полиномов Лежандра). При любой конечномерной аппроксимации скоростей минимизация такого функционала сводится к решению набора задач линейного программирования, для которых характерна некорректность при некоторых значениях параметров. Некорректность в задачах нахождения поля скоростей для равнопрочных пластин отмечена в [10].

Для сжимаемого материала поле скоростей можно представить как [11]

$$u = P_0 u_0(x) + P_1(y) u_1(x), \quad v = -\sqrt{3} P_0 \int_0^x u_1(\lambda) d\lambda + \epsilon^2 \omega(x, y).$$

Диссипативный потенциал в модели сжимаемой пластической среды, предложенной М.Б. Штерном [12], имеет вид

$$(2.1) \quad D_c = \int_0^1 \int_{-1}^1 Y \sqrt{1 - \theta} (\varphi \gamma^2 + \psi e^2)^{1/2} dx dy - G(u, v),$$

где Y — константа в условии текучести Мизеса для беспористого материала; φ и ψ — функции пористости:

$$\varphi = (1 - \theta)^2, \quad \psi = \frac{2}{3} \frac{(1 - \theta)^3}{\theta}.$$

Далее, если Y не зависит от пространственных координат, будем полагать эту константу равной единице. После подстановки выражений для скорости получим

$$D_c = \int_0^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \theta} \left[\varphi (u'_0(x) P_0 + u'_1(x) P_1)^2 + \varphi \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \psi (u'_0(x) P_0 + u'_1(x) P_1 + \frac{\partial \omega}{\partial y})^2 \right]^{1/2} dx dy - G.$$

Нетрудно убедиться, что ни при каких значениях θ подкоренное выражение не является полным квадратом, функционал не имеет линейных участков, значит, поле скоростей всегда будет единственным. Вывод из рассматриваемого примера можно сформулировать следующим образом: исключение линейного условия несжимаемости и учет необратимого объемного деформирования улучшают свойства функционала и позволяют во многих случаях получать корректную постановку задачи.

3. Регуляризация задачи нахождения поля скоростей для нестационарных процессов. К сожалению, такое улучшение, о котором говорилось выше, происходит не всегда, так как функционал вида (2.1) (в каждом конкретном случае своя область интегрирования) не является строго выпуклым. Возможны такие виды деформирования, для которых поле скоростей сжимаемой пластической среды не является единственным. Самым простым примером может служить задача об одностороннем сжатии в цилиндрической пресс-форме без трения многослойной заготовки (рис. 1). Скорости на верхнем и нижнем торцах заготовки заданы и равны соответственно u_0 и нулю. Если предположить, что все слои сделаны из одного и того же материала и отличаются только пористостью, то распределение скоростей в объеме материала можно найти, минимизируя функционал

$$D = \sum_{i=1}^N \sqrt{1 - \theta_i} \sqrt{\psi_i e_i^2 + \varphi_i \gamma_i^2} V_i = \sum_{i=1}^N \sqrt{1 - \theta_i} |e_i| \sqrt{\psi_i + \frac{2}{3} \varphi_i} V_i.$$

Здесь N — количество слоев; V_i — объем i -го слоя; e_i, γ_i — первый инвариант тензора и второй инвариант девиатора тензора скоростей деформаций.

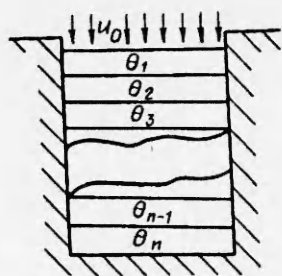


Рис. 1

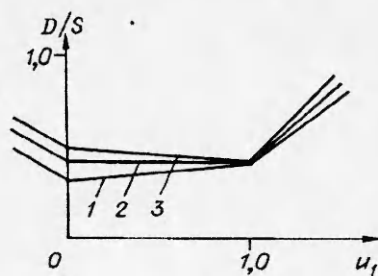


Рис. 2

Обозначим u_i безразмерную скорость i -й поверхности раздела слоев ($u_0 = -1$). Функционал через скорости выражается в виде

$$D = S \sum_{i=1}^{N+1} |u_{i+1} - u_i| \sqrt{(1 - \theta_i) \left(\psi_i + \frac{2}{3} \varphi_i \right)}$$

(S — площадь сечения пресс-формы). Точное решение этой задачи находится просто, и смысл его сводится к тому, что деформируется только слой, в котором пористость наибольшая. Если пористость всех слоев различна, то

$$u_i = \prod_{j=1}^{i+1} \text{sign}(\theta_i - \max_{i=1, N} \theta_j).$$

В том случае, когда пористость каких-то двух слоев одинакова, не существует единственного поля скоростей, на котором достигается минимум. На рис. 2 приведена зависимость D от u_1 для двухслойной заготовки при $\theta_1 = 0,55$, $\theta_2 = 0,5$ (кривая 1), $\theta_1 = 0,5$, $\theta_2 = 0,5$ (кривая 2), $\theta_1 = 0,45$, $\theta_2 = 0,5$ (кривая 3). Малые изменения пористости относительно состояния $\theta_1 = \theta_2$ приводят к скачкообразному изменению скорости. При практическом численном моделировании все u_i принимают значения либо 0, либо -1 , так как условие равенства пористостей никогда не реализуется точно. Другими словами, если попытаемся моделировать уплотнение однородного бруска в пресс-форме, разбив его послойно на элементы, то с чем большей точностью будут проводиться вычисления, тем дальше будем уходить от действительного распределения скоростей — однородного деформирования всего бруска. В дальнейшем задачу об уплотнении многослойной заготовки со слоями близкой плотности будем называть МЗ. Оставаясь в рамках жесткопластических моделей, нельзя избежать ситуаций, подобных описанной выше. Единственным выходом является регуляризация задачи нахождения поля скоростей.

Самый распространенный способ регуляризации — введение физической вязкости [3, 8]. При этом шаг по времени связан с коэффициентом вязкости зависимостью типа (1.1). Если материал близок по свойствам к жесткопластическому, то шаг по времени должен быть малым, что иногда не отвечает физической сущности задачи, как, например, при моделировании сжатия пористого бруска. Другой подход, который предлагается ниже, основан на использовании численных алгоритмов нахождения поля скоростей, содержащих в себе явно или неявно параметры регуляризации.

Такой алгоритм по сути и использовался в [5—8]. Поле скоростей определялось методом, который будем называть методом вязких приближений. Содержание его удобнее всего излагать в рамках вариационного подхода. Не ограничиваясь жесткопластическим материалом, рассмотрим более общий случай, для которого функционал, достигающий минимального значения для действительного поля скоростей [13], имеет вид

$$(3.1) \quad D = \frac{1}{2\alpha} \int_{\Omega} (1 - \theta) \sigma_r W^{\alpha} d\Omega - G(u, v, \omega), \quad W = (\psi e^2 + \varphi \gamma^2) / (1 - \theta)$$

(ψ, φ, σ_T — заданные функции параметров упрочнения, $0,5 \leq \alpha \leq 1$). Для жесткопластического материала $\alpha = 0,5$, если при этом $\psi = \infty$ ($\theta = 0$), то получаем материал Мизеса. Определим D_V как

$$D_V = \frac{1}{2\alpha} \int_{\Omega} \sigma_T (1 - \theta) \left[\alpha \frac{W}{W_0^{1-\alpha}} + (1 - \alpha) W_0^\alpha \right] d\Omega - G(u, v, \omega)$$

(W_0 — значение W при заданных e_0, γ_0). Для всех e, γ

$$(3.2) \quad D \leq D_V.$$

Совпадают значения функционалов D и D_V только при $e = e_0, \gamma = \gamma_0$. Доказательство следует из неравенства

$$\left(\frac{W}{W_0} \right)^\alpha \leq 1 + \alpha \frac{W}{W_0},$$

которое получено сравнением подынтегральных выражений в D и D_V . Справедливость неравенства является очевидным следствием вогнутости степенной функции в указанном интервале изменения параметра α . Из (3.2) имеем

$$D(e_1, \gamma_1) \leq \min D_V \leq D(e_0, \gamma_0),$$

где $D(e_1, \gamma_1)$ — значение функционала, вычисленное по скоростям, минимизирующим квадратичный функционал D_V . Знак равенства появляется только тогда, когда мы находимся в точке минимума. Подставляя вместо e_0, γ_0 новые значения e_1, γ_1 и повторяя процедуру нужное число раз, получаем итерационный процесс, который всегда сходится к искомому полю скоростей. Похожее доказательство сходимости метода вязких приближений можно построить для любого выпуклого функционала, при этом неравенство, аналогичное (3.2), следует из свойств субдифференциала [13]. Функционал D_V будем называть вязким приближением функционала D .

В качестве критерия достижения минимума в [5—8] используется условие практической сходимости последовательности получаемых скоростей. Если свойства материала близки к жесткопластическим (функционал не является строго выпуклым), то можно доказать, что никакая как угодно малая константа в условии практической сходимости метода вязких приближений не гарантирует достаточной точности определения положения минимума функционала. Вместе с тем, как было показано выше в задаче МЗ, точное решение может быть неинформативным из-за недостатков самой модели. Поэтому константа в условии практической сходимости служит, скорее, параметром регуляризации, который указывает на то, насколько в конце процесса итерирования должны быть близки значения диссипативных функционалов рассматриваемого жесткопластического и эквивалентного ему вязкого материала, полученного в результате последовательного построения вязких приближений. Недостатком такой регуляризации является отсутствие понятного физического смысла у полученных скоростей, так как итерационный процесс с различными начальными приближениями может привести к сильно отличающимся результатам.

Более перспективным подходом представляется построение численных алгоритмов, в которых бы использовалась информация о поле скоростей не только в данный момент условного времени t_0 , но и на всем промежутке $[t_0, t_0 + \Delta t]$, в простейшем случае — в момент времени $t_0 + \Delta t$. Более полная информация о течении материала позволила бы находить средние скорости на указанном промежутке времени без отождествления их со скоростями в момент времени t_0 . При численном исследовании процессов, моделируемых дифференциальными уравнениями, возможность усреднения дает использование неявных схем. Модель жесткопластического материала не содержит в себе никакой информации относительно эволюционных уравнений для ско-

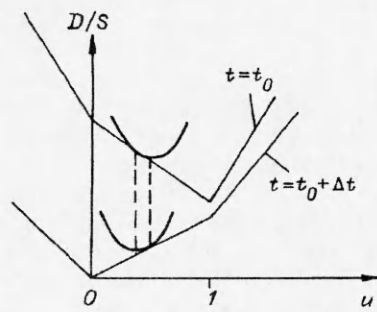
ростей. Для дифференцируемых функционалов их можно получить дифференцированием по времени соответствующих уравнений Эйлера. В нашем случае это невозможно, более того, сама идея неявного подхода нуждается в корректировке. Организуем, например, следующий итерационный процесс: по заданному начальному приближению поля скоростей и начальным значениям параметров упрочнения определим параметры материала в момент $t_0 + \Delta t$, найдем скорости и снова вернемся к началу процесса. В качестве среднего поля скоростей на рассматриваемом промежутке примем то поле скоростей, к которому сходится итерационный процесс. Оказывается, недостатком такого неявного подхода является необходимость использовать скорости, дающие точное решение задачи о деформировании жесткопластического материала. Именно поэтому итерационный процесс расходится, например, в задаче МЗ, для которой искомое поле скоростей невозможно получить численным исследованием жесткопластической модели.

Эффективный численный метод оказалось возможным построить на основе комбинации метода вязких приближений и применения неявных схем. Сущность его заключается в том, что подобный описанному выше итерационный процесс используется не для предельного жесткопластического материала, а для каждого вязкого приближения. Функционалы D_v дифференцируемы; для полей скоростей, минимизирующих этот функционал, можно получить эволюционные уравнения, с применением обычных численных подходов свести их к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и далее решать эти уравнения с помощью неявных схем. В простейшем случае, как уже указывалось, можно ограничиться описанной выше итерационной процедурой, последовательно переходя от одного вязкого приближения к другому. Если на промежутке времени Δt скорость изменялась устойчиво, то полученная неявным способом скорость будет отличаться от скоростей $u(t_0)$ и $u(t_0 + \Delta t)$ на величину порядка $O(\Delta t)$. Если скорость менялась неустойчиво и за время Δt изменилась на конечную величину, то итерационный процесс сходится к среднему значению скорости. Это поле скоростей минимизирует квадратичный функционал, который, с одной стороны, аппроксимирует исходный функционал в момент времени $t_0 + \Delta t$, а с другой — не может быть улучшен в момент t_0 в рамках обычного метода вязких приближений без ухудшения аппроксимации в момент $t_0 + \Delta t$. Более точно для найденного поля скоростей изменение скорости Δu_0 на шаге метода вязких приближений в момент t_0 компенсируется с заданной точностью изменением скорости Δu_1 на аналогичном шаге метода вязких приближений, но уже в момент времени $t_0 + \Delta t$. Условие остановки процесса итерирования следующее:

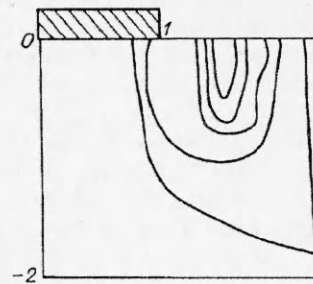
$$|\Delta u_0 + \Delta u_1| < \epsilon.$$

Если мгновенные скорости изменялись скачкообразно на рассматриваемом промежутке времени, то Δu_0 , Δu_1 остаются конечными величинами даже при как угодно малых Δt . Для случая уплотнения двухслойной заготовки исходные и аппроксимирующие квадратичные функционалы схематически изображены на рис. 3. Показан момент остановки итерационного процесса. Величина Δt в рассматриваемом подходе является параметром регуляризации и выбирается исходя из физических представлений о характерных скоростях изменения параметров. Скорость сходимости итераций определяется скоростями сходимости метода вязких приближений в моменты времени t_0 и $t_0 + \Delta t$. Если в момент времени t_0 метод вязких приближений сходится медленно, то в целом итерационный процесс может сходиться быстро за счет лучшей сходимости в момент $t_0 + \Delta t$, и наоборот. Чем больше шаг по времени и чем чувствительнее функционал D к параметрам упрочнения, тем, вообще говоря, лучше сходится итерационный процесс.

В качестве примера была решена задача о внедрении штампа в жесткопластическую конечную полосу с шириной, равной ширине штампа (плоское деформирование). Все поверхности контакта считались абсолютно



Р и с. 3



Р и с. 4

гладкими. Материал полосы слабосжимаемый, с однородно распределенной пористостью 0,001. Закон упрочнения в (3.1) задавался в виде, который обычно берется для железа:

$$\sigma_T = 140 + 50 \Gamma_0^{1/2}, \text{ МПа}; \frac{d\Gamma_0}{dt} = \sqrt{W}$$

(Γ_0 — аналог параметра Одквиста для сжимаемого пластического тела [12]). В начальный момент $\Gamma_0 = 0$ во всем объеме. Константа в условии практической сходимости $\epsilon = 0,001$. Рассматриваемая область была разбита на 126 конечных элементов, в узлах которых 137 скоростей определялись из условия минимума (3.1). Общее количество итераций на одном шаге 30. На рис. 4 показаны изолинии поля величины

$$(3.3) \quad \xi = \frac{p}{2\sigma_T} - \alpha, \quad \alpha = 0,5 \operatorname{arctg} \frac{e_y - e_x}{2e_{xy}},$$

где p — давление в материале, которое находилось по формуле [12] (для несжимаемого материала эта величина была бы не определена)

$$p = \sigma_T \sqrt{1 - \theta} \frac{(\psi + \varphi/6)e/\gamma}{\sqrt{\varphi + \psi e^2/\gamma^2}}, \quad p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$$

Видно, что полученные изолинии значительно отличаются от семейства линий скольжения для идеально пластического материала, уравнением которых и является (3.3). В частности, под штампом образуется большая область однородного деформирования материала. Подобное решение нельзя получить, если рассматривать поле скоростей только в начальный момент времени. В этом случае для нашей задачи функционал достигал бы минимума на разрывных полях скоростей (решения Прандтля, Хилла [14]), что невозможно для упрочняющегося материала [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988.
2. Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. — М.: Мир, 1964.
3. Пэжина П. Основные вопросы вязкопластичности. — М.: Мир, 1968.
4. Cormeau I. Numerical stability in quasi-static elastic / visco-plasticity // Intern. J. Num. Meth. Eng. — 1975. — V. 9, N 1.
5. Петросян Г.Л. Пластическое деформирование порошковых материалов. — М.: Металлургия, 1988.
6. Олевский Е.А., Михайлов О.В., Сердюк Г.Г., Штерн М.Б. Определение поля плотности при прессовании изделия сложной формы методом пронизаемых элементов // Порошковая металлургия. — 1989. — № 3.
7. Дорощкевич Е.А., Митяш А.Л. Использование метода конечных элементов при решении задач об обратном выдавливании пористого тела // Реологические модели и процессы деформирования пористых порошковых и композиционных материалов. — Киев: Наук. думка, 1985.

8. Гун Г.Я., Фролов А.А., Садыков О.Б. Система проектирования технологических режимов горячего изостатического прессования // Порошковая металлургия. — 1991. — № 6.
9. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред. — М.: Наука, 1981.
10. Проценко А.М. Теория упругоидеальнопластических сред. — М.: Наука, 1982.
11. Мосолов П.П. Асимптотическая теория тонких прямолинейных панелей // ДАН СССР. — 1972. — Т. 206, № 2.
12. Штерн М.Б., Сердюк Г.Г., Максименко Л.А. и др. Феноменологические теории прессования порошков. — Киев: Наук. думка, 1982.
13. Скороход В.В., Штерн М.Б., Мартынова И.Ф. Теория нелинейно-вязкого и пластического поведения пористых тел // Порошковая металлургия. — 1988. — № 8.
14. Друянов Б.А., Непершин Р.И. Теория технологической пластичности. — М.: Машиностроение, 1990.
15. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. — М.: Наука, 1971.

г. Киев

Поступила 17/III 1993 г.

УДК 539.219.1

Г.Н. Миренкова, Э.Г. Соснина

НЕОДНОРОДНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Решается пространственная задача о распределении напряжений и деформаций внутри и на поверхности неоднородного включения в анизотропной упругой среде и об энергии взаимодействия неоднородного включения с внешним полем. Различаются понятия неоднородности, включения и неоднородного включения. Под неоднородностью понимается область, упругие постоянные которой отличны от упругих постоянных среды, под включением — область, имеющая те же упругие свойства, что и среда, но претерпевшая какие-либо изменения и являющаяся вследствие этого источником внутренних напряжений в среде, под неоднородным включением — область со свойствами неоднородности и включения одновременно.

В настоящей работе под неоднородным включением понимается область, под давлением заполненная материалом, упругие свойства которого отличны от упругих свойств среды. Давление моделируется слоем объемных сил, распределенных по границе области. Одновременно среда находится под действием внешнего поля напряжений.

1. Рассмотрим трехмерную неограниченную анизотропную упругую среду с областью V , которая под давлением заполнена материалом с упругими свойствами, отличными от упругих свойств среды. Тензор упругих модулей среды с неоднородным включением $c^{\alpha\beta\gamma\mu}(x)$ запишем в виде

$$c(x) = c_0 + c_1 V(x),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ — точка среды; $V(x)$ — характеристическая функция области, занятой включением ($V(x) = 1, x \in V; V(x) = 0, x \notin V$); c_0 — тензор упругих постоянных однородной среды; c_1 — постоянный тензор, характеризующий изменение упругих постоянных внутри включения. Случаю полости соответствует $c_1 = -c_0$, а абсолютно жесткому включению $c_1 \rightarrow \infty$. Обозначим через $q^\alpha(x)$ слой объемных сил, распределенных по поверхности неоднородного включения и моделирующих давление, под которым заполнена область. Положим