

УДК 533.951

ПОВЕДЕНИЕ ПЛОТНОСТИ И ПОЛНОГО ДАВЛЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ВЫНУЖДЕННОГО И СПОНТАННОГО ПЕРЕСОЕДИНЕНИЯ

Г. И. Дудникова, В. П. Жуков, Г. Фукс*

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск

* Институт физики плазмы, Юлих (Германия)

Рассмотрены особенности поведения плотности и полного (суммы магнитного и газокINETического) давления в процессе вынужденного (на примере распространения магнитозвуковой волны в окрестности X-точки) и спонтанного (на примере развития винтовой тиринг-моды) пересоединения. Показано, что распределение полного давления слабо зависит от начальной величины газокINETического давления, напряженности z-компоненты магнитного поля и теплопроводности в широком диапазоне параметров. Характер распределения плотности определяется только значением коэффициента теплопроводности. Показано также, что в случае спонтанного пересоединения поведение полного давления и плотности, в отличие от вынужденного, слабо зависит от теплопроводности.

1. Рассмотрим двумерную ($\partial/\partial z = 0$) задачу о распространении магнитозвуковой волны в окрестности X-точки. Исходные уравнения одножидкостной магнитной гидродинамики в общепринятых безразмерных переменных имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) A &= \nu \Delta A, & \frac{\partial H_z}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) H_z &= -H_z \operatorname{div} \mathbf{V} + (\mathbf{H} \nabla) V_z + \nu \Delta H_z, \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} \right) &= -\nabla(p + H_z^2/2) - \Delta A \nabla A, & \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) V_z \right) &= (\mathbf{H} \nabla) H_z, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) &= 0, & \frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) p &= -\gamma p \operatorname{div} \mathbf{V} + (\gamma - 1) \nu \mathbf{j}^2 + \chi \Delta T, \\ T &= \frac{p}{\rho}, & \mathbf{H} = (H_x, H_y) &= \left(\frac{\partial A}{\partial y}, -\frac{\partial A}{\partial x} \right), & \mathbf{V} &= (V_x, V_y). \end{aligned}$$

Начальные условия соответствовали стационарному решению этих уравнений $A = A_0 = (x^2 - y^2)/2$ (X-точка), $H_z = H_0$, $p = \beta$, $\rho = 1$, $\mathbf{V} = 0$, где H_0 и β — заданные величины.

Движение инициировалось возмущением z-компоненты вектор-потенциала магнитного поля A на границе расчетной области $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, соответствующим сходящейся цилиндрической волне: $A(x, y, t) = A_0(x, y) + f(t + \ln r)$. Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (x, y принадлежат границе). Функция $f(\xi)$ имеет вид $-E_1(\xi - \ln \sqrt{2})^2/\xi$ при $\xi > \ln \sqrt{2}$ и $f(\xi) = 0$ при $\xi < \ln \sqrt{2}$. Значения плотности ρ и давления плазмы p на границе полагались равными невозмущенным, если плазма втекает в расчетную область. В противном случае полагалось равенство нулю производных по нормали к границе.

Коэффициенты магнитной вязкости ν и теплопроводности χ полагались постоянными.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01572) и Германского исследовательского общества (DFG).

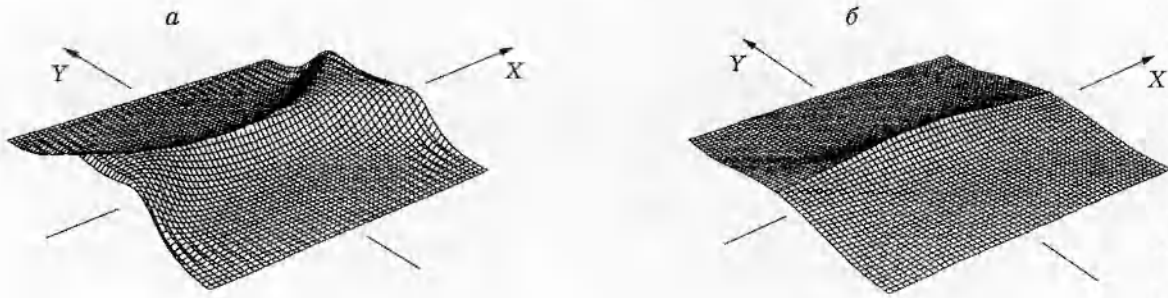


Рис. 1

Для численного решения поставленной задачи использовалась явная схема первого порядка с учетом знака скорости [1, 2].

Рассматриваемая задача подробно изучена в [1] при малых β и $H_0 = 0$, где показано, что распределение z -компоненты электрического тока (функции ΔA) на квазистационарном этапе определяется амплитудой возмущения E_1 и обратной проводимостью плазмы ν и практически не зависит от теплопроводности χ . Согласно результатам настоящей работы не только A , но и полное давление $P = p + H_z^2/2 - \beta - H_0^2/2$ на больших временах ($t > 10$) зависит практически только от E_1 и ν в широком диапазоне параметров $0 < \beta < 1$, $0 < H_0 < 4$, $0 < \chi < 2\nu$. Например, при $E_1 = 0,06$ и $\nu = 0,01$ характерное распределение P в указанном выше диапазоне представлено на рис. 1, а. Токовый слой в этом случае расположен вдоль оси X . Распределение p существенно зависит от значений χ , β и H_0 . При $H_0 = 0$ распределение p совпадает с показанным на рис. 1, а, а при $H_0 = 4$ — на рис. 1, б.

Причина подобного поведения P , по-видимому, состоит в том, что полоидальное поле скорости возникает благодаря перезамыканию противоположно направленных полоидальных магнитных потоков и определяется конфигурацией полоидального магнитного поля. В свою очередь полоидальное магнитное поле определяется только полем полоидальной скорости, величиной возмущения поля на границе E_1 и проводимостью ν . Роль других величин оказывается несущественной. Поэтому $\nabla(p + H_z^2/2)$ слабо зависит от параметров β , H_0 и χ . Следовательно, и P слабо зависит от этих параметров.

В [1] отмечено, что при малом β и $H_0 = 0$ плотность в центре токового слоя при $\chi \ll \nu$ достигает минимума, а при $\chi > \nu$ — максимума. Из наших расчетов следует, что это свойство имеет место и в более широком диапазоне параметров β и H_0 . В частности, при увеличении H_0 изменение ρ существенно уменьшается (переход к пределу несжимаемой жидкости [3]). Однако имеет ли плотность максимум или минимум в токовом слое, определяется только величиной коэффициента теплопроводности.

Описанное выше свойство плотности легко объяснить при $H_z = 0$ ($H_0 = 0$) и малом β . В этом случае $P = p - \beta \approx p$. Как сказано выше, распределение $P \approx p$ слабо зависит от теплопроводности. Поскольку влияние теплопроводности на температуру значительно, то соответственно плотность плазмы $\rho = p/T$ будет существенно зависеть от χ . При $H_0 \neq 0$ обсуждаемое свойство распределения ρ не является очевидным.

2. В качестве примера спонтанного пересоединения рассмотрим развитие винтовой тиринг-моды. Задача решалась в цилиндрической системе координат в области $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Предполагалось наличие винтовой симметрии $\partial/\partial z = -R^{-1}\partial/\partial\varphi$. В этом случае для вектора \mathbf{f} удобно ввести величины f_g и f_s , связанные с его цилиндрическими компонентами f_z и f_φ следующим образом: $f_g = f_z + (r/R)f_\varphi$, $f_s = f_\varphi - (r/R)f_z$. В этом

случае уравнения имеют вид

$$\rho \left(\frac{\partial V_g}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) V_g \right) = (\mathbf{H} \nabla) H_g;$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) V_r - \frac{V_\varphi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)^{-1} \left(-\frac{\partial H_g^2/2}{\partial r} + j_g \frac{\partial A_g}{\partial r} \right); \quad (2.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_s}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) V_s + \frac{V_s V_r}{r} - 2 \frac{V_r V_z}{R} \right) = -\left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial H_g^2/2}{\partial \varphi} + j_g \frac{1}{r} \frac{\partial A_g}{\partial \varphi} \right); \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0; \quad \frac{\partial A_s}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) A_g = \nu \left(\Delta A_g - 2 \frac{H_z}{R} \right); \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V} H_z) = (\mathbf{H} \nabla) V_z + \nu \Delta H_z;$$

$$H_s = -\frac{\partial A_g}{\partial r}, \quad H_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_g}{\partial \varphi}; \quad (2.4)$$

$$j_s = -\frac{\partial H_g}{\partial r}, \quad j_r = \frac{1}{r} \frac{\partial H_g}{\partial \varphi}, \quad j_g = -\Delta A_g + 2 \frac{H_z}{R}.$$

Здесь A_g — g -компонента вектор-потенциала магнитного поля.

Поскольку в большинстве токамаков теплопроводность вдоль магнитного поля велика, а поперек поля очень мала, то для температуры использовалось уравнение

$$\frac{3}{2} \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) T \right) = -p \operatorname{div} \mathbf{V} + \nu j^2 + \operatorname{div}(\chi_{\parallel} \mathbf{e} (\mathbf{e} \nabla) T), \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{H_r^2 + H_\varphi^2 + H_z^2}},$$

где χ_{\parallel} — коэффициент теплопроводности вдоль магнитного поля, а \mathbf{e} — единичный вектор, направленный вдоль магнитного поля.

В качестве начальных условий выберем следующие:

$$\rho = 1, \quad H_z = 1, \quad V_z = 0, \quad H_r = 0, \quad H_s = \frac{r}{R} \left(\frac{1 - (1 - r^2)^{q+1}}{qr^2} - 1 \right). \quad (2.5)$$

Условие (2.5) определяет нейтральный слой: $H_s > 0$ вблизи оси координат и $H_s < 0$ при больших значениях r . Положение нейтральной ($H_s = 0$) поверхности зависит от величины q . Давление плазмы в начальный момент времени полагается таким, чтобы обеспечить равновесие плазмы в магнитном поле. Равновесие нарушалось малым возмущением скорости, вид которого не играет роли.

Данная задача имеет непосредственное отношение к пилообразным колебаниям в токамаке [3, 4]. Параметр R в этом случае равен отношению большого радиуса токамака к малому. Приведенные ниже рис. 2–4 относятся к варианту $R = 4$, $q = 3$, $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$. При численном решении этой задачи использовалась неявная схема в направлении по φ . Узлы сетки по r располагались в полуцелых точках, что позволяло избежать трудностей, связанных с использованием цилиндрической системы координат.

На рис. 2 приведены силовые линии полоидального магнитного поля, которые совпадают с изолиниями A_g (см. (2.4)). На рис. 2 видно, что развитие возмущений в данной конфигурации сопровождается появлением «острова» — перезамкнувшихся силовых линий полоидального магнитного поля (рис. 2). Движение сосредоточено внутри некоторого круга радиуса r_* , примерно совпадающего с кругом, внутри которого в начальный момент

времени полный полоидальный магнитный поток равен нулю: $\int_0^{r_*} H_s(r, t=0) r dr = 0$ (см.

(2.5)). При $r > r_*$ плазма остается практически невозмущенной.

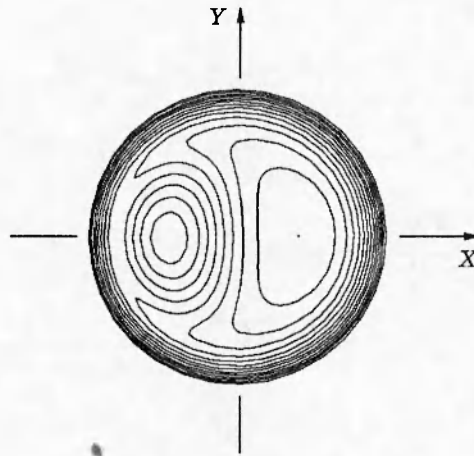


Рис. 2

Расчеты выявили интересную особенность поведения распределения величины $P = p + H_g^2/2$: за исключением узкой окрестности токового слоя, с большой точностью выполняется равенство

$$(\mathbf{H}\nabla)P \approx 0, \quad (2.6)$$

которое можно получить, умножая уравнения (2.1), (2.2) на H_r , H_s соответственно и суммируя их. Так как полоидальная скорость плазмы, а тем более ее ускорение, малы (за исключением узкой окрестности токового слоя), то, учитывая, что $\mathbf{H}\nabla A_g = 0$ и полагая $1 + r^2/R^2 \approx 1$, получаем (2.6). Отметим, что величина r^2/R^2 мала даже при $r = 1$, поскольку R велико. Кроме того, при $r > r_*$ плазма не возмущена, поэтому все функции в этой области зависят только от r и (2.6) выполняется автоматически. Таким образом, пренебрежение обсуждаемыми членами вполне оправданно.

Из (2.6) следует, что P является функцией A_g . Расчеты показывают, что распределение P оказывается подобным распределению A_g даже в деталях, хотя говорить о зависимости P только от A_g и t нельзя. Объясняется это следующим. Как сказано выше, на периферии, где плазма не возмущена, все величины зависят только от r . В остальной части области величина dV/dt мала, кроме узкой окрестности токового слоя. Следовательно, приближенно можно записать $\nabla P = j_g \nabla A_g$. За исключением окрестности токового слоя, ток $j_g = -\Delta A_g + 2H_z/R$ имеет постоянный знак и меняется достаточно плавно, причем в центральной части области, т. е. при $r < r_*$, величина ΔA_g примерно в 2 раза меньше величины $2H_z/R \sim 2/R$. Поэтому с некоторой точностью можно записать $j_g \approx 2/R$ и соответственно $\nabla P \approx 2\nabla A_g/R$. На временах, когда остров достаточно велик, полоидальное магнитное поле (градиенты A_g) в центре области уменьшается. Если бы внутренний и внешний магнитные потоки совпадали, то в результате пересоединения полоидальное поле исчезло бы полностью. Поэтому на этой стадии процесса в центре области условие $j_g \approx 2/R$ выполняется с большой точностью. Соответственно $P - 2A_g/R = \text{const}$ за исключением узкой окрестности токового слоя.

Теплопроводность значительно влияет на температуру и давление, выравнивая их вдоль магнитного поля. Поведение же полоидальной скорости и сил, определяющих эту скорость, т. е. функций A_g и P , практически не зависит от $\chi_{||}$, как и в случае вынужденного пересоединения. Эта независимость очевидна в модели большого тороидального магнитного поля (модели Кадомцева) [3, 4], в которой конкретный вид уравнения для давления (температуры) не важен, поскольку оно определяется из условия несжимаемости плазмы. Однако обсуждаемое свойство не связано с наличием большого тороидального по-

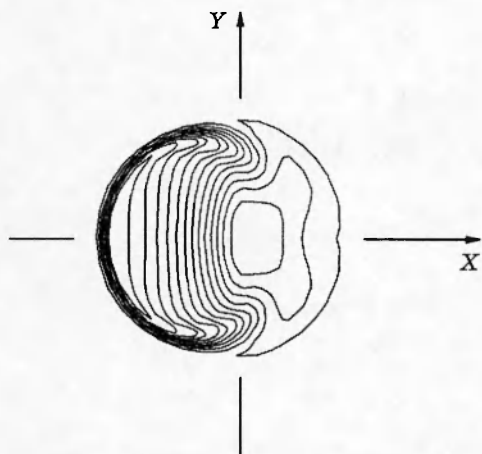


Рис. 3

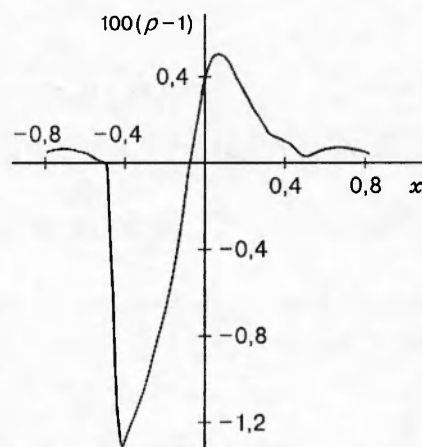


Рис. 4

ля. Например, в рассмотренной выше задаче о распространении магнитозвуковой волны в окрестности X-точки независимость процесса пересоединения от теплопроводности имеет место даже при полном отсутствии тороидального поля.

Изменение плотности в процессе вынужденного пересоединения при наиболее важных значениях $R > 3$ мало и составляет менее 5%. На рис. 3 представлены изолинии плотности ρ , а на рис. 4 — зависимость $\rho(x)$ при $y = 0$ в момент времени, соответствующий магнитной конфигурации, изображенной на рис. 2. Видно, что плотность плазмы в токовом слое достигает минимума. В отличие от случая вынужденного пересоединения наличие теплопроводности не приводит к распределению ρ с максимумом в центре токового слоя. Это связано с существенными различиями в геометрии, распределении начального давления и т. д. в этих двух задачах.

Таким образом, в настоящей работе показано, что поведение полного давления в процессе вынужденного и спонтанного пересоединения определяется в основном характеристиками полоидального магнитного поля и слабо зависит от остальных параметров задачи. Распределение же плотности может существенно зависеть от этих параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брушлинский К. В., Заборов А. М., Сыроватский С. И. Численный анализ токового слоя в окрестности нулевой линии // Физика плазмы. 1980. Т. 6, вып. 2. С. 297–311.
2. Березин Ю. А., Дудникова Г. И. Численные модели плазмы и процессы пересоединения. М.: Наука, 1985.
3. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Нелинейные винтовые возмущения плазмы в токамаке // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1973. Т. 65, вып. 2. С. 575–589.
4. Кадомцев Б. Б. О неустойчивости срыва в токамаках // Физика плазмы. 1975. Т. 1, вып. 5. С. 710–715.

Поступила в редакцию 29/V 1997 г.,
в окончательном варианте — 12/IX 1997 г.