

2. Хома И. Ю. Концентрация напряжений в тонкой пластине, ослабленной бесконечным числом круговых отверстий, при упругопластических деформациях.— В кн.: Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, 1964.
3. Аннин Б. Д. Двумерные упругопластические задачи. Новосибирск, изд. Новосибир. ун-та, 1968.
4. Мирсалимов В. М. О решениях упругопластических задач для плоскости с одно-периодической системой круговых отверстий.—«Докл. АН Аз ССР», 1973, № 5.
5. Мирсалимов В. М. Упругопластическая задача для массива, ослабленного отверстиями.—«Изв. АН СССР. МТТ», 1974, № 6.
6. Мирсалимов В. М., Мехти-заде Э. М. Упругопластическая задача для тонкой пластины, ослабленной бесконечным рядом круглых отверстий.— В кн.: Исследования по некоторым вопросам конструктивной теории функций и дифференциальных уравнений. Баку, Изд. АЗИНСФТЕХИМА, 1973.
7. Иванов Г. М., Космодамианский А. С. Обратная периодическая упругопластическая задача.—«Докл. АН УССР. Сер. А», 1971, № 10.
8. Мирсалимов В. М. Обратные задачи теории упругости. Деп. № 3998-72. Баку, 1971.
9. Галин Л. А. Плоская упругопластическая задача.— ПММ, 1946, т. 10, вып. 3.
10. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М., «Наука», 1966.
11. Григоров Э. И., Фильштинский А. А. Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.

УДК 532.507

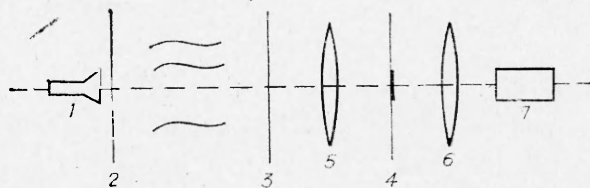
СВЯЗЬ ХАРАКТЕРИСТИК СИГНАЛА ТЕНЕВОГО ПРИБОРА СО СПЕКТРОМ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Ю. И. Копилевич
(Ленинград)

Теневой метод является одним из наиболее распространенных оптических методов исследования турбулентности [1,2]. При использовании теневого прибора с фотоэлектрической регистрацией имеется принципиальная возможность находить статистические характеристики турбулентности по статистическим характеристикам снимаемого с прибора случайного сигнала. В данной работе исследуется связь среднего значения и дисперсии сигнала теневого прибора с энергетическим спектром оптических неоднородностей в среде.

1. Связь среднего значения и дисперсии сигнала с моментами светового поля. Рассмотрим общую схему теневого прибора, изображенную на фигуре. Когерентный монохроматический световой пучок от осветителя 1 проходит слой исследуемой среды толщиной L , расположенный между плоскостями 2 и 3. Плоскость 3 является передней фокальной плоскостью линзы 5; в ее задней фокальной плоскости 4 (теневой плоскости) расположена теневая диафрагма. Прошедший теневую плоскость свет собирается линзой 6 на фотоэлектронный умножитель 7. В дальнейшем под «сигналом прибора» будет пониматься интенсивность света, падающего на ФЭУ.

Введем декартовы координаты x, y, z так, чтобы ось z была направлена вдоль оси распространения света; плоскости 2



соответствует $z = 0$, плоскости $\mathcal{Z} - z = L$. Пусть $u(x, y, L) \equiv u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x, y)$ — случайное распределение поля на плоскости \mathcal{Z} . Тогда в плоскости \mathcal{A} распределение поля в координатах $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, связанных с координатами $\mathbf{x} = (x, y)$ соотношением $\mathbf{x} = \frac{2\pi}{\lambda f} \mathbf{x}$ (λ — длина волны света, f — фокусное расстояние линзы \mathcal{B}), есть преобразование Фурье от $u(\mathbf{x})$. В случае, когда расстояние между плоскостью \mathcal{Z} и линзой \mathcal{B} не равно фокусному расстоянию линзы, поле на плоскости \mathcal{A} отличается от преобразования Фурье поля u множителем, равным по модулю единице [3].

Обозначим через E энергию света, прошедшего через теневую диафрагму и собранного линзой \mathcal{B} на фотоприемник \mathcal{Z} . Тогда для среднего значения сигнала теневого прибора $\langle E \rangle$ (угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций случайной среды) получим выражение

$$(1.1) \quad \langle E \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{x}_2 \int d\mathbf{x} \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; L) e^{i\mathbf{x}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \chi(\mathbf{x}),$$

где величина $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; L) \equiv \langle u(\mathbf{x}_1) \bar{u}(\mathbf{x}_2) \rangle$ — функция взаимной когерентности [4] или второй момент случайного поля u на плоскости $z = L$; $\chi(\mathbf{x})$ — функция пропускания по интенсивности теневой диафрагмы. Аналогично (1.1) можно написать выражение для дисперсии D сигнала

$$(1.2) \quad D \equiv \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{x}_2 \int d\mathbf{x}_3 \int d\mathbf{x}_4 \int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{x}_2 \chi \times \\ \times (\mathbf{x}_1) \chi(\mathbf{x}_2) e^{i\mathbf{x}_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} e^{i\mathbf{x}_2(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4)} (\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4; L) - \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; L) \Gamma \times \\ \times (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4; L)),$$

где величина $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4; L) \equiv \langle u(\mathbf{x}_1) \bar{u}(\mathbf{x}_2) u(\mathbf{x}_3) \bar{u}(\mathbf{x}_4) \rangle$ — четвертый момент поля u на плоскости $z = L$, а $\bar{\Gamma}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4; L) \equiv \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4; L) - \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; L) \Gamma(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4; L)$ — центрированный четвертый момент.

2. Вычисление моментов светового поля в борновском приближении. Используем следующие предположения о случайной среде. Поле диэлектрической постоянной $\varepsilon(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, будем считать статистически однородным и изотропным. Размер наименьших неоднородностей в среде предположим много большим длины волны света, что позволяет использовать скалярную теорию распространения [5]. Флуктуации диэлектрической постоянной предполагаются малыми:

$$(2.1) \quad \varepsilon(\mathbf{r}) = \langle \varepsilon \rangle (1 + \varepsilon'(\mathbf{r})), \quad |\varepsilon'(\mathbf{r})| \ll 1,$$

где $\langle \varepsilon \rangle$ (среднее значение диэлектрической постоянной) не зависит от координат в силу принятых предположений.

Поле $u(\mathbf{r})$ удовлетворяет краевой задаче

$$(2.2) \quad \begin{cases} \Delta u(\mathbf{r}) + k^2 (1 + \varepsilon'(\mathbf{r})) u(\mathbf{r}) = 0, \\ u(\mathbf{r})|_{z=0} = u_0(\mathbf{x}), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} - ik \right) u = 0, \end{cases}$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$; $\mathbf{x} = (x, y)$; $k^2 = \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} \langle \varepsilon \rangle$; λ — длина волны света. В силу (2.1) решение задачи (2.2) можно искать в виде разложения Борна [6]

$$(2.3) \quad u(\mathbf{r}) = V_0(\mathbf{r}) + V_1(\mathbf{r}) + V_2(\mathbf{r}) + \dots,$$

где $V_i(\mathbf{r})$, $i=0, 1, 2, \dots$, имеет i -й порядок по величине ε' . Подставляя (2.3) при $\mathbf{r}=(x, y, L)$ в определения второго и четвертого моментов и пренебрегая членами, пропорциональными степеням ε' выше второй, получим

$$(2.4) \quad \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; L) = \sum_{i,j=0}^{i+j=2} \Gamma_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2);$$

$$(2.5) \quad \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4; L) = \sum_{i,j,k,l=0}^{i+j+k+l=2} \Gamma_{ijkl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4),$$

где $\mathbf{x}_m=(x_m, y_m)$, $m=1, 2, 3, 4$;

$$(2.6) \quad \Gamma_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \langle V_i(x_1, y_1, L) \bar{V}_j(x_2, y_2, L) \rangle;$$

$$(2.7) \quad \Gamma_{ijkl}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \equiv \langle V_i(x_1, y_1, L) \bar{V}_j(x_2, y_2, L) V_k(x_3, y_3, L) \bar{V}_l(x_4, y_4, L) \rangle.$$

Аналогичным образом

$$(2.8) \quad \Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; L) \Gamma(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4; L) = \sum_{i,j,k,l=0}^{i+j+k+l=2} \Gamma_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Gamma_{kl}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4).$$

Учитывая, что $\Gamma_{00}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Gamma_{ij}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \Gamma_{00ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$ и $\Gamma_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Gamma_{00}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \Gamma_{ij00}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)$, из (2.5), (2.8) получим выражение для централизованного четвертого момента

$$(2.9) \quad \hat{\Gamma}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4; L) = \Gamma_{1001}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + \Gamma_{0110}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + \\ + \Gamma_{1010}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \Gamma_{0101}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4).$$

Для вычисления слагаемых, входящих в (2.4), (2.9), необходимо найти $V_0(\mathbf{r})$ и $V_1(\mathbf{r})$ на плоскости $z=L$. Поле $u_0(\mathbf{x})$ на плоскости $z=0$ зададим в виде

$$(2.10) \quad u_0(\mathbf{x}) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right).$$

Подставляя в (2.2) $u(\mathbf{r})$ в виде разложения (2.3), обычным методом находим

$$(2.11) \quad V_0(\mathbf{r}) = \frac{A}{B(z)} \exp\left(-\bar{B}(z) \frac{z^2 + \bar{y}^2}{2a^2 |B(z)|^2} + ikz\right),$$

где $B(z) \equiv 1 + i \frac{z}{ka^2}$;

$$(2.12) \quad V_1(\mathbf{r}) = -\frac{k^2}{4\pi} \int \frac{e^{2ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \varepsilon'(\mathbf{r}') V_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Используем «сагитальную аппроксимацию» [4] для функции Грина в (2.12), а именно, предполагая $\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{(z-z')^2} \ll 1$ ($\mathbf{x}=(x, y)$), напомним

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \simeq \frac{\exp\left(|z-z'| + \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}{|z-z'|}\right)}{|z-z'|}.$$

Будут использованы также обычные предположения [5]:

$$(2.13) \quad kl \gg 1;$$

$$(2.14) \quad ka \gg 1;$$

$$(2.15) \quad l \ll L,$$

где l — внутренний масштаб неоднородностей.

3. Среднее значение сигнала теневого прибора. Полагая в (2.11), (2.12) $\mathbf{r}=(x, y, L)$ и подставляя в (2.6), получим после некоторых преобразований с учетом сделанных предположений слагаемые в правой части (2.4):

$$(3.1) \quad \Gamma_{00}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{A^2}{|B(L)|^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2a^2 |B(L)|^2} + i \frac{L}{2ka^4} \frac{x_1^2 - x_2^2}{|B(L)|^2}\right);$$

$$(3.2) \quad \Gamma_{10}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \Gamma_{01}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0;$$

$$(3.3) \quad \Gamma_{20}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \bar{\Gamma}_{02}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\frac{k^2 L A^2}{4 |B(L)|^2} \times \\ \times \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2a^2 |B(L)|^2} + i \frac{L}{2ka^4} \frac{x_1^2 - x_2^2}{|B(L)|^2}\right) \int_0^\infty \sigma(s) ds,$$

где $\sigma(|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'|) \equiv \sigma(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') \equiv \langle \varepsilon'(\mathbf{r}') \varepsilon'(\mathbf{r}'') \rangle$ — корреляционная функция флуктуаций диэлектрической постоянной;

$$(3.4) \quad \Gamma_{11}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{k^2 A^2}{4 |B(L)|^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2a^2 |B(L)|^2} + i \frac{L}{2ka^4} \frac{x_1^2 - x_2^2}{|B(L)|^2}\right) \times \\ \times \int_0^L dp \int d\eta \Phi(\eta) \exp\left(-\eta^2 \frac{(L-p)^2}{k^2 a^2 |B(L)|^2} + i\beta(p) x_1 \eta - i\bar{\beta}(p) x_2 \eta\right),$$

где $\beta(p) \equiv \frac{B(p)}{B(L)}$; $\Phi(\eta) \equiv \Phi(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(|\mathbf{r}|) e^{i\eta_1 x + i\eta_2 y} dx dy dz$;
 $\eta = (\eta_1, \eta_2)$

— двумерное преобразование Фурье корреляционной функции. (Можно показать, что в рассматриваемом случае однородного изотропного поля двумерный спектр $\Phi(\eta)$ связан с трехмерным преобразованием Фурье корреляционной функции $F(\eta)$ соотношением $\Phi(\eta) = 2\pi F(\eta)$.)

Подставляя в (1.1) выражение для второго момента (2.4), получим

$$\langle E \rangle = I_{00} + I_{20} + I_{02} + I_{11},$$

где

$$(3.5) \quad I_{ij} \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \Gamma_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) e^{i\mathbf{x}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \chi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}.$$

Вычисление (3.5) с функциями $\Gamma_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ из (3.1) — (3.4) приводит к результату

$$(3.6) \quad I_{00} = A^2 a^2 \int \chi(\mathbf{x}) e^{-x^2 a^2} d\mathbf{x}; \\ I_{20} = I_{02} = -\frac{\pi k^2 L A^2 a^4}{4} \int_0^\infty \Phi(\eta) \eta d\eta \int \chi(\mathbf{x}) e^{-x^2 a^2} d\mathbf{x};$$

$$(3.7) \quad I_{11} = \frac{k^2 L A^2 a^4}{2} \int_0^\infty \Phi(\eta) \eta \left\{ \int \chi(\mathbf{x}) e^{-a^2(\eta^2 + x^2)} I_0(2a^2 \eta x) d\mathbf{x} \right\} d\eta,$$

где $I_0(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента с нулевым индексом. Величина I_{00} представляет собой значение сигнала при отсутствии неоднородности.

родностей («фоновая засветка»); в дальнейшем будет рассматриваться среднее значение отклонения сигнала теневого прибора от фонового значения I_{00} , т. е. $E' = E - I_{00}$. Из (3.6), (3.7) следует

$$(3.8) \quad \langle E' \rangle = \frac{\pi a^4 A^2 k^2 L}{2} \int_0^\infty \Phi(\eta) \eta \left\{ \int \chi(\mathbf{x}) e^{-a^2 \mathbf{x}^2} [e^{-a^2 \eta^2} I_0(2a^2 \eta \mathbf{x}) - 1] d\mathbf{x} \right\} d\eta.$$

4. Дисперсия сигнала теневого прибора. Полагая в (2.11), (2.12) $\mathbf{r} = (x, y, z)$ и подставляя в (2.7), после некоторых преобразований с учетом (2.13) — (2.15) получим слагаемые в правой части (2.9):

$$(4.1) \quad \Gamma_{1001}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Gamma_{0000}(x_1, x_2, x_3, x_4) \frac{k^2}{4} \int_0^L dp \int d\eta \Phi(\eta) \times \\ \times \exp \left[-\eta^2 \frac{(L-p)^2}{k^2 a^2 |B(L)|^2} + i\beta(p) x_1 \eta - i\bar{\beta}(p) x_4 \eta \right];$$

$$(4.2) \quad \Gamma_{0110}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{\Gamma}_{1001}(x_2, x_1, x_4, x_3);$$

$$(4.3) \quad \Gamma_{1010}(x_1, x_2, x_3, x_4) = -\Gamma_{0000}(x_1, x_2, x_3, x_4) \frac{k^2}{4} \int_0^L dp \int d\eta \Phi(\eta) \times \\ \times \exp \left[-\eta^2 \frac{(L-p)^2}{k^2 a^2 |B(L)|^2} - i\eta^2 \left(1 + \frac{pL}{k^2 a^4} \right) \frac{L-p}{k |B(L)|^2} + \right. \\ \left. + i\beta(p) x_1 \eta - i\beta(p) x_3 \eta \right];$$

$$(4.4) \quad \Gamma_{0101}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{\Gamma}_{1010}(x_2, x_1, x_4, x_3).$$

Подставляя выражения (4.1) — (4.4) в (2.9), получим центрированный четвертый момент $\Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4; L)$. Теперь из (1.2) имеем

$$(4.5) \quad D = 2\pi k^2 A^4 a^8 \int_0^\infty \Phi(\eta) e^{-a^2 \eta^2} \eta \left\{ \int_0^L dp \left[\cos \frac{p\eta^2}{2k} \operatorname{Im} \psi(p, \eta) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \frac{p\eta^2}{2k} \operatorname{Re} \psi(p, \eta) \right]^2 \right\} d\eta,$$

где

$$(4.6) \quad \psi(p, \eta) = \int \chi(\mathbf{x}) e^{-a^2 \mathbf{x}^2} J_0 \left(ia^2 \left[1 + i \frac{p}{ka^2} \right] \eta \mathbf{x} \right) d\mathbf{x}.$$

$J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого индекса.

5. Анализ результатов. В качестве теневой диафрагмы практически используются диафрагмы одного из следующих двух видов: 1) теневая диафрагма в виде непрозрачной полуплоскости; соответствующая функция пропускания

$$\chi_{\Pi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & x_1 > 0, \\ 0 & x_1 \leq 0, \end{cases} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2);$$

2) теневая диафрагма в виде непрозрачного круга; функция пропускания

$$(5.1) \quad \chi_{\kappa}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \kappa > \frac{1}{a}, \\ 0 & \kappa \leq \frac{1}{a}. \end{cases}$$

Выбор радиуса круга в (5.1) диктуется распределением интенсивности света в теневой плоскости в случае отсутствия неоднородностей в исследуемом объеме; для светового пучка (2.10) это распределение имеет вид $A_1 \exp(-a^2 \kappa^2)$, где A_1 — некоторая константа.

Ограничимся анализом полученных результатов (3.8), (4.5) и (4.6) для случая «гауссовской» теневой диафрагмы с функцией пропускания

$$(5.2) \quad \chi_T(\kappa) = 1 - e^{-a^2 \kappa^2}.$$

Результаты для такой диафрагмы оказываются качественно близкими к результатам, рассчитанным для круглой диафрагмы (5.1), однако функция пропускания (5.2) существенно упрощает анализ.

Подстановка (5.2) в (3.8) дает

$$(5.3) \quad \langle E' \rangle = \frac{\pi k^2 L}{4} \{ \pi a^2 A^2 \} \int_0^\infty \Phi(\eta) \eta \left[1 - \exp\left(-\frac{a^2 \eta^2}{2}\right) \right] d\eta.$$

Величина в фигурных скобках в (5.3) равна энергии светового пучка, проинтегрированной по поперечному сечению интенсивности.

Энергетический спектр $\Phi(\eta)$ в инерционном интервале частот падает с ростом η ; для спектра Колмогорова ($\Phi(\eta) \sim \eta^{-11/3}$ [5]). Таким образом, в инерционном интервале частот подынтегральная функция в (5.3) имеет вид (с точностью до множителя) $\eta^{-8/3} \left[1 - \exp\left(-\frac{a^2 \eta^2}{2}\right) \right]$. Эта функция монотонно убывает (как $\eta^{-2/3}$ при $\eta \ll a^{-1}$ и $\eta^{-8/3}$ при $\eta \gg a^{-1}$). Следовательно, наибольший вклад в величину среднего значения сигнала вносят неоднородности с наименьшими пространственными частотами. Мелкомасштабные неоднородности мало влияют на среднее значение сигнала теневого прибора.

При подстановке (5.2) в (4.5), (4.6) получаем

$$(5.4) \quad D = \frac{\pi k^2}{2} \{ \pi^2 a^4 A^4 \} \int_0^\infty \Phi(\eta) \exp\left(-\frac{3a^2 \eta^2}{4}\right) \eta \left[\int_0^L \exp\left(-\frac{\eta^2 p^2}{4k^2 a^2}\right) \times \right. \\ \left. \times \sin^2\left(\frac{p\eta^2}{4k}\right) dp \right] d\eta.$$

Величина в фигурных скобках равна квадрату энергии светового пучка. Введем два условия:

$$(5.5) \quad \left(\frac{L\lambda}{l^2}\right)^2 \ll 1; \quad \left(\frac{L\lambda}{al}\right)^2 \ll 1.$$

Второе условие следует из первого при выполняющемся обычно соотношении $a \gg l$; первое — является ослабленной формой обычного условия малости дифракционных эффектов $\sqrt{\lambda L} \ll l$. Из (5.5) следуют соотношения:

$$(5.6) \quad \left(\frac{p\eta^2}{4k}\right)^2 \ll \left(\frac{L}{kl^2}\right)^2 = 0 \left[\left(\frac{L\lambda}{l^2}\right)^2 \right] \ll 1;$$

$$(5.7) \quad \left(\frac{p\eta^2}{ka}\right)^2 \ll \left(\frac{L}{lka}\right)^2 = 0 \left[\left(\frac{L\lambda}{al}\right)^2 \right] \ll 1.$$

Учитывая (5.6), (5.7), в разложении в ряд подынтегрального выражения в интеграле по p в (5.4) можно ограничиться первым членом

$$\exp\left(-\frac{\eta^2 p^2}{4k^2 a^2}\right) \sin^2\left(\frac{p\eta^2}{4k}\right) \simeq \frac{1}{16} \frac{p^2 \eta^4}{k^2}.$$

Теперь из (5.4) имеем

$$(5.8) \quad D = \frac{\pi L^3}{96} \{\pi^2 A^4 a^4\} \int_0^\infty \Phi(\eta) \exp\left(-\frac{3a^2\eta^2}{4}\right) \eta^5 d\eta.$$

Заметим, что весовая функция $\exp\left(-\frac{3a^2\eta^2}{4}\right) \eta^5$ в (5.8) имеет максимум при $\eta_* = \sqrt[5]{\frac{10}{3}} a^{-1} \simeq 1,8a^{-1}$, об «остроте» которого можно судить по «полуширине» Δ

$$\Delta \equiv \frac{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{3a^2\eta^2}{4}\right) \eta^5 d\eta}{\exp\left(-\frac{3a^2\eta_*^2}{4}\right) \eta_*^5} \simeq 1,4a^{-1}.$$

Убывание энергетического спектра $\Phi(\eta)$ в инерционном интервале ($\sim \eta^{-11/3}$ для колмогоровского спектра) несколько экранирует действие фактора η^5 в (5.8), ослабляющего влияние больших неоднородностей (низкочастотной части спектра). Таким образом, отметим следующее:

а) наибольший вклад в величину дисперсии сигнала теневого прибора рассматриваемого типа дают оптические неоднородности с пространственными частотами, близкими к $\eta_* \simeq 1,8a^{-1}$ (т. е. неоднородности с размерами, близкими к $i_* = \frac{2\pi}{\eta_*} \simeq 3,4a$), где a — радиус светового пучка, выходящего из осветителя;

б) мелкие неоднородности, пространственные частоты которых больше $\eta_* + \Delta \simeq 3,2a^{-1}$, не вносят вклада в величину дисперсии сигнала прибора;

в) неоднородности, пространственные частоты которых малы по сравнению с $\eta_* \simeq 1,8a^{-1}$, не оказывают практически влияния на величину дисперсии сигнала.

Поступила 15 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Стасенко В. Н. Применение теневого прибора для определения характеристик турбулентности. — ПМТФ, 1970, № 3.
2. Стефанов С. Р., Грозан А. М., Чашечкин Ю. Д. Об исследовании турбулентных пульсаций коэффициента преломления воды теплеровским прибором. — ПМТФ, 1971, № 5.
3. Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики. М., «Наука», 1971.
4. Ho T. L. Coherence degradation of gaussian beams in a turbulent atmosphere. — «J. Optic. Soc. Amer.», 1970, vol. 60, N 5.
5. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
6. Ho T. L., Beran M. J. Propagation of the fourth-order coherence function in a random medium. — «J. Optic. Soc. Amer.», 1968, vol. 58, N 10.