

**ВЯЗКОСТЬ СУСПЕНЗИИ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ
ФЕРРОМАГНИТНЫХ ЧАСТИЦ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

М. А. Марценюк

(Пермь)

Рассмотрено движение суспензии твердых намагниченных эллипсоидов вращения в однородном магнитном поле. Предполагается, что эллипсоиды намагничены вдоль осей симметрии. Релаксационные процессы в твердой фазе не рассматриваются.

Вычислен тензор напряжений суспензии с учетом вращательного броуновского движения частиц. Показано, что тензор вязкости содержит шесть независимых кинетических коэффициентов, четных по магнитному полю. Найдена зависимость этих коэффициентов от величины поля и отношения полуосей эллипсоида.

В качестве примера рассмотрено влияние магнитного поля на симметричное течение суспензии в сжимающемся цилиндре.

В последнее время проводится интенсивное экспериментальное и теоретическое исследование суспензий мелких ферромагнитных частиц (феррожидкость). Линейный размер частиц колеблется от 10^{-6} до 10^{-5} см, а магнитный момент μ может достигать $10^4 \div -10^5$ магнетонов Бора. Если внешнее магнитное поле \mathbf{H} мало по сравнению с внутренним полем анизотропии, то можно считать, что магнитный момент жестко связан с частицей (более подробно этот вопрос обсуждается в [1]). С другой стороны, из-за большой величины μ безразмерное поле $\xi = \mu H/kT$ может достигать значений порядка единицы уже при $H \sim 10^2$ э и комнатных температурах.

Объемная концентрация твердой фазы ϕ предполагается достаточно малой, чтобы можно было не учитывать взаимодействия частиц. Движение частиц в жидкости определяется тогда гидродинамическими силами, ориентирующим действием поля и тепловыми флуктуациями (броуновское движение частиц).

В отсутствие поля вязкость суспензии возрастает по сравнению с начальной вязкостью жидкости. Магнитное поле препятствует свободному вращению частиц в вихревом потоке, что приводит к дополнительной, вращательной, вязкости [2]. Если частицы имеют несферическую форму, то поле затрудняет их обтекание уже симметричным потоком. В этом случае, как показано ниже, связь между тензором напряжений суспензии и тензором градиентов скорости определяется шестью независимыми кинетическими коэффициентами, зависящими от формы частиц и величины магнитного поля.

Аналогичные эффекты во внешнем поле возникают также в полярных газах (эффект Зенфлелебена — Бинаккера [3]). Хотя природа этих явлений в суспензиях и газах различна, уравнения движения феррожидкости и парамагнитного газа частично совпадают, что приводит к одинаковому поведению этих систем в магнитном поле.

1. Регулярное движение намагниченного эллипсоида в потоке. Будем предполагать, что частицы суспензии представляют собой эллипсоиды вращения. Форму эллипсоидов с полуосями a и b (b — радиус кругового сечения) можно характеризовать безразмерным отношением s или параметром несферичности λ ,

$$(1.1) \quad s = a/b, \quad \lambda = (s^2 - 1)/(s^2 + 1)$$

Ориентацию эллипсоида будем описывать единичным вектором e , направленным вдоль его оси симметрии. Предполагая, что магнитный момент жестко связан с частицей, имеем $m = \mu e$. Среднее значение m определяет намагниченность суспензии невзаимодействующих эллипсоидов

$$(1.2) \quad M = \varphi \langle m \rangle / V_1, \quad V_1 = 4 \pi a b^2 / 3$$

На частицу в магнитном поле действует момент сил

$$(1.3) \quad m \times H = k T \xi e \times h$$

(здесь h — единичный вектор, направленный вдоль поля). В произвольном потоке несжимаемой жидкости $v(r)$ на эллипсоид вращения действует момент сил (см., например, [4, 5])

$$(1.4) \quad 2 \eta_0 V_1 S_1 [\Omega_i - \omega_i + \lambda e_{ikl} e_k e_m V_{lm}]$$

$$\Omega_{ik} = e_{ikl} \Omega_l = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad V_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad V_{ii} = 0$$

(ω — угловая скорость частицы). Множитель перед квадратной скобкой в (1.4) — это вращательная подвижность частиц. Учитывая соотношение Эйнштейна, найдем коэффициент вращательной диффузии D

$$(1.5) \quad D = k T / 4 \eta_0 V_1 S_1$$

Функция $S_1(s)$, определяющая зависимость D от отношения полуосей эллипсоида s , приведена в приложении.

2. Вращательная диффузия. Когда размеры частиц суспензии меньше чем 10^{-4} см, необходимо учитывать их вращательное броуновское движение. Введем вероятность $W(e, t) dv$ того, что направление оси частицы лежит в элементе телесного угла dv . Броуновское движение приводит к дополнительному случайному моменту сил, действующему на частицу [6]

$$(2.1) \quad -k T i N \ln W \quad (N = -ie \times \partial / \partial e)$$

Для вращательной диффузии оператор бесконечно малого поворота N играет ту же роль, что и оператор grad для поступательной диффузии. Отметим, что N — самосопряженный оператор.

Уравнение Фоккера — Планка, описывающее вращательное броуновское движение, можно записать в виде

$$(2.2) \quad \partial W / \partial t + (i N \omega) W = 0$$

Если пренебречь инерцией частиц, то угловая скорость их вращения ω определяется из равенства нулю суммы моментов сил магнитных (1.3), гидродинамических (1.4) и случайных (2.1). Это дает

$$(2.3) \quad \omega_i = D (e_{ikl} e_k \xi_l - i N_i \ln W) + \Omega_i + \lambda e_{ikl} e_k e_m V_{lm}$$

Уравнение (2.2) вместе с соотношением (2.3) играет роль кинетического уравнения для ферромагнитных частиц, взвешенных в жидкости. В покоящейся суспензии стационарным решением (2.2), (2.3) является

$$(2.4) \quad W_0 = C \exp(e \xi)$$

(постоянная C находится из условия нормировки).

Время релаксации функции распределения W к равновесной W_0 порядка $1/D$. Принимая вязкость жидкости $\eta_0 \sim 10^{-2}$ г/см·сек, $kT \sim 4 \cdot 10^{-14}$ эрг, $V_1 \sim 10^{-18}$ см³ и учитывая, что при $|\lg s| \sim 1$ $S_1 \sim 10$, получаем из (1.5) $1/D \sim 10^{-5}$ сек. Это время мало по сравнению с гидродинамическими временами $\rho l^2/\eta_0$ (l — гидродинамический масштаб длины), так что фактически приходится иметь дело со стационарным решением уравнения Фоккера — Планка. Кроме того, $1/D$ мало и по сравнению с градиентами скорости. Условие $\Omega/D \ll 1$ выполняется при всех разумных значениях Ω . По этой причине будем искать функцию распределения движущейся суспензии в виде

$$(2.5) \quad W = W_0 (1 + \chi)$$

где χ — малая поправка, линейная по градиентам скорости Ω_{ik} и V_{ik} . Для дальнейшего удобно ввести обозначения

$$(2.6) \quad \langle A \rangle \equiv \int A W dv, \quad \langle A \rangle_0 = \int A W_0 dv$$

Условие нормировки приводит к добавочному соотношению для функции χ : $\langle \chi \rangle_0 = 0$. Учитывая свойства пространственной симметрии χ , запишем

$$(2.7) \quad \chi = \chi_1 e_k h_i \Omega_{ik} + \chi_2 (e_i e_k - \langle e_i e_k \rangle_0) V_{ik}$$

где χ_1 и χ_2 , вообще говоря, являются неизвестными функциями $e\xi$ и ξ . Отметим, что для дальнейшего будут нужны не сами эти функции, а функционалы вида $\langle e_i \chi \rangle_0$.

Для вычисления χ_1 и χ_2 можно использовать приближенные методы, развитые в кинетической теории газов [7]. Здесь удобно применить вариационный метод Чепмена — Энскога. В стационарном случае уравнения (2.2), (2.3) можно переписать в виде

$$(2.8) \quad iN_i (\Omega_i + \lambda e_{ik} e_k e_m V_{lm}) W = DiN_i (iN_i - e_{ik} e_k \xi_i) W$$

Правая часть (2.8) играет роль «интеграла столкновений» и обращается в нуль при $W = W_0$. В соответствии с выбранным методом считаем χ_1 и χ_2 не зависящими от e_i . Подставляя (2.5) и (2.7) в уравнение (2.8), умножая последнее на e_i и интегрируя по углам с учетом эрмитовости оператора N и формул (п. 4), (п. 5), получаем два уравнения, определяющие χ_1 и χ_2 . В результате имеем

$$(2.9) \quad \chi_1 = L_1 \xi / D (\xi - L_1), \quad \chi_2 = \lambda / 2 D$$

функции $L_n(\xi)$ определены в приложении. Заметим, что найденное значение χ_2 является точным.

С помощью функции распределения (2.5) и соотношений (1.2), (2.7) и (2.9) вычислим объемную плотность момента сил $\mathbf{M} \times \mathbf{H}$, действующего на движущуюся суспензию со стороны магнитного поля

$$(2.10) \quad (\mathbf{M} \times \mathbf{H})_i = -4 [\eta_r (\Omega_i - h_i h_k \Omega_k) + \gamma e_{ik} h_k h_m V_{lm}]$$

$$\eta_r = \eta_0 \varphi S_1 \xi L_1^2 / (\xi - L_1), \quad \gamma = \eta_0 \varphi \lambda S_1 L_2$$

Смысл коэффициентов η_r и γ будет выяснен в следующем разделе.

3. Тензор напряжений. Тензор напряжений суспензии Σ_{ik} удобно разбить на два слагаемых, выделяя из него максвелловский тензор π_{ik}

$$(3.1) \quad \Sigma_{ik} = \sigma_{ik} + \pi_{ik}, \quad \pi_{ik} = (H_i B_k - H^2 \delta_{ik} / 2) / 4 \pi$$

Тензор σ_{ik} находится из решения вспомогательной гидродинамической задачи о возмущении потока жидкости движущимся эллипсоидом [4, 5]. После усреднения возмущенного тензора напряжений и тензора градиентов скорости по пространственным координатам и ориентациям эллипсоида можно записать

$$(3.2) \quad \sigma_{ik} = \sigma^\circ \delta_{ik} + e_{ikl} \sigma_l^a + \sigma_{ik}^s$$

где скаляр σ° , вектор σ_l^a и симметричный тензор σ_{ik}^s ($\sigma_{ii} = 0$) имеют вид

$$(3.3) \quad \sigma^\circ = -p + \eta_0 \varphi k_1 \langle e_l e_m \rangle V_{lm}$$

$$(3.4) \quad \sigma^a = -\frac{1}{2} M \times H$$

$$(3.5) \quad \sigma_{ik}^s = 2\eta_0 [(1 + \varphi k_0) V_{ik} + \varphi (k_2 \langle e_i e_m \delta_{kl} + e_k e_m \delta_{il} \rangle + \\ + k_3 \langle e_l e_m \rangle \delta_{ik} + k_4 \langle e_i e_k e_l e_m \rangle) V_{lm} + \varphi k_5 \langle e_m e_k \delta_{il} + e_i e_m \delta_{kl} \rangle \Omega_{lm}]$$

В этих выражениях под V_{ik} и Ω_{ik} понимаются величины (1.4), найденные с помощью усреднения, о котором говорилось выше. Коэффициенты k_n зависят от s . При выводе соотношений (3.3)–(3.5) было использовано уравнение (2.8).

Хотя σ_{ik} содержит несимметричную часть (3.4), полный тензор напряжений Σ_{ik} с учетом максвелловского тензора π_{ik} симметричен.

При вычислении средних, входящих в (3.3), (3.5), в линейном по Ω_{ik} и V_{ik} приближении достаточно ограничиться функцией W_0 . В (3.4) необходимо учесть возмущение функции распределения, вызванное движением жидкости (см. п. 2). Используя формулы (п. 4) — (п. 6) и соотношение (2.10), найдем

$$(3.6) \quad \sigma^\circ = -p + 3 \beta h_i h_k V_{ik}$$

$$(3.7) \quad \sigma_i^a = 2 \eta_r (\Omega_i - h_i h_k \Omega_k) + 2 \gamma e_{ikl} h_k h_m V_{lm}$$

$$(3.8) \quad \sigma_{ik}^s = 2(2\eta_2 - \eta_1) V_{ik} + 2[(\eta_2 - \eta_1) h_l h_m \delta_{ik} + (\eta_1 + \eta_3 - \\ - 2\eta_2)(h_i \delta_{mk} + h_k \delta_{im}) h_l + (\eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3) h_i h_k h_l h_m] V_{lm} + \\ + 2\gamma (h_i \delta_{mk} + h_k \delta_{im}) h_l \Omega_{lm}$$

Входящие сюда кинетические коэффициенты η_n ($n = 1, 2, 3$), β , γ и η_r зависят от ξ и s

$$(3.9) \quad \beta = \eta_0 \varphi S_3 L_2$$

а в коэффициентах η_n удобно выделить часть, не зависящую от поля

$$(3.10) \quad \eta_n = \eta_0 + \Delta \eta_0 + \Delta \eta_n \quad (n = 1, 2, 3)$$

где

$$(3.11) \quad \Delta \eta_0 = \eta_0 \varphi S_2, \quad \Delta \eta_1 = \eta_0 \varphi (S_3 L_2 + S_4 L_3 / \xi)$$

$$\Delta \eta_2 = \eta_0 \varphi S_5 L_4, \quad \Delta \eta_3 = \eta_0 \varphi (S_6 L_2 + S_7 L_3 / \xi)$$

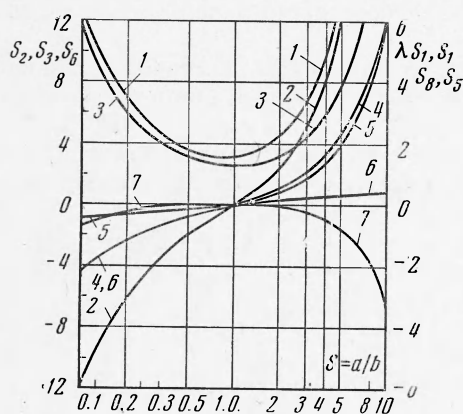
Функции $L_n(\xi)$ и $S_n(s)$ определены в приложении.

Для выяснения смысла введенных кинетических коэффициентов следует записать тензор напряжений (3.6)—(3.8) для случая поля \mathbf{H} , направленного по оси x . Тогда, сравнение с феноменологическими формулами в [8] показывает, что величина η_r — это вращательная вязкость суспензии, так как она связывает соответствующие компоненты σ_i^a и Ω_i . Отметим, что компонента Ω , параллельная \mathbf{H} , не дает вклада в тензор напряжений, так как в этом случае магнитное поле не затрудняет вращения частиц и не возникает добавочной диссипации энергии.

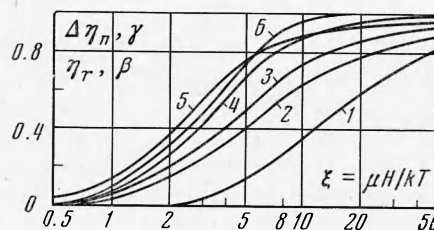
Величины η_n имеют смысл сдвиговых вязкостей (ср. [8]).

Коэффициент β перекрестный между сдвиговыми и объемными эффектами вязкого трения, а γ — между вращательными и сдвиговыми. Для перекрестных коэффициентов выполняется принцип симметрии Онзагера.

Все кинетические коэффициенты являются четными функциями магнитного поля. Отсутствие нечетных эффектов объясняется спецификой выбранной модели (параллельность \mathbf{e} и \mathbf{m}).



Фиг. 1



Фиг. 2

Если поле $\mathbf{H} = 0$, то тензор напряжений суспензии принимает вид

$$\Sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + 2(\eta_0 + \Delta\eta_0) V_{ik}$$

т. е. $\Delta\eta_0$ определяет увеличение вязкости суспензии по сравнению с начальной вязкостью жидкости. Для сферических частиц ($s = 1$) $S_2 = 5/2$ и формула (3.11) дает известный результат Эйнштейна.

Используя разложение в ряд функций $L_n(\xi)$ (п. 3) и выражения (2.10), (3.9) и (3.11), можно видеть, что при малых полях ($\xi \ll 1$) $\Delta\eta_2 \sim \xi^2$, а остальные коэффициенты растут квадратично по полю. Поскольку $L_n \rightarrow 1$ при $\xi \gg 1$, найдем, что в сильных полях все коэффициенты перестают зависеть от поля. При этом β , γ , η_r и $\Delta\eta_2$ насыщаются по одному и тому же закону для всех значений s . На фиг. 2 кривые показывают зависимость отношения кинетических коэффициентов к их значениям при $\xi \rightarrow \infty$ от величины безразмерного магнитного поля ξ : 1 — $\Delta\eta_2/\Delta\eta_2(\infty) = L_4$, 2 — $\Delta\eta_1/\Delta\eta_1(\infty)$ при $s=0.1$ и $\Delta\eta_3/\Delta\eta_3(\infty)$ при $s=10$, 3 — $\gamma/\gamma(\infty) = \beta/\beta(\infty) = L_2$, 4 — $\Delta\eta_1/\Delta\eta_1(\infty)$ при $s = 10$, 5 — $\eta_r/\eta_r(\infty)$, 6 — $\Delta\eta_3/\Delta\eta_3(\infty)$ при $s = 0.1$. При больших (малых) s $\Delta\eta_1$ ($\Delta\eta_3$) насыщается несколько раньше, чем при малых (больших).

На фиг. 1 кривые показывают зависимость кинетических коэффициентов от отношения полуосей эллипсоида s при насыщении ($\xi \rightarrow \infty$): 1 — $\eta_r(\infty)/\eta_0\varphi = S_1$, 2 — $\gamma(\infty)/\eta_0\varphi = \lambda S_1$, 3 — $\Delta\eta_0/\eta_0\varphi = S_2$, 4 — $\Delta\eta_1(\infty)/\eta_0\varphi = S_2$, 5 — $\Delta\eta_3(\infty)/\eta_0\varphi = S_6$, 6 — $\beta(\infty)/\eta_0\varphi = S_3$, 7 — $\Delta\eta_2(\infty)/\eta_0\varphi = S_5$. Отметим, что при переходе от сплюснутых частиц ($s < 1$) к вытя-

нутым ($s > 1$) $\Delta\eta_1$, $\Delta\eta_3$, γ , β меняют знак, $\Delta\eta_2$ всегда отрицательно, а η_r положительно. Для сферических частиц отлична от нуля только вращательная вязкость. С помощью формул (п. 9) — (п. 11) можно выяснить зависимость кинетических коэффициентов от s в различных предельных случаях.

4. **Обсуждение.** Поскольку в однородном магнитном поле $(\partial\pi_{ik}/\partial x_k) = 0$, то в уравнения движения жидкости

$$(4.1) \quad \rho \partial v_i / \partial t = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k$$

дает вклад только часть тензора напряжений σ_{ik} . Подставляя (3.2), (3.6) — (3.8) в (4.1) и учитывая другие уравнения гидродинамики, имеющие обычный вид, получим полную систему гидродинамических уравнений ферросуспензии в магнитном поле (с обычными граничными условиями для скорости и поля).

Чтобы установить возможность экспериментального измерения кинетических коэффициентов, следует рассмотреть конкретные примеры течения феррожидкости.

В работе [2] было рассмотрено движение суспензии сферических частиц в круглом капилляре и выяснена роль коэффициента вращательной вязкости.

Далее, заметим, что уравнение (4.1) с тензором напряжений (3.6) — (3.8) имеет тот же вид, что и в случае парамагнитного газа (если положить $\eta_r = \gamma = 0$). Для газа [8] рассмотрено плоское течение Пуазейля в магнитном поле и показано, что по измерениям расхода и поперечного градиента давления в прямоугольном капилляре при различных ориентациях поля можно найти все коэффициенты вязкости. Очевидно, эти результаты могут быть перенесены и на случай ферросуспензии с учетом небольших изменений, связанных с наличием в σ_{ik} членов, пропорциональных η_r и γ . (Как можно показать, используя теорию возмущений, развитую в [10], в газе коэффициент типа γ был бы пропорционален $\lambda^2 \xi^2$. Поскольку для газовых молекул $\lambda \sim 1/5$, а μ порядка магнетона Бора, при всех разумных температурах для газов γ пренебрежимо мало.)

Для выяснения роли коэффициента γ , вычислим момент сил \mathbf{K} , действующий на феррожидкость при одноосном симметричном течении вида

$$(4.2) \quad \mathbf{v} = \alpha (r/3 - kz)$$

(единичный вектор \mathbf{k} направлен вдоль оси z). Такое течение возникает, например, если жидкость находится внутри цилиндра, на основании которого действуют постоянные силы, приводящие к сжатию цилиндра при постоянном объеме.

Для вычисления \mathbf{K} проинтегрируем (2.10) по объему цилиндра V . При этом в первом приближении по φ достаточно ограничиться невозмущенным движением (4.2). Выбирая ось x в плоскости \mathbf{kh} и обозначая через θ угол между осью цилиндра \mathbf{k} и направлением поля, найдем

$$(4.3) \quad \mathbf{K} = 4\alpha\gamma V (\mathbf{hk}) \mathbf{h} \times \mathbf{k}, \quad K_x = K_z = 0, \quad K_y = 2\alpha\gamma V \sin 2\theta$$

Как видно из (4.3), момент сил, действующий на цилиндр, возникает, если одновременно $h_x \neq 0$, $h_z \neq 0$, и достигает максимального значения при $h_x = h_z$ ($\theta = 45^\circ$). Интересно отметить, что момент сил сильно зависит от формы частиц и меняет знак при переходе от сплюснутых к вытянутым частицам.

В заключение автор благодарит М. И. Шлиомиса и Ю. Л. Райхера за обсуждения.

Приложение. Моменты функции распределения W_0 из (2.4) выражаются через функции

$$(п. 1) \quad L_n(\xi) = I_{n+1/2} / I_{1/2}$$

где $I_{n+1/2}(\xi)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. Из (п. 1) следует, что $L_0 = 1$, а L_1 совпадает с функцией Ланжевена

$$(п. 2) \quad L_1 = L = \text{cth } \xi - 1 / \xi$$

Функции L_n с $n > 1$ могут быть найдены из рекуррентных соотношений для функций Бесселя: $L_{n-1} - L_{n+1} = (2n + 1) L_n / \xi$.

Если $\xi \rightarrow \infty$, то $L_n = 1 + O(1/\xi)$, при $\xi \rightarrow 0$

$$(п. 3) \quad L_n = \frac{\xi^n}{(2n+1)!!} \left(1 - \frac{n}{3(2n+3)} \xi^2 + O(\xi^4) \right)$$

Приведем теперь моменты функции W_0

$$(п. 4) \quad \langle e_i \rangle_0 = L_1 h_i, \quad \langle e_i e_k \rangle_0 = (L_1 / \xi) \delta_{ik} + L_2 h_i h_k$$

$$(п. 5) \quad \langle e_i e_k e_l \rangle_0 = (L_2 / \xi) (h_i \delta_{kl} + h_k \delta_{il} + h_l \delta_{ik}) + L_3 h_i h_k h_l$$

$$(п. 6) \quad \langle e_i e_k e_l e_m \rangle_0 = (L_2 / \xi^2) (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{im} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{km}) + (L_3 / \xi) (h_i h_k \delta_{lm} + h_i h_m \delta_{kl} + \dots) + L_4 h_i h_k h_l h_m$$

Функции $S_n(s)$, определяющие зависимость кинетических коэффициентов от отношения полуосей эллипсоида, можно представить в виде линейных комбинаций функций f_m

$$(п. 7) \quad S_n = \sum_{m=1}^5 a_{nm} f_m \quad (n = 1, 2, \dots, 8)$$

$$(п. 8) \quad f_1 = 10s f_4 (2s - J) / 9 (s^2 - 1), \quad f_2 = 4 (s^2 - 1)^2 / 9s (4s^3 - 10s + 3J)$$

$$f_3 = 4\lambda (s^2 - 1) / 3 (2s^2 + 4 - 3sJ), \quad f_4 = 2 (s^2 - 1)^2 / 9s (2s^2 J + J - 6s)$$

$$f_5 = 4\lambda (s^2 - 1)^2 / s [(2s^2 - 1)J - 2s], \quad J = \int_0^\infty dx / (1+x)(s+x)^{1/2}$$

а коэффициенты a_{nm} запишем в виде матрицы

$$a_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -6 & -36 & 3 & -12 & 24 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & 24 & -2 & 3 & -16 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -36 & 3 & -2 & 24 & -10 \\ 1/2 \lambda^2 & 2 & -2 & 12 & -2 & 3 & -16 & 0 \end{pmatrix}$$

Эти формулы сильно упрощаются в предельных случаях сильно сплюснутых, вытянутых и близких к сферическим частиц. При $s \ll 1$

$$(п. 9) \quad S_n = 2a_n / 9\pi s$$

где численные коэффициенты a_n ($n = 1, 2, \dots, 8$) можно записать в виде строки $a_n = (9 \ 16 \ -6 \ 24 \ -1 \ -1 \ -8 \ -10/3)$.

Если $s \gg 1$, то $S_8 = 2/3$, а для других функций S_n найдем

$$(п. 10) \quad S_n = b_n s^2 / 9 \ln s \quad (n \neq 8; b_n = 4.5 \ 60 \ 5 \ 18 \ -1.5 \ 7.5 \ -12)$$

Для частиц, близких к сферическим ($\lambda \rightarrow 0$), $S_n = 0$ (λ^2) при $n = 4, 5, 7$; при других n имеем

$$(п.11) \quad S_1 = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} \lambda, \quad S_2 = \frac{5}{2} + 0(\lambda^2),$$

$$S_3 = \frac{25}{21} \lambda, \quad S_6 = \frac{25}{42} \lambda, \quad S_8 = \frac{20}{63} \lambda$$

Поступила 16 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Марценюк М. А., Райхер Ю. Л., Шлюмис М. И. К кинетике намагничивания суспензий ферромагнитных частиц. ЖЭТФ, 1973, т. 65, вып. 2.
2. Шлюмис М. И. Эффективная вязкость магнитных суспензий. ЖЭТФ, 1971, т. 61, вып. 12.
3. Beenakker J. J. M., McCourt F. R. Magnetic and electric effects on transport properties. Ann. Rev. Phys. Chem., vol. 21, Palo Alto, California, Ann. Rev. Inc., 1970.
4. Покровский В. Н. Напряжения, вязкость и оптическая анизотропия движущейся суспензии жестких эллипсоидов. Усп. физ. н., 1971, т. 105, вып. 4.
5. Brenner H. Suspension rheology in the presence of rotary brownian motion and external couples; elongational flow of dilute suspensions. Chem. Engng. Sci., 1972, vol. 27, No. 5.
6. Favro L. D. Theory of the rotational brownian motion of a free rigid body. Phys. Rev., 1960, vol. 119, No. 1.
7. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
8. Гроот С. Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
9. Hulsman H., Klaar H. F. R. Experimental arrangements for measuring the five independent shear-viscosity coefficients in a polyatomic gas in a magnetic field. Physica, 1970, vol. 50, No. 4.
10. Каган Ю., Максимов Л. А. Кинетическая теория газов с вращательными степенями свободы, ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 6.