

**К ПОСТРОЕНИЮ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ В ОДНОМЕРНОМ
ПРИБЛИЖЕНИИ ДВУХФАЗНОЕ ТЕЧЕНИЕ С КОАГУЛЯЦИЕЙ
ЧАСТИЦ ПОЛИДИСПЕРСНОГО КОНДЕНСАТА****А. Н. Крайко, А. А. Шрайбер***(Москва, Киев)*

Рассмотрены вопросы, связанные с построением модели, описывающей течение смеси газа и полидисперсного конденсата с учетом коагуляции частиц. Используется одномерное приближение, причем эффекты вязкости и теплопроводности газа учитываются лишь при описании взаимодействия газа и частиц. Данное приближение отвечает, в частности, случаю течения в соплах Лавала, где различие чисел Рейнольдса, определенных по характерному размеру сопла (например, радиусу его минимального сечения) и по диаметру частиц, как правило, оправдывает подобный подход вне сравнительно тонкого пограничного слоя на стенке сопла. Основное внимание уделяется вопросу о перераспределении импульса и энергии частиц, образующихся в процессе коагуляции. Кроме того, уточняется ряд моментов методического характера, не нашедших, по мнению авторов, достаточно полного освещения в имеющихся работах по коагуляции [1-3].

В работах по коагуляции, опубликованных к настоящему времени, вопрос о перераспределении импульса и энергии частиц либо вообще не рассматривается (см. [1,3,6], в которых получены уравнения, определяющие лишь эволюцию фракционного состава конденсата), либо постулируется, что импульс [2,5] или импульс и энергия [4,7-9] частицы, образовавшейся при коагуляции, равномерно распределяются между всеми частицами данного размера. Подобное допущение либо должно рассматриваться как следствие процедуры осреднения (по скоростям и энергиям частиц одного размера), которая сама не является строгой, либо, как отмечается в [10], предполагает существование какого-то механизма обмена импульсом и энергией между частицами одного размера, который мог бы иметь место лишь при достаточно частых, но не приводящих к слиянию столкновениях указанных частиц, что вряд ли можно считать реальным. Поэтому радикальное решение предполагает введение наряду с функцией распределения по размерам частиц функций распределения по скорости и по температуре для каждой фракции, как при отсутствии коагуляции сделано, например, в [11]. Не выписывая получающихся при этом уравнений, отметим, что результирующая система по сложности становится соизмеримой (или даже превосходит) систему уравнений кинетической теории газов. Данное обстоятельство делает проблематичным практическое использование моделей коагуляции с многомерными функциями распределения по крайней мере в ближайшем будущем.

В связи со сказанным представляется целесообразным наряду с известными моделями (например, принятой в [4]) рассмотреть модель, в основе которой лежит предположение о том, что избыток (или недостаток) импульса и энергии, появляющийся у частиц, образующихся в результате коагуляции (или некоторая его часть), не распределяется равномерно между частицами данной фракции, а передается газу. Справедливость предположения о полной передаче избытка импульса и энергии газу для частиц достаточно малых размеров подтверждается следующими соображениями.

Пусть времена динамической и тепловой релаксации частиц τ_f и τ_q , которые при стоксовском режиме обтекания частицы пропорциональны квадрату ее диаметра, малы по сравнению с характерным временем течения (последнее в стационарном случае определяется как отношение характерного линейного размера к характерной скорости). Тогда при отсутствии столкновений между частицами их параметры, как показано, например, в [12], почти всюду оказываются весьма близкими к соответствующим параметрам газа, отличаясь от последних на величины порядка τ_f и τ_q . При этом коэффициенты соответствующих разложений по τ_f и τ_q пропорциональны первым производным от скорости и температуры газа по пространственной координате. Таким образом, с точностью до τ_f и τ_q включительно параметры частиц одного размера почти всюду не зависят от предыстории движения индивидуальной частицы и определяются параметрами газа и их первыми производными в рассматриваемой точке. Если же по какой-либо причине (например, из-за внешнего воздействия, столкновения с другими части-

цами и т. п.) параметры частицы оказались существенно отличными от своих «квазиравновесных» значений, то по определению τ_f и τ_q процесс выравнивания скорости и температуры такой частицы происходит на длинах порядка $l_f = w_s \tau_f$ и $l_q = w_s \tau_q$ соответственно (здесь w_s — скорость частицы). Заметим, кстати, что во многих интересных для практики случаях τ_f и τ_q , а следовательно, l_f и l_q близки по порядку величины!

Пусть в дополнение к сказанному τ_f и τ_q малы также по сравнению со временем «свободного пробега» частиц данной фракции. Тогда скорость и температура частицы, образовавшейся при слиянии более мелких частиц, будет отличаться от соответствующих параметров частиц той же фракции, образовавшихся существенно ранее, лишь на длинах l_f и l_q , малых по сравнению с характерной длиной течения и с длиной между столкновениями частиц l . На указанных длинах избыток (недостаток) скорости и энергии частиц передается (восполняется) за счет взаимодействия с газом, что и ведет к выравниванию параметров частиц внутри каждой фракции. При этом газ испытывает дополнительное силовое и энергетическое воздействие со стороны частиц. Отметим, что при отсутствии коагуляции описанный выше механизм в задачах течения полидисперсного конденсата со столкновениями частиц был рассмотрен в [13]. Естественно, что с ростом размеров частиц, т. е. с ростом длин l_f и l_q по сравнению с длиной свободного пробега l и с характерным размером задачи, различие описанного выше и действительного механизмов перераспределения энергии и импульса частиц возрастает. Тем не менее использование такого механизма представляется оправданным и в этом случае, особенно, если учесть, что применяемая в настоящее время гипотеза о перераспределении энергии и импульса между частицами каждой фракции вряд ли может быть строго обоснована даже в каких-либо предельных случаях, имеющих отношение к течениям в соплах Лавала с коагуляцией. В подобных случаях, однако, целесообразно использовать сразу несколько упрощенных моделей (в том числе и модель, основанную на «перераспределительной» гипотезе), так как сравнение соответствующих результатов может давать некоторое представление о порядке ошибок, связанных с отказом от введения функций распределения по скоростям и по температурам для частиц каждой фракции.

1. Рассмотрим течение смеси газа и полидисперсного конденсата в сопле Лавала, площадь поперечного сечения которого обозначим через F . Ось x направим по оси сопла в направлении течения. Фракционный состав конденсата, т. е. распределение частиц по размеру (радиусу r) или массе m определяется счетной функцией распределения $n(m)$. Последняя вводится так, что число частиц в единице объема с массами из интервала $m, m + dm$ равно $n(m) dm$. Наряду с $n(m)$ будем использовать расходную функцию распределения $g(m)$, которая связана с $n(m)$ формулой

$$(1.1) \quad g(m) = mn(m)w(m) / W\rho w$$

и при умножении на dm дает массовый расход той же фракции, проходящий через единицу площади поперечного сечения сопла (отнесенный к общему расходу конденсата $W\rho w$). В (1.1) ρ и w — плотность и скорость газа, W — заданная константа, равная отношению массовых расходов конденсированной и газовой фаз, $w(m)$ — скорость частиц рассматриваемой фракции. Аргумент в круглых скобках в дальнейшем будет означать, что соответствующий параметр характеризует частицы данной фракции. Так упоминавшиеся ранее длины релаксации и свободного пробега будут обозначаться через $l_f(m)$, $l_q(m)$ и $l(m)$, радиус частиц — через $r(m)$, а через $T(m)$, $e(m)$ и $E(m) = e(m) + w^2(m)/2$ — температура и удельные внутренняя и полная энергии частиц.

Уравнения, описывающие изменение в зависимости от x параметров частиц каждой фракции (в том числе функции распределения) и параметров газа, получаются применением законов сохранения массы, количества движения и энергии к частицам или к газу в объеме, ограниченном двумя сечениями сопла (x и $x + \Delta x$, где Δx мало по сравнению с характерным размером задачи). При этом течение считается стационарным, а эффекты, связанные с фазовыми переходами и выпадением частиц на стенку, предполагаются отсутствующими. В этом случае условие сохранения массы частиц

фракции m , $m + dm$ запишется в виде

$$(1.2) \quad \Delta [Fm n(m) w(m) dm] = R(m) m F \Delta x dm, \\ R(m) = R^+(m) - R^-(m), \quad \Delta \varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$$

Здесь $R^+(m) dm$ и $R^-(m) dm$ — счетные скорости образования и исчезновения частиц рассматриваемой фракции в единице объема. Правая часть (1.2) в согласии с определением $R^+(m)$ и $R^-(m)$ дает изменение за единицу времени массы частиц фракции m , $m + dm$ в объеме $F \Delta x$, заключенном между сечениями x и $x + \Delta x$, а левая часть — разность соответствующих массовых потоков, протекающих (также в единицу времени) через указанные сечения.

Выражения для $R^\pm(m)$ были получены ранее, например в [4], однако представляется целесообразным рассмотреть этот вопрос еще раз. Начнем с $R^-(m)$, т. е. со скорости исчезновения частиц фракции m , $m + dm$. Убыль частиц этой фракции происходит за счет столкновений и последующей коагуляции с частицами всех других фракций. Количество столкновений частицы данной фракции с частицами фракции μ , $\mu + d\mu$ за время Δt равно $k(m, \mu) n(\mu) d\mu \Delta t$, где $k(m, \mu)$ — функция, носящая название «константы коагуляции». Для сферических частиц при пренебрежении эффектами искривления их траекторий принимается [4]

$$(1.3) \quad k(m, \mu) = \pi [r(m) + r(\mu)]^2 |w(m) - w(\mu)|$$

В соответствии со сказанным одна частица фракции m , $m + dm$ за время Δt испытает число столкновений с частицами всех прочих фракций, равное

$$\Delta t \int_0^\infty k(m, \mu) n(\mu) d\mu$$

В приведенном выражении и далее нуль и бесконечность в пределах интегрирования означают в действительности массы самых мелких и наиболее крупных частиц конденсата. Отсюда для времени и длины свободного пробега $\tau(m)$ и $l(m)$ получим выражения

$$(1.4) \quad \tau(m) = \left[\int_0^\infty k(m, \mu) n(\mu) d\mu \right]^{-1}, \quad l(m) = \tau(m) w(m)$$

Отрезок Δx частицы рассматриваемой фракции проходят за время $\Delta t = \Delta x / w(m)$. Так как в единицу времени сечение x пересекает $F w(m) n(m) dm$ таких частиц, то в объеме $F \Delta x$ в единицу времени коагулирует

$$F n(m) \Delta x dm \int_0^\infty k(m, \mu) n(\mu) d\mu$$

частиц данной фракции. Сравнивая полученное выражение с (1.2), найдем

$$(1.5) \quad R^-(m) = n(m) \int_0^\infty k(m, \mu) n(\mu) d\mu$$

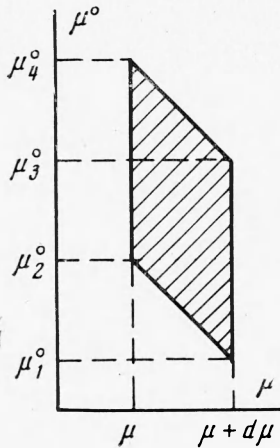
Если коагуляция происходит при каждом столкновении частиц, а это будет предполагаться в дальнейшем, то для справедливости (1.2) необходимо выполнение неравенства $\Delta x < l(m)$, поскольку в противном случае в правую часть (1.2) включались бы не только первые, но и последующие столкновения уже исчезнувших в результате

коагуляции частиц. Так как на самом деле используется не (1.2), а дифференциальное уравнение

$$(1.6) \quad d [Fn(m) w(m)] / dx = FR(m)$$

получающееся из (1.2) при $\Delta x \rightarrow 0$, то отмеченное ограничение оказывается несущественным. В действительности при предельном переходе Δx , как обычно, берется «физически» бесконечно малым. В данном случае в согласии со сказанным это означает, что Δx мало по сравнению с $l(m)$ и с характерным размером задачи, но много больше расстояния между частицами.

При получении формулы для $R^+(m)$ необходимо рассмотреть столкновения, ведущие к образованию частиц фракции $m, m+dm$ из частиц более мелких фракций. Пусть μ — масса меньшей, а μ° — большей (или равной) из сталкивающихся частиц (в соответствии с этим, с точностью до малых более высокого порядка $\mu \leq m/2$).



Чтобы столкновения частиц фракции $\mu, \mu + d\mu$ вели к образованию частиц фракции $m, m + dm$, массы сталкивающихся частиц в плоскости $\mu\mu^\circ$ должны отвечать параллелограмму площади $dm d\mu$, заштрихованному на фигуре, где $\mu_2^\circ = m - \mu, \mu_1^\circ = \mu_2^\circ - d\mu, \mu_3^\circ = \mu_1^\circ + dm$ и $\mu_4^\circ = \mu_2^\circ + dm$. Найдя число столкновений, отвечающих частицам масс μ и μ° из указанного параллелограмма, а затем интегрируя по μ от 0 до $m/2$, придем после сравнения получившегося в итоге выражения с правой частью (1.2) к формуле

$$(1.7) \quad R^+(m) = \int_0^{m/2} k(\mu, m - \mu) n(\mu) n(m - \mu) d\mu$$

Отметим, что данная формула совпадает с приведенной в [4], а способ ее получения близок к использованному в [5]. Кроме того, при выводе (1.7) учитывались лишь парные столкновения, т. е. одновременные столкновения трех и более частиц считались несущественными. При этом подсчет количества столкновений осуществлялся суммированием числа столкновений, испытываемых менее крупными частицами (т. е. частицами фракции $\mu, \mu + d\mu$). Естественно, что та же величина $R^+(m)$ получится при суммировании столкновений более крупных из сталкивающихся частиц. Это приводит к формуле

$$R^+(m) = \int_{m/2}^m k(\mu^\circ, m - \mu^\circ) n(\mu^\circ) n(m - \mu^\circ) d\mu^\circ$$

Отсюда и из (1.7) нетрудно получить выражение

$$(1.8) \quad R^+(m) = 1/2 \int_0^m k(\mu, m - \mu) n(\mu) n(m - \mu) d\mu$$

эквивалентное (1.7). Заметим, кстати, что константа коагуляции в силу своего определения симметрична, т. е. $k(\mu, m - \mu) = k(m - \mu, \mu)$.

С учетом уравнения неразрывности для газовой фазы

$$(1.9) \quad F\rho w = \text{const}$$

и определения расходной функции распределения $g(m)$ уравнение (1.6) можно переписать в форме

$$(1.10) \quad dg(m) / dx = mR(m) / W\rho w \quad (R(m) = R^+(m) - R^-(m))$$

При этом счетные функции распределения $n(m)$, $n(\mu)$, ... в (1.5) и (1.7) или (1.8) также могут быть заменены на $g(m)$, $g(\mu)$, ... в согласии с (1.4).

2. Полная система уравнений течения наряду с уравнением неразрывности для газа (1.9) и уравнением (1.10), описывающим эволюцию фракционного состава конденсата (по расходной функции распределения), включает в себя уравнения количества движения и энергии компонент смеси. Последние, как уже указывалось, получаются путем применения соответствующих законов сохранения к частицам каждой фракции и к газу в объеме $F\Delta x$. При этом, как обычно, принимается, что между газом и частицами имеют место динамическое и тепловое взаимодействия, обусловленные вязкостью и теплопроводностью газовой фазы. Пусть $f(m)$ и $q(m)$ — сила, с которой газ действует на частицы, и тепловой поток от газа к частицам, приходящиеся на единицу массы частиц соответствующей фракции, причем, как и прежде, величина в скобках понимается не как аргумент, а как указание на размер (массу) частиц. Пренебрежем непосредственным тепловым и силовым взаимодействиями между потоком и стенкой сопла, а также между частицами различных фракций и ограничимся случаем отсутствия внешних сил и источников энергии. Кроме того, обозначим через $m[w(m, \mu) - w(m)]$ и $m[E(m, \mu) - E(m)]$ ту часть импульса и полной энергии частицы, образовавшейся в результате коагуляции более мелких частиц (массы μ и $m - \mu$), которая затем (на расстояниях, меньших чем Δx) равномерно распределяется между всеми частицами фракции m , $m + dm$.

Используя сделанные предположения и обозначения и проводя некоторые преобразования с использованием полученных выше уравнений, можно показать, что условия сохранения импульса и энергии частиц фракции m , $m + dm$ приводят к соотношениям

$$(2.1) \quad \begin{aligned} w(m) \, dw(m) / dx &= f(m) + Q_w(m) / n(m) \\ w(m) \, de(m) / dx &= q(m) + Q_e(m) / n(m) \\ Q_w(m) &= \int_0^{m/2} [w(m, \mu) - w(m)] k(\mu, m - \mu) n(\mu) n(m - \mu) d\mu \\ Q_e(m) &= \int_0^{m/2} [E(m, \mu) - E(m)] k(\mu, m - \mu) n(\mu) n(m - \mu) d\mu - Q_w(m) w(m) \end{aligned}$$

причем верхние пределы в интегралах можно заменить на m , одновременно вводя множитель 0.5 перед интегралами, как при переходе от (1.7) к (1.8).

Принятое в [4] предположение о равномерном распределении импульса и энергии частиц, образующихся в результате коагуляции, между всеми частицами рассматриваемой фракции эквивалентно равенствам

$$(2.2) \quad w(m, \mu) = w^\circ(m, \mu), \quad E(m, \mu) = E^\circ(m, \mu)$$

где $w^\circ(m, \mu)$ и $E^\circ(m, \mu)$ — скорость и полная энергия частицы, возникшей в результате слияния частиц с массами μ и $m - \mu$.

Если, как и ранее, предположить, что сталкивающиеся частицы движутся параллельно оси сопла, то законы сохранения массы, импульса и энергии, примененные к задаче о слиянии двух частиц, дают

$$(2.3) \quad \begin{aligned} w^\circ(m, \mu) &= \mu^\circ w(\mu) + (1 - \mu^\circ) w(m - \mu) \\ E^\circ(m, \mu) &= \mu^\circ E(\mu) + (1 - \mu^\circ) E(m - \mu) \quad (\mu^\circ = \mu / m) \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, предположение о полном выравнивании параметров частиц рассматриваемой фракции, лежащее в основе равенств

(2.2), не является единственно возможным. Если указанные равенства не выполняются, то это значит, что избыток (или недостаток) скорости и полной энергии вновь образовавшейся частицы по сравнению с соответствующими величинами, описывающими движение прочих частиц данной функции, т. е. с $w(m)$ и $E(m)$, передается газу или частицам других фракций. Можно показать, что в случае, когда непосредственное силовое и тепловое взаимодействие частиц разных фракций несущественно, т. е. нарушение равенств (2.2) вызвано «сильным» взаимодействием вновь образовавшихся частиц с газом, уравнения движения и энергии газа в первом приближении записываются в форме

$$(2.4) \quad \rho w \frac{dw}{dx} + \frac{dp}{dx} + \int_0^{\infty} m [n(m)f(m) + Q_w^{\circ}(m)] dm = 0$$

$$w \frac{dh}{dx} - \frac{w}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} m \{n(m)q(m) + n(m)[w(m) - w]f(m) + Q_e^{\circ}(m)\} dm = 0$$

Здесь $Q_w^{\circ}(m)$ получается из $Q_w(w)$ заменой $w(m)$ на $w^{\circ}(m, \mu)$, а $Q_e^{\circ}(m)$ — из $Q_e(m)$ заменой $E(m)$ на $E^{\circ}(m, \mu)$, $Q_w(m)$ на $Q_w^{\circ}(m)$ и $w(m)$ на w .

Отличие характера взаимодействия с газом вновь образовавшихся и прочих частиц данной фракции обусловлено различием их скоростей и температур, из-за которого сила $f(m)$ и тепловой поток $q(m)$ для частиц первой группы оказываются существенно большими, чем для второй.

Заметим, что любое из дифференциальных соотношений (2.4) можно заменить на уравнение

$$\rho w \frac{d}{dx} \left(h + \frac{w^2}{2} \right) + \int_0^{\infty} m \{n(m)[q(m) + w(m)f(m)] + Q_h^{\circ}(m)\} dm = 0$$

$$(Q_h^{\circ}(m) = Q_e^{\circ}(m) + Q_w^{\circ}(m)w)$$

из которого в случае течения чистого газа получается интеграл Бернулли. Кроме того, используя (1.10), (2.1), (2.3), (2.4) и свойство симметрии функции $k(m, \mu)$, можно показать, что для любых $w(m, \mu)$ и $E(m, \mu)$ имеют место следующие «интегральные» законы сохранения:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} g(m) dm = 0, \quad \rho w \frac{d}{dx} \left[w + W \int_0^{\infty} g(m) w(m) dm \right] + \frac{dF}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left[h + \frac{w^2}{2} + W \int_0^{\infty} g(m) E(m) dm \right] = 0$$

Выполнение этих законов свидетельствует о непротиворечивости рассматриваемой модели, а их проверка в процессе расчетов может использоваться для контроля точности вычислений.

К уравнениям, полученным выше, необходимо добавить выражения ρ , h , $e(m)$, $f(m)$ и $q(m)$ через прочие параметры потока. Будем считать, что указанные выражения имеют вид

$$(2.5) \quad \rho = \rho(p, T), \quad h = h(p, T), \quad e(m) = e_s[T(m)]$$

$$f(m) = \varphi^1 \cdot [w - w(m)], \quad q(m) = \varphi^2 \cdot [T - T(m)]$$

$$\varphi^i = \varphi^i[m, p, T, T(m), w - w(m)], \quad i = 1, 2$$

Подобная запись предполагает, в частности, отсутствие неравновесных физико-химических процессов в газовой фазе. Правые части в (2.5) есть известные функции своих аргументов.

Вместе с равенствами (2.2), определяющими $w(m, \mu)$ и $E(m, \mu)$ в согласии с принятой в [4] гипотезой о равномерном распределении импульса и энергии вновь образующихся частиц, уравнения сохранения (1.9), (1.10), (2.1) и (2.4) и конечные связи (1.1), (1.3), (1.5), (1.7) или (1.8), (2.3) и (2.5) образуют замкнутую систему, которая при известной форме сопла и ряде дополнительных условий (например, при заданном относительном расходе частиц W) полностью описывает изменение параметров потока в зависимости от x . При этом $Q_w^\circ(m) \equiv Q_e^\circ(m) \equiv 0$ и уравнения движения и энергии газа (2.4) переходят в полученные в [4].

В другом крайнем случае, приняв, что избыток импульса и энергии вновь образующихся частиц полностью передается газу, вместо (2.2) получим равенства

$$(2.6) \quad w(m, \mu) = w(m), \quad E(m, \mu) = E(m)$$

в силу которых исчезают последние слагаемые в уравнениях движения и энергии конденсата.

3. В действительности равенства (2.6) никогда не выполняются строго. Однако если условия в потоке таковы, что $l_f(m)$ и $l_q(m)$ много меньше не только характерного размера задачи L , но и длины свободного пробега $l(m)$, то отличие реальной ситуации от описываемой этими равенствами будет небольшим. Заметим, кстати, что если сказанное имеет место, то при выводе уравнений течения можно выбрать такое Δx , которое в дополнение к условиям, оговоренным ранее, превышает $l_f(m)$ и $l_q(m)$. В этой связи представляют интерес формулы, определяющие $l(m)$, $l_f(m)$ и $l_q(m)$ через параметры смеси, размер частиц и т. п. При получении указанных формул ограничимся режимом малого отставания частиц от газа, что уже предполагает выполнение неравенств $l_f(m) \ll L$ и $l_q(m) \ll L$, необходимых для справедливости (2.6). Кроме того, примем, что для вычисления $f(m)$ и $q(m)$ могут быть использованы формулы Стокса, в силу чего уравнения движения и энергии отдельной частицы запишутся в виде

$$(3.1) \quad l_f(m) \frac{dw(m)}{dx} = w - w(m), \quad l_q(m) \frac{dT(m)}{dx} = T - T(m)$$

$$l_f(m) = \frac{2}{9} \frac{\rho_s^\circ}{\rho} \frac{w(m)}{w} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \text{Re}, \quad l_q(m) = \frac{3}{2} \text{Pr} c_s^\circ l_f(m), \quad \text{Re} = \frac{wL}{\nu}$$

Здесь ρ_s° — плотность материала частиц; c_s° — удельная теплоемкость частиц, отнесенная к удельной теплоемкости газа c_p ; ν — кинематическая вязкость газа; Pr — число Прандтля; Re — число Рейнольдса; x , $l_f(m)$ и $l_q(m)$ отнесены к характерному линейному размеру L . В случаях, когда Pr и c_s° близки к единице (что обычно имеет место), динамическая и тепловая длины релаксации оказываются, как видно из формулы для $l_q(m)$, величинами одного порядка.

Если $l_f(m) \ll 1$, то из (3.1), разлагая $w(m)$ в ряд по степеням $l_f(m)$, найдем, что

$$(3.2) \quad w(m) = w - l_f(m) \frac{dw}{dx}$$

причем здесь при определении $l_f(m)$ по (3.1) следует положить $w(m) = w$. Подстановка (3.2) в (1.3) и (1.4) дает

$$(3.3) \quad l(m) = 6 [W | d \ln w / dx | J(m^\circ) \langle r \rangle / L \text{Re}]^{-1}, \quad m^\circ = m / \langle m \rangle,$$

$$\langle m \rangle = \rho_s / N, \quad \langle r \rangle = (3 \langle m \rangle / 4 \pi \rho_s^\circ)^{1/3}$$

Здесь N — общее число частиц в единице объема, ρ_s — их суммарная плотность, $\langle m \rangle$ и $\langle r \rangle$ — масса и радиус «среднемассовой» частицы, $l(m)$ отнесено к L и

$$J(m^\circ) = \int_0^\infty [r^\circ(m^\circ) + r^\circ(\mu^\circ)]^2 | l_f^\circ(m^\circ) - l_f^\circ(\mu^\circ) | n^\circ(\mu^\circ) d\mu^\circ$$

$$r^\circ(m^\circ) = r(m) / \langle r \rangle, \quad l_f^\circ(m^\circ) = l_f(m) / l_f(\langle m \rangle), \quad n^\circ(\mu^\circ) d\mu^\circ = n(\mu) d\mu / N$$

В силу определения величин, отмеченных градусами, $J(m^\circ)$ — число порядка единицы. В соответствии с (3.1) и (3.3) для отношения длины релаксации $l_f(m)$ к длине свободного пробега получим формулу

$$\frac{l_f(m)}{l(m)} = \frac{W}{27} \frac{\rho_s^\circ}{\rho} \left| \frac{d \ln w}{dx} \right| J(m^\circ) \frac{\langle r \rangle}{L} \left[\frac{r(m)}{L} \right]^2 \text{Re}^2$$

из которой видно, что случаи, когда $l_f(m) \ll l(m)$, а следовательно, справедливы равенства (2.6), представляются вполне реальными. С другой стороны, чем в большей степени нарушаются условия $l_f(m) \ll 1$ и $l_f(m) \ll l(m)$, тем менее обоснованным является использование указанных равенств.

В заключение авторы благодарят Л. Е. Стернина, привлечшего их внимание к рассмотренному вопросу.

Поступила 10 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Crowe C. T., Willoughby P. G. A mechanism for particle growth in a rocket nozzle. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 9, pp. 1677, 1678.
2. Crowe C. T., Willoughby P. G. A study of particle growth in a rocket nozzle. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 7, pp. 1300—1304.
3. Marble F. E. Droplet agglomeration in rocket nozzles caused by particle slip and collision. Astronaut. Acta, 1967, vol. 13, No. 2, pp. 159—166.
4. Гришин С. Д., Тишин А. П., Хайрутдинов Р. И. Неравновесное двухфазное течение в сопле Лавала с коагуляцией частиц полидисперсного конденсата. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2, стр. 112—117.
5. Kuentzmann P. Agglomération des particules d'alumine dans l'écoulement de tuyère d'un propérgol métallisé. Recherche Aérospatiale, 1969, No. 131, pp. 35—47.
6. Jenkins R. M., Hoglund R. E. A unified theory of particle growth in rocket chambers and nozzles. AIAA paper, 1969, No. 69—541. (Рус. перев.: Обобщенная теория роста частиц в камере сгорания и сопле ракетного двигателя. Вопр. ракетн. техн., 1970, № 2 (182), стр. 35—52.)
7. Тишин А. П., Хайрутдинов Р. И. К расчету коагуляции частиц конденсата в соплах Лавала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5, стр. 181—185.
8. Бабуха Г. Л., Шрайбер А. А. Взаимодействие частиц полидисперсного материала в двухфазных потоках. Киев, «Наукова думка», 1972.
9. Бабуха Г. Л., Стернин Л. Е., Шрайбер А. А. Расчет двухфазных потерь в соплах при наличии коагуляции и дробления капель конденсата. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1, стр. 175—177.
10. Крайко А. Н., Нигматулин Р. И., Старков В. К., Стернин Л. Е. Механика многофазных сред. Итоги науки и техники, Сер. Гидромеханика, т. 6. М., ВИНТИ, 1972, стр. 93—174.
11. Williams F. A. Detonation in dilute sprays. Progr. Astronaut. and Rocketry, vol. 6. Detonation and two-phase flow. N. Y., Acad. Press., 1962, pp. 99—114. (Рус. перев.: Детонация в жидких аэрозолях с малой концентрацией капель. Сб. «Детонация и двухфазное течение». М., «Мир», 1966, стр. 103—118.)
12. Rannie W. D. Perturbation analysis of one-dimensional heterogeneous flow in rocket nozzles. Progr. Astronaut. and Rocketry, vol. 6. Detonation and two-phase flow. New York — London, Acad. Press, 1962, pp. 117—144. (Рус. перев.: Исследование методом возмущений одномерного гетерогенного течения в ракетных соплах. Сб. «Детонация и двухфазное течение». М., «Мир», 1966, стр. 121—154.)
13. Marble F. E. Mechanics of particle collision in the one-dimensional dynamics of gas-particle mixtures. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 8, pp. 1270—1282.