

ДВИЖЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПО КАНАЛУ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. С. Горинев (Москва)

В данной работе рассматривается движение несжимаемой проводящей жидкости по каналу с непроводящими стенками при наличии сильно неоднородного магнитного поля.

Эта задача в рамках линейной теории изучалась во многих работах [1-6]. Ниже для ее решения предлагается итерационный метод. Изучаются общие соотношения между параметрами в зоне резкого изменения магнитного поля и в области квазиразвитого течения (вниз по потоку за зоной неоднородности магнитного поля). Проведенные расчеты показывают, что результаты, полученные при помощи линейной теории, можно использовать и при конечных значениях параметра МГД взаимодействия.

1. Рассмотрим стационарное движение невязкой, несжимаемой, однородно и изотропно проводящей жидкости по каналу $|x| < \infty$, $0 < y < h$ в присутствии внешнего магнитного поля $\mathbf{B} = (0, 0, B_* b(x))$, ($B_* = \text{const}$) при малых магнитных числах Рейнольдса¹. Система уравнений магнитной гидродинамики, описывающая такое течение, имеет вид [1]

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + s \delta j_y, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} - s b j_x \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \left(s - \frac{\sigma B_*^2 h}{c^2 \rho V} \right)$$

$$j_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + v b, \quad j_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} - u b, \quad \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь u , v и j_x , j_y — безразмерные компоненты векторов скорости и плотности электрического тока \mathbf{j} , p и ϕ — безразмерные давление и электрический потенциал, z , y и x — безразмерные координаты, σ и ρ — проводимость и плотность среды, $V = \text{const}$ — средняя по сечению канала скорость. В качестве характерных величин скорости, плотности электрического тока, потенциала и давления выбраны V , $\sigma V B_* / c$, $V B_* h / c$ и ρV^2 соответственно. Координаты отнесены к высоте канала h .

Безразмерная величина s — параметр МГД взаимодействия.

Система (1.1), (1.2) дополняется граничными условиями на $x = -\infty$.

Ниже рассматриваются следующие граничные условия;

$$v = 0, \quad j_y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = 1 \quad (1.3)$$

Будем рассматривать случай, когда внешнее магнитное поле быстро затухает вне зоны его однородности. При достаточно большой длине этой зоны функцию b можно аппроксимировать единичной функцией Хэвисайда

$$b(x) = 0 \quad \text{при } x < 0, \quad b(x) = 1 \quad \text{при } x > 0 \quad (1.4)$$

Так как поток при $x \rightarrow -\infty$ не взаимодействует с магнитным полем, то асимптотические условия в случае, когда $\text{rot } V = 0$ при $x \rightarrow -\infty$, имеют вид

$$v \rightarrow 0, \quad u \rightarrow 1 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty \quad (1.5)$$

Решение системы (1.1) — (1.5) было получено в работах [1,4,6] в предположении малости s . Решение строилось в виде рядов по параметру s .

Были вычислены электрические параметры в нулевом и гидродинамические в первом приближении.

Целью данной работы является построение решения при конечном s и выяснение возможности использования линейного приближения при $s \sim 1$.

Для дальнейшего анализа систему (1.1), (1.2) удобно записать в следующем виде:

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = s j_x \delta(x) \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \omega, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial x} = u \delta(x), \quad \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0 \quad (1.8)$$

В этих уравнениях $\delta(x) = db/dx$ — дельта-функция Дирака, а величина ω — вихрь скорости.

¹ Указанное «эффективное» поле представляет собой результат осреднения внешнего магнитного поля по координате z . Изучаемое плоское течение также надо рассматривать как определенным образом осредненное трехмерное течение.

Для получения соотношения (1.6) надо продифференцировать уравнения (1.1) по y и x и затем вычесть одно из другого. Как следует из (1.6), вихрь скорости сохраняется вдоль линий тока при $x < 0$ и $x > 0$. Так как при $x = -\infty$ вихрь равен нулю, то $\omega \equiv 0$ при $x < 0$.

Первое соотношение в (1.8) находится путем дифференцирования уравнений (1.2).

Соотношения (1.6) — (1.8) показывают, что в сечении $x = 0$ ряд магнитогидродинамических параметров и их производных терпит разрыв. В дальнейшем это сечение будет рассматриваться как поверхность разрыва, на которой должны выполняться общие соотношения, следующие из законов сохранения массы и импульса и уравнений электродинамики [4]. Таким образом, при $x = 0$ имеем

$$[u] = 0, \quad [v] = 0, \quad [p] = 0 \tag{1.9}$$

$$[i_x] = 0, \quad [i_y] + u(0, y) = 0 \tag{1.10}$$

Здесь квадратными скобками [] обозначена разность величин справа и слева от сечения $x = 0$.

Соотношения (1.9) показывают, что параметры несжимаемой жидкости, движущейся по каналу постоянного сечения при наличии объемных сил конечной интенсивности, изменяются непрерывно. Можно показать, что непрерывно изменяются и производные $\partial u / \partial y$, $\partial v / \partial y$, $\partial u / \partial x$. Однако производные $\partial p / \partial x$, $\partial p / \partial y$, $\partial v / \partial x$ (а следовательно и ω) в сечении $x = 0$ терпят разрыв.

Выражения (1.10) следуют из непрерывности нормальной к поверхности компоненты электрического тока и тангенциальной составляющей электрического поля.

Интегрируя уравнение (1.6) по x в пределах $(-\epsilon, +\epsilon)$ и устремляя ϵ к нулю, с учетом (1.9) находим

$$[\omega] = s \frac{i_x(0, y)}{u(0, y)} \tag{1.11}$$

Так как $\omega = 0$ при $x < 0$, то из (1.11) и (1.6) получаем

$$\omega = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ [\omega] & (x = +0) \\ \Omega(x, y) & (x > 0) \end{cases} \tag{1.12}$$

$$\Omega(x, y) = s \frac{i_x[0, y - \alpha(x, y)]}{u[0, y - \alpha(x, y)]}, \quad \alpha(x, y) = \int_0^x \frac{v}{u} dx \tag{1.13}$$

Последнее соотношение в (1.12) есть интеграл уравнения (1.6) при $0 < x < \infty$. Уравнения (1.7) и (1.8) с учетом (1.9) — (1.13) можно теперь переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \Omega(x, y) & (x > 0) \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$[u] = [v] = 0 \quad (x = 0), \quad v = 0 \quad (y = 0, y = h)$$

$$\frac{\partial i_x}{\partial y} - \frac{\partial i_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial i_x}{\partial x} + \frac{\partial i_y}{\partial y} = 0 \quad (x \neq 0) \tag{1.15}$$

Функции Ω и u , входящие в системы (1.14) и (1.15) соответственно, являются неизвестными и должны определяться в результате решения задачи.

Используя (1.14), можно получить выражение функций u и v через величину Ω (например, методом Фурье).

Аналогичным образом, путем решения краевой задачи (1.15), в которой $u(0, y)$ рассматривается как известная функция координат, находим

$$i_x = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad i_y = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad F = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{2k\pi} e^{-k\pi|x|} \sin k\pi y \tag{1.16}$$

$$u(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin k\pi y, \quad u_k = 2 \int_0^1 u(0, y) \sin k\pi y dy$$

2. Приведем некоторые соотношения, вытекающие из уравнений (1.1), (1.2)

$$u_+^2(0) - 1 = 2P, \quad P = p(-\infty) - p(+\infty) \quad (2.1)$$

$$P = \int_0^1 u_+^2 dy - 1 - s \int_0^1 \int_0^y j_x(0, y) dy dy \quad (2.2)$$

$$u_+^2(1/2) - u_+^2(0) = 2s \int_0^{1/2} j_x(0, y) dy \quad (2.3)$$

Кроме того, из (1.13)

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{du_+}{dy} = s \lim_{y \rightarrow 0} \frac{j_x(0, y)}{u(0, y)} \quad (u_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y)) \quad (2.4)$$

Эти формулы, если известна $u(0, y)$, позволяют приближенно представить $u_+(y)$ в виде полинома, выделив особенность на стенке. Функция $j_x(0, y)$ при этом известна из (1.16).

Проведенные расчеты позволили заключить, что при этом функция $u_+(y)$ слабо зависит от выбора профиля $u(0, y)$ и при фиксированном расходе, в основном, определяется величиной s .

3. Рассмотрим следующий итерационный процесс. За нулевое приближение принимаются функции

$$\omega_0 \equiv 0, \quad u_0 \equiv 1, \quad v_0 \equiv 0, \quad j_{x0} = j_{x0}(x, y), \quad j_{y0} = j_{y0}(x, y) \quad (3.1)$$

Функции j_{x0} и j_{y0} рассчитываются по формулам (1.16), в которых $u(0, y) \equiv 1$. Первое приближение составляют функции

$$\omega_1(x, y), \quad u_1, \quad v_1, \quad j_{x1}, \quad j_{y1} \quad (3.2)$$

Функции ω_1 и Ω_1 вычисляются при помощи формул (1.12) и (1.13), в которых $j_x = j_{x0}$, $u = u_0$, $v = v_0$. Распределение скорости u_1, v_1 находится из системы (1.14), где $\Omega = \Omega_1(x, y)$, и рассчитывается по формулам Фурье или при помощи каких-либо других методов. Электрические токи j_{x1} и j_{y1} находятся из системы (1.8) и вычисляются по формулам (1.16), в которых $u(0, y) = u_1(0, y)$. Аналогично находятся второе и следующие приближения.

Заметим, что величины (3.1) совпадают с членами рядов, имеющими нулевой порядок малости по параметру s , а величины (3.2) — с соответствующими суммами членов нулевого и первого порядка. Однако при использовании итерационного метода параметр s не предполагается малым. В принципе можно выписать в аналитическом виде произвольную итерацию, однако объем вычислений при использовании, например, метода Фурье растет с номером итерации так быстро, что использование высших приближений становится практически невозможным.

Для оценки скорости сходимости процесса рассмотрим следующую модельную задачу. Предположим, что в системе (1.14), (1.15)

$$\Omega = s \frac{j_x(0, y)}{u(0, y)} \quad (3.3)$$

Решение такой задачи соответствует условию сохранения вихря скорости Ω вдоль линий тока, а вдоль линий $y = \text{const}$ (при $x > 0$). Из решения задачи (1.14) при $\Omega = \Omega(y)$ можно найти, что

$$u_+(y) - 1 = 2(u(0, y) - 1) \quad (3.4)$$

Так как $\Omega = du_+/dy$ при $x \rightarrow \infty$, то из (3.3) получим

$$\frac{du_+}{dy} = s \frac{j_x(0, y)}{u(0, y)}, \quad \int_0^1 u_+ dy = \int_0^1 u(0, y) dy = 1$$

Используя (3.4), получаем следующее уравнение:

$$2u^\circ \frac{du^\circ}{dy} = s j_x(0, y), \quad \int_0^1 u^\circ dy = 1, \quad (u^\circ(y) = u(0, y)) \quad (3.5)$$

Функция $j_x(0, y)$ выражается через u° при помощи решения (1.16).

Итерационный процесс состоит в последовательном определении функций $j_x(0, y)$ из (1.16) и u° путем решения нелинейного уравнения (3.5). В качестве исходного значения принимается $u^\circ(y) \equiv 1$.

Результаты решения модельной задачи представлены на фиг. 1, где показаны (черными кружками) значения асимптотической скорости на стенке $u_+(1) = u_+(0) = u_{+w}$, вычисленные на ЭВМ при помощи трех итераций при $s = 5$. Как видно, разница между вторым и третьим приближениями настолько мала, что при точности счета в один процент можно ограничиться только двумя итерациями.

Первой итерацией можно ограничиться, если допустима ошибка не более 5%. Заметим, что решение модельной задачи не вызывает затруднений, и составленный алгоритм позволяет получить решение с произвольной точностью.

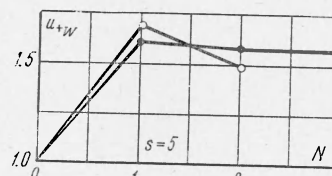
Есть все основания предполагать, что характер сходимости процесса при решении системы (1.1) — (1.5) будет таким же, как и в модельном уравнении.

Определим перепад давления в канале по формуле (2.2). Используя только нулевую итерацию, находим

$$P_0 = -s \int_0^1 \int_0^1 j_{x0}(\bar{v}, y) dy dy \quad (3.6)$$

Первая итерация дает

$$P_1 = \int_0^1 u_{+1}^2 dy - i - s \int_0^1 \int_0^1 j_{x1}(\bar{v}, y) dy dy \quad (3.7)$$



Фиг. 1

Величина P_0 соответствует расчету по линейной теории.

Потери давления P_0 и P_1 представлены на фиг. 2.

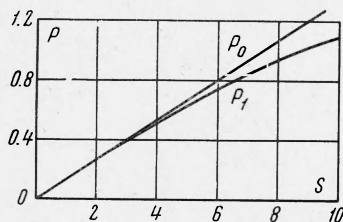
Как следует из графика, линейная теория дает вполне удовлетворительный результат вплоть до $s = 3 \div 5$. Существенно, что рассчитанный по линейной теории перепад давления является завышенным.

Определим асимптотический профиль скорости во втором приближении (вторая итерация).

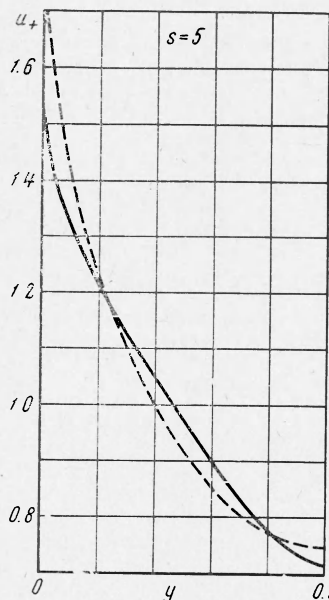
Это можно сделать приближенно, используя соотношения (2.1) — (2.4) и не решая задачи (1.14) с Ω , известной из первого приближения.

После выделения особенности на стенке канала здесь использовалась тригонометрическая аппроксимация функции.

На фиг. 3 приведены скорость u_{+1} (пунктиром), определенная по линейной теории [3], и скорость u_{+2} (сплошной линией), вычисленная во втором приближе-



Фиг. 2



Фиг. 3

нии. Результаты расчета величины u_{+w} показаны также на фиг. 1 (белыми кружками). Как видно, характер сходимости итерационного процесса такой же, как и в модельной задаче. Автор благодарит А. Б. Ватажина за помощь и внимание к работе.

Поступила 21 X 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. В а т а ж и н А. Б. О деформации профиля скорости в неоднородном магнитном поле. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
2. Ш е р к л и ф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. М., «Мир», 1965.
3. S h e r c l i f f J. Edge in electromagnetic flowmeters. J. Nucl. Energy, 1956, vol. 3, p. 305.
4. К у л и к о в с к и й А. Г., Л ю б и м о в Г. А. Введение в магнитную гидродинамику. М., Физматгиз, 1962.
5. В а т а ж и н А. Б. Определение параметров дозвукового течения в канале за зонной осевой неоднородности слабых возмущающих сил и источников тепла. ПММ, 1967, вып. 3.
6. В а т а ж и н А. Б., Х о л щ е в н и к о в а Е. К. Течение анизотропно проводящей среды по каналу в зоне входа в магнитное поле. ПМТФ, 1967, № 3.

**ОЦЕНКА ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ
В ПРИЭЛЕКТРОДНОЙ ОБЛАСТИ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА**

А. Е. Коновалов

(Москва)

При расчете тепловых потоков в плазме в некоторых работах [1-3] учитываются термоэлектрические эффекты. Одномерная модельная задача о нагреве среды за счет джоулевой диссипации рассматривалась в работе [1]. В ней было показано, что эффекты, связанные с переносом энергии электронами, приводят к несимметричному распределению температуры между электродами. В работе [2] была решена задача о линейном пичевом разряде в водороде. Одним из результатов работы будет установление асимметрии тепловых потоков в анод и катод. Попытка оценить падение потенциала в приэлектродной области применительно к катодному пятну была сделана в [3]. В этом случае задача будет пространственной, и термоэлектрические эффекты должны усилиться вследствие больших градиентов температуры. Интересующее автора [3] решение для предельного случая сильных токов, полученное с помощью численных методов, не позволяет найти распределение параметров в приэлектродной области и проанализировать влияние различных эффектов.

Ниже с использованием для расчета схемы, принятой в [3], рассматривается влияние термоэлектрических эффектов на тепловой поток и падение потенциала в приэлектродной области для широкого диапазона параметров.

Известно, что протекание в плазме тока достаточно большой силы сопровождается образованием пятен на электродах. Будем рассматривать область около электрода, отступая от пятна на расстояние порядка его размера. Тогда все величины в этой области можно считать зависящими только от радиуса. Это возможно в случае уединенного пятна, когда в его окрестности нормальная составляющая плотности тока на поверхности электрода равна нулю, а ток в плазме над электродом растекается диффузно, не шнуруясь.

Процессы, определяемые эмиссионными свойствами электродов и происходящие на расстоянии порядка длины свободного пробега электрона от поверхности электрода, при этом не рассматриваются. Граничные условия будем задавать на сфере радиуса r_0 , называя ее условно электродом, причем в силу симметрии можно ограничиться полусферой.

Запишем уравнение для тока, теплового потока и энергии

$$j_r = \sigma E_r + \Phi \frac{dT}{dr}, \quad q_r = -\lambda \frac{dT}{dr} + \psi j_r, \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 q_r) = j_r E_r \quad (1)$$

Здесь j_r , q_r — плотность тока и теплового потока, E_r — напряженность электрического поля, T — температура, r — координата. Коэффициенты переноса σ , Φ , λ , ψ взяты для полностью ионизованного водорода из работы [2].

$$\sigma = \alpha T^{3/2}, \quad \Phi = \alpha \gamma T^{3/2}, \quad \lambda = k T^{5/2}, \quad \psi = -\zeta T \quad (2)$$

$$\alpha = 1.1 \cdot 10^{-3}, \quad \gamma = 0.69 \cdot 10^{-4}, \quad k = 8.7 \cdot 10^{-12}, \quad \zeta = 2.85 \cdot 10^{-4}$$

(Используется система единиц СИ)