

УДК 534.222.2

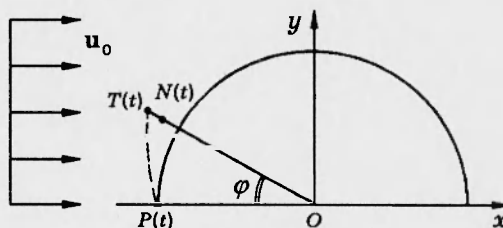
**ДИФРАКЦИЯ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРЕ
С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ВО ВРЕМЕНИ РАДИУСОМ**

В. А. Павлов

 НИИ физики,
198904 Санкт-Петербург

Задачи дифракции ударных волн до последнего времени актуальны. Уиземом [1, 2] предложена приближенная теория описания сильных неодномерных ударных волн, основанная на «правиле характеристик» с использованием нелинейных ортогональных лучевых координат. По признанию самого автора [2], «... возможно, наиболее суровым испытанием этой теории явилось ее применение к дифракции на круговом цилиндре, которое выполнили Брисон и Гросс [3]». В [3] исследовано маховское отражение (образование трех ударных волн и контактного разрыва) и показано, что удовлетворительное описание стебля Маха в рамках метода [1, 2] получается при пренебрежении влиянием отраженной волны и волны контактного разрыва.

В данной работе сделано обобщение задачи [3] на случай цилиндра, изменяющего достаточно медленно свой радиус во времени. Пусть $r = a(t)$ — уравнение поверхности цилиндра (t — время), ось симметрии которого ориентирована вдоль вектора \mathbf{z} . Считается, что первичная (падающая) сильная ударная волна перемещается со скоростью $\mathbf{u}_0 = u_0 \mathbf{e}_x = \text{const}$ ($|\mathbf{e}_x| = 1$, $u_0 \gg c$, c — скорость звука). Задачу будем решать в локальной декартовой системе координат (ниже она помечена штрихом), связанной со средней точкой стебля Маха (точка $N(t)$ на рисунке). В этой системе взаимная скорость ударной волны и точки N имеет вид



$$\mathbf{u}'_0(t, \varphi) = \mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0(t, \varphi), \quad (1)$$

где $\mathbf{v}_0 = \frac{\dot{\xi}'}{\partial t} \{ (-\mathbf{e}_x \cos \varphi + \mathbf{e}_y \sin \varphi) [a(t) + \frac{1}{2} b(t, \varphi)] \}$; φ — полярный угол; $b = 2(NT)$ — длина стебля (T — координата конца стебля в системе координат x, y). В нашем приближении будет считаться, что стебель Маха прямолинеен и ориентирован вдоль радиуса. В штрихованной системе координат угол $Q'_0(t, \varphi)$ между нормалью к ударному фронту и осью x находится из соотношения

$$\cos Q'_0 = (u_0 + v_0(t) \cos \varphi) [(u_0 + v_0 \cos \varphi)^2 + v_0^2 \sin^2 \varphi]^{-1/2}.$$

Описание привязано к локальной системе координат. Мы будем интересоваться только ситуацией, когда фронт ударной волны пришел в точку N . Поэтому в качестве t в (1) возьмем время «встречи» фронта с точкой N :

$$t = \left\{ R_0 - \left[a(t) + \frac{1}{2} b(t, \varphi) \operatorname{tg} \varphi \right] \right\} u_0^{-1} \quad (2)$$

($R_0 = \text{const} \geq (a + b)$ — расстояние от падающего фронта до начала координат (точка O на рисунке) в момент $t = 0$). Уравнение (2) служит для нахождения $t = t(\varphi)$, при этом получается представление u'_0 в зависимости от угла φ :

$$u'_0 = u'_0(t(\varphi), \varphi) = u'_0(\varphi).$$

Рассмотрим только случай медленного изменения радиуса $a(t)$ цилиндра со временем. Ограничимся ситуацией $|v_0| \ll u_0$, поэтому функция $u'_0(t, \varphi)$ будет медленно изменяющейся по первому аргументу.

Введем ортогональную нелинейную систему лучевых координат α' , β' , связанную с точкой $N(t)$ на фронте ударной волны ($\alpha \perp \beta$):

$$(M'd\alpha')^2 + (A'd\beta')^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \quad (3)$$

Здесь $M' = u'c_0^{-1}$ — число Маха; u' — скорость ударного фронта; c_0 — линейная скорость звука; A' — безразмерная площадь поперечного сечения лучевой трубки.

Для стебля Маха справедливо представление $A'_1 = ba_0^{-1}$, $a_0 \equiv a(0)$, а для падающей ударной волны площадь A'_0 соответствует длине первичного ударного фронта между точкой $T(t)$ (см. рисунок) и осью x :

$$A'_0 = a_0^{-1}(a + b) \sin \varphi (\cos Q'_0)^{-1}.$$

В нерегулярных волноводах и, в частности, в лучевых трубках переменного сечения имеется связь между A' и M' для сильных ударных волн [2]:

$$A'_1(A'_0)^{-1} \approx (M'_0)^n (M'_1)^{-n}, \quad n = 1 + 2\gamma^{-1} + [2\gamma(\gamma - 1)^{-1}]^{1/2} \quad (4)$$

(γ — отношение удельных теплоемкостей).

Для системы координат α' , β' , удовлетворяющей условию (3), справедливо уравнение эйконала

$$|\nabla' \alpha'| = (M')^{-1}. \quad (5)$$

Лучи, связанные со стеблем Маха, описываются уравнениями

$$(M'_1)^{-1} \frac{\partial x'}{\partial \alpha'} = \cos Q'_1, \quad (M'_1)^{-1} \frac{\partial y'}{\partial \alpha'} = \sin Q'_1,$$

где Q'_1 — угол между векторами u'_1 и x .

При переходе от первичной (падающей) волны ко вторичной (фронт ее совпадает со стеблем Маха) происходит излом ударного фронта. Это соответствует тому, что направление лучевого вектора α' изменяется скачком при сохранении модуля $|\alpha'| = \text{const}$:

$$\alpha'_1 = \alpha'_0 \approx [a - (a + b) \cos \varphi] (M'_0 \cos Q'_0)^{-1}, \\ M'_0 = M_0 [(1 + v_0 u_0^{-1} \cos \varphi)^2 + (v_0 u_0^{-1} \sin \varphi)^2]^{1/2}.$$

Уравнение (5) используется в приближении

$$(R'_1)^{-1} \frac{\partial \alpha'}{\partial \varphi} \approx (M')^{-1} \quad (6)$$

(R'_1 — радиус-вектор точек на стебле Маха). В окрестности точки $N(t)$ имеем $R'_1 \approx a + \frac{1}{2}b$. Соотношения (4), (6) представляют собой замкнутую систему, она приводится к дифференциальному уравнению для величины

стебля Маха $b(t(\varphi), \varphi)$:

$$b = (a + b)(\sin \varphi)^{n+1} [1 + (v_0 \sin \varphi)^2 (u_0 + v_0 \cos \varphi)^{-2}]^{1/2} \Pi(b, a, \varphi). \quad (7)$$

Здесь

$$\Pi \equiv \left\{ M'_0 \left[\left(a + \frac{1}{2} b \right) \sin \varphi \right]^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[(a - (a + b) \cos \varphi) (M'_0 \cos Q'_0)^{-1} \right] \right\}^n.$$

Граничное условие для функции b в уравнении (7) имеет вид $b(t(0), 0) = 0$. Функция Π изменяется медленно по сравнению с множителем $(\sin \varphi)^{n+1}$ в (7). При $a = a_0 = \text{const}$ и $\varphi \rightarrow 0$ имеем $\Pi \approx 1$. При $a = a_0$ и $\varphi \leq 60^\circ$ в [3] вычислена зависимость $b = b_0(\varphi)$, график безразмерной функции $b_0(\varphi)(a_0)^{-1}$ есть также в [2, рис. 8.13]. При условии медленного изменения радиуса цилиндра со временем ($|v_0| \ll u_0$) и при малых амплитудах этого изменения ($|a - a_0| a_0^{-1} \ll 1$) выполняется условие малости стебля Маха: $b \ll a$. Поэтому уравнение (2) можно решать методом последовательных приближений, взяв за первое приближение соотношение

$$b \approx B_1(\varphi) = (a + b_0(\varphi))(\sin \varphi)^{n+1} \times \\ \times [1 + (v_0 \sin \varphi)^2 (u_0 + v_0 \cos \varphi)^{-2}]^{1/2} \Pi(b_0(\varphi), a, \varphi). \quad (8)$$

Правая часть в формуле (8) представляет собой известную функцию, так как $b_0(\varphi)$ найдено в [3], вид $a(t)$ и $v_0 = \frac{d_1}{dt}$ задан условиями задачи, связь между t и φ дается уравнением (2). При подстановке $b = B_1$ в правую часть (7) получается второе приближение для b .

Таким образом, использование метода последовательных приближений при решении (7) сводит приближенно нахождение $b(t(\varphi), \varphi)$ к задаче дифференцирования по φ известных на каждом этапе функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Whitham G. V. A new approach to problems of shock dynamics // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 146-171.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
3. Bryson A. F., Gross R. W. F. Diffraction of strong shocks by cones, cylinders and spheres // J. Fluid Mech. 1961. V. 10. P. 1-16.

Поступила в редакцию 19/1 1994 г.,
в окончательном варианте — 14/X 1994 г.