

ляется из $x = 4.64 x_0$. На фиг. 3 — кривые

$$x_* = \int_0^t w_* dt$$

характеризующие закон движения фронта волны, причем кривые теории и эксперимента, обозначенные соответственно цифрами 1 и 2, приведены из работы [4] Р. Дресслера, а кривая 3 — из предлагаемого численного решения.

Автор благодарит О. Ф. Васильева за руководство и внимание к работе.

Институт гидродинамики
СО АН СССР

Поступила 5 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Стокер Д. Д. Волны на воде. Изд. иностр. лит., 1959.
2. Dressler R. F. Hydraulic resistance effect upon the dam-break functions. J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952, vol. 49, No 3.
3. Whitham G. B. The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem. Proc. Roy. Soc., 1955, No 1170.
4. Dressler R. F. Comparison of the theories and experiments for the hydraulic dam-break wave. Internat. Assoc. Scien. Hydrology, Generale di Roma, 1954, Publ., vol. 111. No. 38.
5. Faure J., Nahas N. Etude numerique et experimentale d'untumescences a forte courbure du front. La Houille blanche, 1961, No. 5.
6. Montuori C. Immissione di una portata costante in un canale vuoto. Estratto da «Atti Fondazione Politecnica del Mezzogiorno d'Italia», 1960, vol. 5.
7. Montuori C. L'onda di riempimento di un canale vuoto. L'Energia Elektrica. 1964, vol. 41. No 12.
8. Васильев О. Ф., Квон В. И. О влиянии нестационарности при движении открытого потока жидкости. ПМТФ, 1966, № 1.

РАСТЕКАНИЕ ВЯЗКОЙ КАПЛИ ПРИ УДАРЕ

Э. И. Андрианкин (Москва)

Решение задачи о безынерционном растекании капли при ударном сжатии в предположении о постоянстве коэффициента вязкости было получено Рейнольдсом и применено в работе [1] к анализу чувствительности жидких взрывчатых веществ. Представляет интерес учесть силы инерции и зависимость коэффициента вязкости μ от температуры, так как от этих факторов зависят разогрев жидкости и закон торможения ударника. Рассмотрен также характер выхода решения на стационарный режим.

Предположим, что радиус основания ударника R совпадает с начальным радиусом тонкого цилиндрического слоя вязкого вещества толщиной δ_0 . Масса ударника m , начальная скорость V_0 . После упрощений, следующих из малости отношения δ_0/R , уравнения гидродинамики запишутся так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial ur}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad u(r, 0, t) = 0, \quad u(r, \delta, t) = 0$$

$$v(r, 0, t) = 0, \quad v(r, \delta, t) = w, \quad p(R, t) = 0$$

Жидкость будем считать негеплопроводной. Тогда диссипированная энергия в лагранжевой частице с координатами r_0 и z_0 сохраняется

$$\left(\frac{dT}{dt} \right)_{r_0, z_0} = \frac{\mu}{\rho_0 c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{r, t}^2, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_{r_0, z_0} = u, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{r_0, z_0} = v \quad (2)$$

$$T(r_0, z_0, 0) = 0, \quad r(r_0, z_0, 0) = r_0, \quad z(r_0, z_0, 0) = z_0$$

Если $R/c \ll \tau_1$ (c — скорость звука в ударнике, $\tau_1 = \delta_0/v_0$ — характерное время удара), то закон торможения груза запишется так:

$$m \frac{dw}{dt} = 2\pi \int_0^R p r dr, \quad \delta = \delta_0 + \int_0^t w dt, \quad w(0) = -v_0 \quad (3)$$

Уравнения (1) решим методом моментов. Зададим u в виде ряда

$$u = z(\delta - z) [f_0(r, \delta) + zf_1(r, \delta) + \dots]$$

удовлетворяющего условиям прилипания жидкости при $z = 0$ и $z = \delta$. Умножая уравнение движения (1) на z^n ($n = 0, 1, 2, \dots$) и интегрируя его по толщине слоя от 0 до δ , получим систему дифференциальных уравнений, которая в пределе $n \rightarrow \infty$ эквивалентна (1). Интегрируя по z уравнение неразрывности и ограничиваясь нулевым приближением в (4) найдем

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \int_0^z u dz, \quad \text{т. е. } u = \frac{3wrz(z-\delta)}{\delta^3}, \quad v = \frac{wz^2(3\delta-2z)}{\delta^3} \quad (5)$$

Используя (2) и (5) и переходя от t к δ , установим связь между текущими и лагранжевыми координатами и определим поле температур

$$\begin{aligned} \frac{dr}{u} = \frac{dz}{v} = \frac{d\delta}{w}, \quad \frac{d\delta}{dt} = w, \quad r = r_0 \left[\frac{\delta_0(\delta+e)}{\delta(\delta_0+e)} \right]^{3/4} \quad (6) \\ e = \frac{z\delta_0(\delta_0-z_0)}{(0.5\delta_0-z_0)^2}, \quad z = \frac{\delta}{2} [1 \pm \sqrt{\delta/(\delta+e)}] \quad \left(\begin{array}{l} + \text{ при } z > 0.5\delta \\ - \text{ при } z < 0.5\delta \end{array} \right) \\ T = \frac{9}{\rho_0 c_p} \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{\mu w r^2 (\delta-2z)^2}{\delta^3} d\delta, \quad T_* = \frac{9\mu_0 R^2}{\rho_0 c_p} \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{w}{\delta^4} d\delta \end{aligned}$$

Из (6) следует, что максимальная температура T_* достигается в точках $r = R$, $z = 0$ и $r = R$, $z = \delta$. Используя (4) и осредняя по z уравнение (1), найдем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{6w\mu_0 r}{\delta^3} (\mu_1 + \psi), \quad \psi = \frac{\rho_0 \delta^2}{12\mu_0} \frac{dw}{d\delta} - \frac{0.15\rho_0 \delta w}{\mu_0}, \quad \mu = \mu_0 \mu_1 [p, T(r, 0, t)] \quad (7)$$

Здесь $T(r, 0, t)$ выражается из (6) при условии $z = 0$, и, следовательно, $r = r_0$. Интегрирование уравнения (7) при произвольной зависимости вязкости от p и T требует численного расчета даже в рамках принятых допущений. Однако в частных случаях решение получается в квадратурах

$$\int_0^p \frac{dx}{\mu_1(x) + \psi} = \frac{3w\mu_0}{\delta^3} (r^2 - R^2), \quad \mu_1 = \mu_1(p) \quad (8)$$

$$\int_0^y \frac{\delta^3 dx}{3w\mu_0 [A(x/\theta)^\omega + \psi] - x\delta^3} = 2 \ln \frac{r}{R}, \quad y_1 = \frac{p}{r^2}, \quad \omega = \frac{n}{n+1}$$

$$A = \left(\frac{\rho_0 c_p T_0 \delta_0^3}{9(n+1)\mu_0 v_0} \right)^\omega, \quad \theta = \frac{T_* \rho_0 c_p \delta_0^3}{9\mu_0 R^2 v_0}, \quad \mu_1 = \left(\frac{p}{T} \right)^n$$

$$p = \frac{3w\mu_0}{\delta^3} \left[(r^2 - R^2) \psi + (n+1) A \theta^{-\omega} \left(r^{n+1} - R^{n+1} \right) \right], \quad \mu_1 = \left(\frac{T_0}{T} \right)^n$$

Используя (8), получим уравнение торможения ударника, которое в безразмерной форме, например для случая $\mu_1 = (T_0/T)^n$, запишется так:

$$(1 + \lambda\beta\xi) \frac{d}{d\xi} \xi^{-2} \frac{d\theta}{d\xi} + 1.8\lambda\beta\xi^{-2} \frac{d\theta}{d\xi} + \lambda\kappa\xi\theta^{-\omega} = 0, \quad \theta = \int_0^\xi \xi^2 w_1 d\xi$$

$$\theta(1) = 0, \quad (d\theta/d\xi)_1 = 1, \quad w = -w_1 v_0, \quad \xi = \delta_0/\delta, \quad \beta = 0.15\rho_0 v_0 \delta_0/\mu_0 \quad (9)$$

$$\lambda = 5\pi\mu_0 R^4 / 6m v_0 \delta_0^2, \quad \kappa = 3.6(n+1)AR^{-2\omega}/(n+2)$$

Это уравнение легко интегрируется численно. Если $\beta \rightarrow 0$, то (9) допускает группу подобия и заменой переменных $v = \theta\xi^\varepsilon$, $z = dv/d \ln \xi$, $\varepsilon = -5(n+1)/(2n+1)$ сводится к уравнению первого порядка. Если $n = 0$, т. е. $\mu = \text{const}$, то уравнение (9) интегрируется в конечном виде

$$w_1 = \left(\frac{y_0}{y} \right)^{1.8} + \frac{1}{\lambda\beta^2} \left[1 - \left(\frac{y_0}{y} \right)^{1.8} \right] - \frac{9y}{14\lambda\beta^2} \left[1 - \left(\frac{y_0}{y} \right)^{2.8} \right], \quad t_1 = \int_1^\xi w_1^{-1} \xi^{-2} d\xi \quad (10)$$

$$y = 1 + \lambda\beta\xi, \quad y_0 = 1 + \lambda\beta, \quad t_1 = t/\tau_1$$

Из (10) следует, что при больших ξ имеем $w_1 \approx 1 / \lambda \beta^2 - 9\xi / 14\beta$. Следовательно, груз останавливается при конечной толщине слоя $\xi = \xi_*$.

Вблизи $\xi = \xi_*$ имеем $w_1 = 18\lambda\xi_* (\xi_* - \xi) / (1 + \lambda\beta\xi_*)$, поэтому при $\xi \rightarrow \xi_*$ величина t_1 возрастает как $\ln [1 / (\xi_* - \xi)]$.

При малых значениях числа Рейнольдса силы инерции становятся меньше сил вязкости и соотношения (10) дают закон движения груза в задаче [1]

$$w_1 = 1 + 0.9\lambda(1 - \xi^2), \quad 0.9\lambda t_1 = \frac{1}{a^2} \left[1 - \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2a} \ln \frac{(a + \xi)(a - 1)}{(a - \xi)(a + 1)} \right], \quad a^2 = \frac{1 + 0.9\lambda}{0.9\lambda} \quad (11)$$

Из (10) следует, что скорость ударника монотонно падает со временем. Однако радиальная скорость истечения в точке $z_1 = 0.5\delta$, $r = R$ в момент времени ξ_1 и давление в точке $r = 0$ при $\xi = \xi_2$ достигают максимумов $u_1(\xi_1)$ и $p_1(\xi_2)$, которые определяются из соотношений

$$u_1 = \frac{4\delta_0 u(R, z_1, \xi)}{3\nu_0 R} = \xi w_1, \quad p_1 = \frac{\delta_0^3 p(0, \xi)}{3\mu_0 \nu_0 R^2} = w_1 \xi^2 \frac{\beta w_1 + \xi}{1 + \lambda\beta\xi} \quad (12)$$

$$w_0(1 - 0.8\lambda\beta\xi_1) = 1.8\mu\xi_1^2, \quad 2\beta(1 - 0.8\lambda\beta\xi_2)w_2^2 + 3\xi_2(1 - 0.8\lambda\beta\xi_2)w_2 = 1.8\lambda_2^3$$

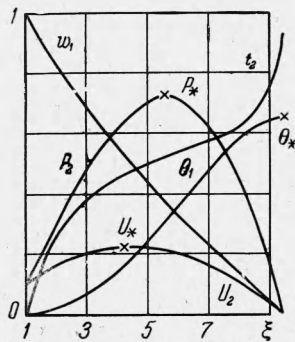
$$w_0 = w_1(\xi_1), \quad w_2 = w_1(\xi_2) \quad (13)$$

При $\beta \rightarrow 0$ из (11) и (13) найдем $\xi_1 = a^{1/3}$, $\xi_2 = a^{3/5}$. На фиг. 1 приведены результаты вычислений безразмерного давления $p_2 = 0.01 p_1$, температуры $\theta_1 = 0.01\theta$, времени $t_2 = 0.5t_1$ и скоростей жидкости $u_2 = 0.1u_1$ и ударника w_1 в зависимости от ξ для значений параметров $\beta = 10$ и $\lambda = 0.01$.

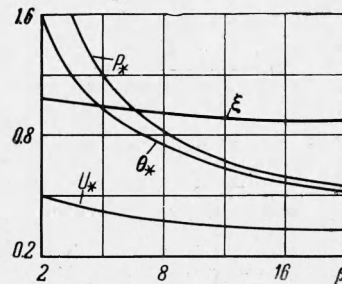
На фиг. 2 в зависимости от β построены графики тех же величин в точках максимума $u_* = u_2(\xi_1)$, $p_* = p_2(\xi_1)$, $\theta_1 = \theta(\xi_1)$ и $\xi_0 = 0.1\xi_1$.

Из графиков видно, что максимальная скорость вытекания возрастает в несколько раз по сравнению с начальной, а максимальное давление (при малых β) — даже на два порядка. Если при этом энергия упругой деформации груза оказывается больше, чем $1/2 m v_0^2$, то необходимо учитывать сжимаемость ударника. Так как время сдвливания t_1 возрастает логарифмически, то характерное время остается порядка единицы.

Можно рассмотреть задачу о растекании капли между двумя бесконечными плоскостями. При этом переменный радиус капли выражается из закона сохранения массы $R^2(t) \delta = R_0^2 \delta_0$, и задача решается аналогично вышеизложенному. Однако такая постановка справедлива только в тех случаях, когда кумулятивным выплеском жидкости при $z = 1/2\delta$ можно пренебречь.



Фиг. 1



Фиг. 2

Оценим теперь, в какой мере квазистационарный параболический профиль скоростей в задаче Рейнольдса ($\beta \rightarrow 0$) справедлив при ударном сжатии. Предположение о квазистационарности справедливо, если характерное время образования вязкого профиля скоростей $\tau_2 \ll \tau_1$. Если исходить из размерности, то $\tau_2 \sim \rho_0 \delta_0^2 / \mu_0$. Однако решение упрощенной задачи о развитии вязкого течения показывает, что τ_2 на порядок меньше. Это важно, так как решение зависит от времени экспоненциально.

Будем рассматривать момент времени t_0 , близкий к начальному, но такой, что давление по толщине слоя уже успевает выровняться $\tau_0 > \delta_0 / c$. Скорость ударника будем считать постоянной, а начальное распределение u зададим в виде $u(r, z, 0) = v_0 r / 2\delta_0$, удовлетворяющем уравнению неразрывности. Пренебрежем в уравнениях движения (1) инерционными членами, сохранив производную $\partial u / \partial t$. Решение (17) показывает, что это справедливо везде, за исключением пристеночного слоя, где при $t \rightarrow 0$ градиенты скорости $\sim t^{-0.5}$ того порядка, что и ускорение [2]. Однако по физи-

ческому смыслу $t > t_0$. Чтобы избавиться от «подвижной границы» $\delta(t)$, перейдем к новым переменным $\eta = z/\delta$ и $\tau = (\xi - 1)/\delta_0$. Тогда система уравнений, аналогичная (1), запишется так:

$$\rho_0 v_0 \frac{\partial u}{\partial \tau} + \rho_0 v_0 \delta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \int_0^1 u d\eta = \frac{v_0 r}{2} \left(\tau + \frac{1}{\delta_0} \right) \quad (14)$$

$$\varphi = r\delta^2, \quad u(r, \eta, 0) = v_0 r / 2\delta_0, \quad u(r, 0, \tau) = 0, \quad u(r, 1, \tau) = 0, \quad \varphi(R, \tau) = 0$$

Член с δ в (14) опустим, так как он порядка $v\delta u/\partial y$ отброшенных членов инерции. Сделав преобразование Лапласа, получим уравнения для образов скорости $u \doteq U$ и аналога давления $\varphi \doteq P$.

$$\rho_0 v_0 s U - \frac{\rho_0 v_0^2}{2\delta_0} r + \frac{\partial P}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \quad \int_0^1 U d\eta = \frac{v_0 r}{2s} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{\delta_0} \right) \quad (15)$$

$$U(r, 0) = 0, \quad U(r, 1) = 0, \quad P(R) = 0$$

Интегрируя (15), получим

$$U = \frac{v_0 r (s + \delta_0) x \operatorname{sh} x \eta \operatorname{sh} x (1 - \eta)}{\delta_0 s^2 (x - \operatorname{th} x) \operatorname{ch} x}, \quad P = \frac{\rho_0 v_0^2 (R^2 - r^2)}{4\delta_0} \left[\frac{(s + \delta_0) x}{s(x - \operatorname{th} x)} - 1 \right] \\ x = 0.5 \left(\frac{\rho_0 v_0 s}{\mu_0} \right)^{1/2} \quad (16)$$

Нетрудно найти асимптотику (16) при $s \rightarrow \infty$

$$U = \frac{v_0 r}{2\delta_0 s} [1 + 1/x - \exp(-2x\eta) - \exp[-2x(1-\eta)] + \dots] \quad (17)$$

$$P = \frac{\rho_0 v_0^2}{4} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{x\delta_0} \right] (R^2 - r^2), \quad \text{т. е. при } t \rightarrow 0$$

$$u = \frac{v_0 r_0}{2\delta_0} \left[1 + 4 \left(\frac{\mu_0 \tau}{\pi \rho_0 v_0} \right)^{1/2} - \operatorname{Erf} \frac{\eta}{2} \left(\frac{\rho_0 v_0}{\mu_0 \tau} \right)^{1/2} - \operatorname{Erf} \frac{1-\eta}{2} \left(\frac{\rho_0 v_0}{\mu_0 \tau} \right)^{1/2} + \dots \right]$$

$$p = \frac{\rho_0 v_0^2}{4\delta_0^2} (R^2 - r^2) \left[\frac{2}{\delta_0} \left(\frac{\mu_0}{\pi \rho_0 v_0 \tau} \right)^{1/2} \exp(-\tau) + 1 + \dots \right]$$

Из (17) следует, что p бесконечно возрастает при $t \rightarrow 0$. Это связано с тем обстоятельством, что для мгновенной остановки пристеночного слоя жидкости нужны бесконечные силы трения $\sim t^{-0.5}$, уравновешивающиеся инерционными силами и давлением, которое принято постоянным по толщине слоя. Формулы для оригиналов при $t > 0$ можно получить из (16), разлагая U и φ в степенные ряды и пользуясь теоремой о вычетах [3]. Особые точки в плоскости s лежат слева от мнимой оси. В точке $s = 0$ находится полюс второго порядка. Простые полюса расположены в точках $s_k = -4\mu\lambda_k^2 / \rho_0 v_0$, $\operatorname{tg} \alpha_k = \lambda_k$ ($\lambda_1 = 4.493$), поэтому

$$u = \frac{3v_0 r \eta (1 - \eta)}{\delta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2v_0 r (s_k + \delta_0) \operatorname{sh} \eta x_k \operatorname{sh} (1 - \eta) x_k}{\delta_0 s_k x_k \operatorname{sh} x_k} \exp \left(- \frac{4\mu\lambda_k^2 \tau}{\rho_0 v_0} \right) \\ p = \frac{3v_0 \mu_0 (R^2 - r^2)}{\delta^3} \left[1 + 0.1 \frac{\rho_0 v_0 \delta}{\mu} + \frac{2}{3} \frac{\delta}{\delta_0} \sum \frac{\delta_0 + s_k}{s_k} \exp \left(- \frac{4\mu\lambda_k^2 \tau}{\rho_0 v_0} \right) \right] \quad (18)$$

Из (18) видно, что решение быстро (с характерным временем $\tau_3 = \tau_2 / 4\lambda_1$) выходит на квазистационарный режим.

Автор благодарит В. К. Боболева за указание задачи и обсуждение результатов, а также А. С. Компанейца и Г. Т. Афанасьева за полезные дискуссии.

Институт химической физики
АН СССР

Поступила 28 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

- Харитон Ю. Б. Сб. статей по теории взрывчатых веществ. Оборонгиз, 1940.
- Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955.
- Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.