

Н. Н. Смирнов, С. И. Сафаргулова

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ СЛАБЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ГОРЕНИИ СЖИМАЕМЫХ ПОРИСТЫХ ТОПЛИВ

Исследованы свойства системы уравнений, описывающей процесс нестационарного распространения конвективного фронта пламени в пористом сжимаемом твердом топливе в рамках двухскоростной модели, учитывающей различие давления в газе и напряжений в конденсированной фазе. Определен тип системы уравнений в зависимости от разности скоростей и давлений в фазах. Показано, что в частных предельных случаях осуществляется непрерывный переход к известным ранее решениям.

Для решения системы уравнений, описывающей динамику конвективного горения сжимаемых пористых топлив, необходима корректная постановка соответствующих начальных и краевых условий. Для этой цели нужно определить тип системы дифференциальных уравнений. Исследованию задач подобного рода для уравнений, описывающих движение многофазных сред, посвящено значительное число работ различных авторов.

В [1, 2] выписаны уравнения неразрывности и движения для каждой фазы. Для замыкания системы использовано предположение о баротропности. Авторы указывают на негиперболичность такой системы уравнений при реальных значениях разности скоростей фаз. В [3] показано, что в более общем случае для полной системы, описывающей течение сжимаемых фаз, при использовании модели, содержащей одно и то же давление для различных фаз, система дифференциальных уравнений не является гиперболической при реальных значениях величин проскальзывания. В [4] исследуется распространение малых возмущений в смеси с баротропной газовой фазой. Отмечается, что свойственные системе дифференциальных уравнений негиперболичность и неустойчивость малых возмущений вызваны недостаточно полным описанием межфазного взаимодействия и взаимодействия внутри дисперсной фазы. При введении различных определяемых независимо для каждой фазы давлений система уравнений становится гиперболической [5].

В работе [6] получены неравенства, определяющие тип системы в пространстве физических переменных  $(\rho_1, \rho_2, u_1, u_2)$  в случае несжимаемой твердой фазы. В [7, 8] проанализировано характеристическое уравнение для системы, в которой нормальное напряжение в конденсированной фазе принимается однозначной функцией от объемного содержания гранул. Для несжимаемой конденсированной фазы выписан критерий, позволяющий судить о гиперболичности системы.

В данной работе исследуются свойства системы уравнений, описывающей процесс нестационарного распространения конвективного фронта пламени в пористом сжимаемом твердом топливе [9—11]. В рассматриваемую модель введены различные давления в газе и напряжения в конденсированной фазе, определяемые из совместного решения для газобразной и конденсированной фаз. Определяется тип системы уравнений в зависимости от скорости проскальзывания фаз и разности давлений в фазах. Процесс конвективного горения в двухфазных средах с регулярной пористостью описывается уравнениями [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1^0 \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1^0 u_1 \alpha_1}{\partial x} &= I, \\ \frac{\partial \rho_2^0 \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2^0 u_2 \alpha_2}{\partial x} &= -I, \\ \frac{\partial \rho_1^0 \alpha_1 u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1^0 \alpha_1 u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_1 p_1}{\partial x} - p_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} &= -F + I u_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho_2^0 \alpha_2 u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2^0 \alpha_2 u_2^2}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2 p_2}{\partial x} - \bar{p}_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} = F - I u_2, \quad (1) \\
& \frac{\partial \rho_1^0 \alpha_1 \left( \frac{u_1^2}{2} + e_1 \right)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1^0 \alpha_1 u_1 \left( \frac{u_1^2}{2} + e_1 \right)}{\partial x} + \frac{\partial p_1 \alpha_1 u_1}{\partial x} - p_1 u_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \\
& \quad + p_1 \alpha_2 \frac{d_2 \varepsilon_{rr}}{dt} = -F u_2 - Q + I E_2, \\
& \frac{\partial \rho_2^0 \alpha_2 \left( \frac{u_2^2}{2} + e_2 \right)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2^0 \alpha_2 u_2 \left( \frac{u_2^2}{2} + e_2 \right)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_2 p_2 u_2}{\partial x} - p_1 u_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} - \\
& \quad - p_1 \alpha_2 \frac{d_2 \varepsilon_{rr}}{dt} = F u_2 + Q - I E_2, \\
& \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - \alpha_2 \frac{d_2 \varepsilon_{rr}}{dt} = I / \rho_2^0, \\
& \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} = 0,
\end{aligned}$$

где  $E_2 = e_2 + \frac{u_2^2}{2}$ ;  $F$ ,  $Q$  — члены, характеризующие межфазное трение и теплообмен соответственно [9, 10];  $p_i, \rho_i^0, u_i$  — давление, истинная плотность и скорость  $i$ -й фазы;  $\alpha_i$  — среднеобъемная концентрация  $i$ -й фазы;  $e_i$  — внутренняя энергия;  $\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i$  — приведенная плотность.

Дополним систему уравнениями состояния для газа  $p_1 = \rho_1^0 R T_1$  и для твердой фазы в предположении, что локально имеет место плоское деформированное состояние:

$$\bar{\varepsilon}_{rr} = \frac{(1-\nu)(1+\nu)}{E} p_1 - \frac{\nu(1+\nu)}{E} p_2, \quad \varepsilon_{xx} = \frac{(1-\nu)(1+\nu)}{E} p_2 - \frac{\nu(1+\nu)}{E} p_1. \quad (2)$$

Здесь  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно. Обозначим  $a = (1-\nu)(1+\nu)/E$ ,  $b = \nu(1+\nu)/E$ .

С помощью несложных преобразований систему (1) можно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial \rho_1^0 \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1^0 \alpha_1 u_1}{\partial x} = I, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_2^0 \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2^0 \alpha_2 u_2}{\partial x} = -I, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1^0} \frac{\partial p_1}{\partial x} = -\frac{F}{\rho_1} + \frac{I(u_2 - u_1)}{\rho_1}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho_2^0} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \frac{F}{\rho_2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial e_1}{\partial x} + \frac{p_1}{\rho_1^0} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{p_1(u_2 - u_1)}{\rho_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\alpha_2 p_1 d_2 \varepsilon_{rr}}{\rho_1 dt} = -\frac{F(u_2 - u_1)}{\rho_1} -$$

$$-\frac{Q}{\rho_1} + I \frac{(e_2 - e_1)}{\rho_1} + I \frac{\left( \frac{u_2^2}{2} - u_2 u_1 + \frac{u_1^2}{2} \right)}{\rho_1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial e_2}{\partial x} + \frac{p_2}{\rho_2^0} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{p_1 d_2 \varepsilon_{rr}}{\rho_2 dt} = \frac{Q}{\rho_2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - \alpha_2 \frac{d_2 \varepsilon_{rr}}{dt} = \frac{I}{\rho_2^0}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Найдем характеристические направления в плоскости  $x, t$  системы дифференциальных уравнений.

Уравнение (7) для внутренней энергии  $I$ -й фазы с учетом (3) и (9) приводится к виду

$$\frac{d_1 e_1}{dt} - \frac{p_1}{(\rho_1^0)^2} \frac{d_1 \rho_1^0}{dt} = - \frac{F(u_2 - u_1)}{\rho_1} - \frac{Q}{\rho_1} - \frac{I p_1}{\rho_1} \left( \frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_2^0} \right) + \frac{I \left[ (e_2 - e_1) + \frac{(u_2 - u_1)^2}{2} \right]}{\rho_1} \quad (11)$$

или

$$T_1 \frac{d_1 s_1}{dt} = - \frac{F(u_2 - u_1)}{\rho_1} - \frac{Q}{\rho_1} - \frac{I p_1}{\rho_1} \left( \frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_2^0} \right) + \frac{I \left[ (e_2 - e_1) + \frac{(u_2 - u_1)^2}{2} \right]}{\rho_1}.$$

Уравнение энергии для твердой фазы (8), учитывая (10), можно записать:

$$\frac{d_2 e_2}{dt} - \frac{p_1}{\rho_2^0} \frac{d_2 \varepsilon_{rr}}{dt} - \frac{p_2}{\rho_2^0} \frac{d_2 \varepsilon_{xx}}{dt} = \frac{Q}{\rho_2} \quad (12)$$

или

$$T_2 \frac{d_2 s_2}{dt} = \frac{Q}{\rho_2}.$$

Таким образом, уравнения для внутренней энергии каждой фазы дают два характеристических направления, определяемых полями скоростей первой и второй фаз и соответствующих переносу температурных возмущений.

Интегрируя (9), получим с учетом (2) зависимость

$$\alpha_1 = f(p_1, p_2), \quad (13)$$

где  $f(p_1, p_2) = 1 - \alpha_{20} e^{-(ap_1 - bp_2) - J}$ ,  $J = \int_0^t \frac{u_f}{\delta} dt$ ;  $u_f$  — скорость послынного горения;  $\delta$  — толщина свода к-фазы.

Выражение (10) с учетом уравнения неразрывности твердой фазы (4) дает интеграл

$$\rho_2^0 = g(p_1, p_2), \quad (14)$$

$$g(p_1, p_2) = \rho_{20}^0 e^{(p_1 + p_2)(a-b)}.$$

Таким образом, остальные характеристические направления системы являются характеристическими направлениями уравнений (3) — (6). Преобразуем их и запишем относительно функций  $\{p_1, p_2, u_1, u_2\}$ . Для этого введем скорость звука в «чистом» газе  $a_1 = \sqrt{\frac{\partial p_1}{\partial \rho_1^0}}|_{s_1}$  и воспользуемся

формулой состояния газа  $p_1 = \rho_1^0 R T_1$ .

Система (3) — (6) в новых переменных будет иметь следующий вид:

$$\left( \frac{\alpha_1}{a_1^2} + \rho_1^0 \frac{\partial f}{\partial p_1} \right) \frac{d_1 p_1}{dt} + \rho_1^0 \frac{\partial f}{\partial p_2} \frac{d_1 p_2}{dt} + \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = I - \frac{F(u_2 - u_1) + Q}{c_p T_1} - \frac{I p_1}{c_p T_1} \left( \frac{1}{\rho_1^0} - \frac{1}{\rho_2^0} \right) - \frac{I \left[ (e_2 - e_1) + \frac{(u_2 - u_1)^2}{2} \right]}{c_p T_1}, \quad (15)$$

$$\left( \alpha_2 \frac{\partial g}{\partial p_1} - \rho_2^0 \frac{\partial f}{\partial p_1} \right) \frac{d_2 p_1}{dt} + \left( \alpha_2 \frac{\partial g}{\partial p_2} - \rho_2^0 \frac{\partial f}{\partial p_2} \right) \frac{d_2 p_2}{dt} + \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -I, \quad (16)$$

$$\frac{d_1 u_1}{dt} + \frac{1}{\rho_1^0} \frac{\partial p_1}{\partial x} = -\frac{F}{\rho_1} - \frac{I(u_2 - u_1)}{\rho_1}, \quad (17)$$

$$\frac{d_2 u_2}{dt} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \left( \frac{1}{\rho_2^0} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} \frac{\partial f}{\partial p_2} \right) \frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{F}{\rho_2}. \quad (18)$$

Запишем (15)–(18) в матричной форме:

$$Z_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + Z_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} = \vec{g}, \quad \vec{W} = \{p_1, p_2, u_1, u_2\}.$$

Используя стандартную процедуру [12] для нахождения характеристических направлений  $\frac{dx}{dt} = \lambda$  системы (15)–(18), получим, что  $\lambda$  должно быть собственным значением линейного оператора  $Z_1^{-1} Z_2$ , т. е. удовлетворять следующему характеристическому уравнению:

$$A(u_1 - \lambda)^2 (u_2 - \lambda)^2 - B(u_1 - \lambda)^2 - C(u_2 - \lambda)^2 + D = 0, \quad (19)$$

$$A = 1 - \frac{\rho_1^0 \frac{\partial f}{\partial p_2}}{\frac{\alpha_1}{a_1^2} + \rho_1^0 \frac{\partial f}{\partial p_1}} \cdot \frac{\alpha_2 \frac{\partial g}{\partial p_1} - \rho_2^0 \frac{\partial f}{\partial p_1}}{\alpha_2 \frac{\partial g}{\partial p_2} - \rho_2^0 \frac{\partial f}{\partial p_2}},$$

$$B = \frac{\rho_2}{\alpha_2 \frac{\partial g}{\partial p_2} - \rho_2^0 \frac{\partial f}{\partial p_2}} \left\{ \frac{1}{\rho_2^0} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} \frac{\partial f}{\partial p_2} - \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\rho_1^0 \frac{\partial f}{\partial p_2}}{\frac{\alpha_1}{a_1^2} + \rho_1^0 \frac{\partial f}{\partial p_1}} \right\},$$

$$C = \frac{\alpha_1}{\frac{\alpha_1}{a_1^2} + \rho_1^0 \frac{\partial f}{\partial p_1}},$$

$$D = \frac{\alpha_1}{\frac{\alpha_1}{a_1^2} + \rho_1^0 \frac{\partial f}{\partial p_1}} \cdot \frac{\rho_2}{\alpha_2 \frac{\partial g}{\partial p_2} - \rho_2^0 \frac{\partial f}{\partial p_2}} \left\{ \frac{1}{\rho_2^0} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} \frac{\partial f}{\partial p_2} \right\}.$$

Прежде чем приступить к исследованию полученной системы общего вида, рассмотрим несколько частных предельных случаев. В дальнейшем предполагаем, что  $J$  не зависит от напряжений  $p_1, p_2$ .

1. Пусть объемная концентрация газа  $\alpha_1$  зависит только от  $p_1$ , т. е.  $\frac{\partial f}{\partial p_2} = 0$ ,  $\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial p_2} = 0$ , соотношения (2) принимают вид

$$\varepsilon_{rr} = ap_1, \quad \varepsilon_{xx} = ap_2 - bp_1.$$

Тогда уравнение для характеристических направлений преобразуется следующим образом:

$$\left( (u_2 - \lambda)^2 - \frac{1}{a\rho_2^0} \right) \left( (u_1 - \lambda)^2 - \frac{\alpha_1}{\frac{\alpha_1}{a_1^2} + \rho_1^0 \frac{\partial f}{\partial p_1}} \right) = 0, \quad (20)$$

откуда найдем характеристические направления

$$\lambda_{1,2} = u_1 \pm \sqrt{\frac{\alpha_1}{\frac{\alpha_1}{a_1^2} + \rho_1^0 \frac{\partial f}{\partial p_1}}}, \quad (21)$$

$$\lambda_{3,4} = u_2 \pm \sqrt{\frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)\rho_2^0}}. \quad (22)$$

Таким образом, в частном случае  $\alpha_1 = f_1(p_1)$  система (15)–(17) всегда гиперболическая. Из (21), (22) видно, что возмущения будут распространяться по твердой фазе со скоростью предельных волн в тонкой пластине, по газу со скоростью возмущений в так называемой «трубе с эластичными стенками», т. е. в трубе, площадь поперечного сечения которой зависит от давления внутри. Соотношения (21) соответствуют решению, полученному в [13, 14].

2. Пусть  $\alpha_1 = f_2(p_2)$ , т. е. рассмотрим частный случай, когда  $p_2 \gg p_1$ , и можно считать  $\frac{\partial f}{\partial p_1} = 0$ ,  $\frac{\partial \epsilon_{rr}}{\partial p_1} = 0$ . Этот случай соответствует модельным уравнениям состояния к-фазы  $p_2 = \varphi(\alpha_2)$ , используемым в [5, 7, 8, 10]. Тогда для рассматриваемой нами упругой модели  $\epsilon_{xx}$  и  $\epsilon_{rr}$ , а следовательно, и  $\rho_2$  есть функции только  $p_2$ ; например,

$$\epsilon_{rr} = -bp_2, \quad \epsilon_{xx} = ap_2.$$

В этом случае характеристическое уравнение приводится к виду

$$\left( (u_1 - \lambda)^2 - a_1^2 \right) \left( (u_2 - \lambda)^2 - \frac{1}{a} \left\{ \frac{1}{\rho_2^0} - \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\partial f}{\partial p_2} \right\} \right) = 0, \quad (23)$$

откуда нетрудно найти характеристические направления

$$\lambda_{1,2} = u_1 \pm a_1, \quad (24)$$

$$\lambda_{3,4} = u_2 \pm \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_2^0} \left( 1 + \frac{p_2 \nu (1+\nu)}{E} \right)}. \quad (25)$$

Из (24), (25) видно, что слабые возмущения в газе распространяются со скоростью звука  $a_1$ , а слабые возмущения в к-фазе распространяются со скоростью, отличающейся от скорости в пластинах на величину малого параметра, зависящего от  $p_2$ . Возникающая нелинейность вызвана учетом дополнительной зависимости площади сечения к-фазы от напряжения в ней:  $\alpha_2 = f_2(p_2)$ .

3. Пусть  $\alpha_1 \rightarrow 0$ . Ясно, что при малых  $\alpha_1$  величина  $\epsilon_{rr}$  ограничена и, следовательно, существует связь между  $p_1$  и  $p_2$ . В пределе при  $\alpha_1 \rightarrow 0$  поперечная деформация  $\epsilon_{rr} \rightarrow 0$  и  $p_2 = ap_1/b$ ;  $\epsilon_{xx} = (a^2 - b^2)p_2/a$ . Тогда система дифференциальных уравнений (3)–(6) записывается в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{d_1 \rho_1^0}{dt} + \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= I, \\ \rho_1 \frac{d_1 u_1}{dt} + \alpha_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} &= -F + I(u_2 - u_1), \\ \frac{d_2 \rho_2^0}{dt} + \rho_2^0 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= -\frac{I}{\alpha_2}, \\ \frac{d_2 u_2}{dt} + \frac{1}{\rho_2^0} \frac{\partial p_2}{\partial x} &= \frac{F}{\rho_2}. \end{aligned}$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\left( (u_1 - \lambda)^2 - a_1^2 \right) \left( (u_2 - \lambda)^2 - \frac{a}{\rho_2^0 (a^2 - b^2)} \right) = 0, \quad (26)$$

откуда имеем четыре действительных характеристических направления, что указывает на гиперболичность системы дифференциальных уравнений:

$$\lambda_{1,2} = u_1 \pm a_1, \quad (27)$$

$$\lambda_{3,4} = u_2 \pm \sqrt{\frac{a}{\rho_2^0 (a^2 - b^2)}} = u_2 \pm \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho_2^0 (1+\nu)(1-2\nu)}}. \quad (28)$$

Из (28) видно, что при уменьшении объемного содержания газовой фазы слабые возмущения будут распространяться в твердой фазе со скоростью продольных волн в изотропной безграничной линейно-упругой среде.

4. При  $\alpha_2 \rightarrow 0$  деформации и напряжения связаны соотношением (2), а характеристическое уравнение записывается так:

$$\left( (u_1 - \lambda)^2 - a_1^2 \right) \left( (u_2 - \lambda)^2 - \frac{1}{a\rho_2^0} \left( 1 - b(p_1 - p_2) \right) \right) = 0, \quad (29)$$

откуда

$$\lambda_{1,2} = u_1 \pm a_1, \quad (30)$$

$$\lambda_{3,4} = u_2 \pm \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_2^0} \left( 1 - \frac{\nu(1+\nu)}{E} (p_1 - p_2) \right)}. \quad (31)$$

Таким образом, получено, что при уменьшении объемного содержания к-фазы по сравнению с газовой фазой при фиксированной общей площади трубы слабые возмущения по газу будут распространяться со скоростью звука в газе  $a_1$  (30), а по конденсированной фазе — со скоростью, близкой к скорости продольной волны в тонкой пластине. В задачах конвективного горения при разности давлений в фазах до 1000 атм второй член подкоренного выражения в формуле (31) на два порядка меньше первого (менее 1 %).

Перейдем к исследованию системы (15) — (18) в общем виде, когда  $\alpha_1 = f(p_1, p_2)$  (13), а связь напряжений и деформаций задается соотношением (2). Для определения корней (19) введем обозначения:  $u_1 - \lambda = X$ ,  $u_2 - \lambda = Y$ ,  $u_2 - u_1 = \Delta u = Y - X$ . Для каждого значения относительной скорости проскальзывания фаз решения (19) могут быть представлены как решения системы

$$Y = X + \Delta u, \quad Y = \pm \sqrt{\frac{BX^2 - D}{AX^2 - C}}. \quad (32)$$

Действительные решения в плоскости  $(X, Y)$  соответствуют точкам пересечения прямой  $Y = X + \Delta u$  с кривой четвертого порядка, задаваемой первым уравнением системы (32). Преобразуя подкоренное выражение к более удобному для исследования виду, получим

$$Y = \pm \sqrt{\frac{BX^2 - D}{AX^2 - C}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{a} \left[ X^2 \left\{ \frac{\alpha_1}{a_1^2} + \frac{\rho_1^0 \frac{\partial f}{\partial p_1}}{\rho_2^0} \right\} \left( \frac{1}{\rho_2^0} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} \frac{\partial f}{\partial p_2} \right) - \alpha_1 \right] \times \left( \frac{1}{\rho_2^0} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} \frac{\partial f}{\partial p_2} \right)}{X^2 \left\{ \frac{\alpha_1}{a_1^2} + \rho_1^0 \left( \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{b}{a} \frac{\partial f}{\partial p_2} \right) \right\} - \alpha_1}} \quad (33)$$

Введем новые обозначения

$$\frac{\alpha_1}{a_1^2} = a_0, \quad \frac{\rho_1^0 \frac{\partial f}{\partial p_1}}{\rho_2^0} = a', \quad \frac{1}{\rho_2^0} + \frac{p_1 - p_2}{\rho_2} \frac{\partial f}{\partial p_2} = c,$$

$$\alpha_1 = b', \quad \rho_1^0 \left( \frac{\partial f}{\partial p_1} + \frac{b}{a} \frac{\partial f}{\partial p_2} \right) = a''$$

и запишем (33) в виде

$$Y = \pm \sqrt{\frac{1}{a} \frac{\left( X^2 \left( a_0 + \frac{a'}{c} \right) - b' \right) c}{X^2 (a_0 + a'') - b'}} \quad (34)$$

причем  $a_0, b', a', a''$  — положительные коэффициенты, если  $-1 < \nu < 0,5$ , а  $c$  — знакпеременный. Имеем два случая:  $1 - c < 0$  или  $\Delta p < -1/b$  и

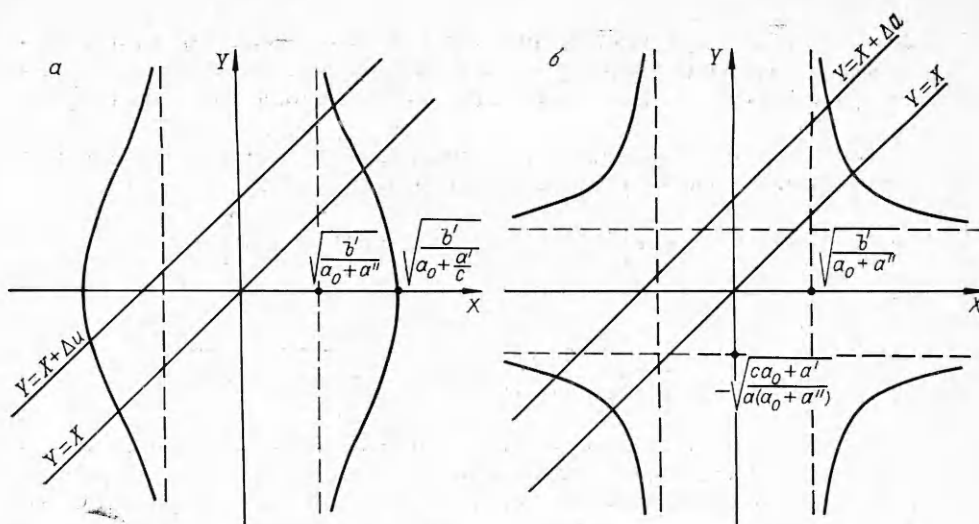


Рис. 1.

$2 - c > 0$  или  $\Delta p > -1/b$ . Для существования решения характеристического уравнения необходимо, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным, т. е. числитель и знаменатель были одного знака.

Рассмотрим случай 1. Если

$$a_0 + \frac{a'}{c} > 0, \text{ т. е. } \Delta p < -\frac{1}{b} - \frac{\rho_1^0 a \alpha_2}{b \frac{c_1}{a_1^2}}, \quad (35)$$

то график кривой (34) имеет вид, изображенный на рис. 1, а. При любом значении скорости проскальзывания фаз  $\Delta u$  прямая  $Y = X + \Delta u$  имеет с кривой (34) два пересечения, т. е. характеристическое уравнение имеет два корня. Таким образом, исходная система дифференциальных уравнений при рассматриваемых перепадах давления  $\Delta p$  (35) не является гиперболической. Если  $a_0 + \frac{a'}{c} < 0$ , т. е.

$$-\frac{1}{b} - \frac{\rho_1^0 a \alpha_2 a_1^2}{b \alpha_1} < \Delta p < -\frac{1}{b}, \quad (36)$$

тогда график кривой (34) имеет вид, изображенный на рис. 1, б. При больших значениях  $\Delta u$  и выполнении (36) система дифференциальных уравнений становится гиперболической. Но величина  $|\Delta u|$  должна быть

больше  $\sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{1}{a} \left( \frac{1}{\rho_2^0} + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2^0} b \right)}$ , т. е. больше скорости звука в

твердой фазе, что в реальных задачах неосуществимо. Таким образом, для реальных значений  $\Delta u$  и здесь система не гиперболическая.

При  $\Delta p = -1/b$  кривая на рис. 1, б дополняется точкой  $X = 0, Y = 0$ , и в случае односкоростной модели ( $\Delta u = 0$ ) характеристическое уравнение имеет четыре действительных корня, два из которых кратные. При  $\Delta p > -\frac{1}{b}, \frac{a'}{c} > a''$ , т. е.

$$-\frac{1}{b} < \Delta p < -\frac{1}{b} + \frac{a^2}{(a^2 - b^2)b}, \quad (37)$$

графическое изображение характеристической кривой (34) соответствует приведенному на рис. 2, а. Точка в начале координат по мере увеличения  $\Delta p$  превращается в разрастающийся овал. Видно, что при ре-

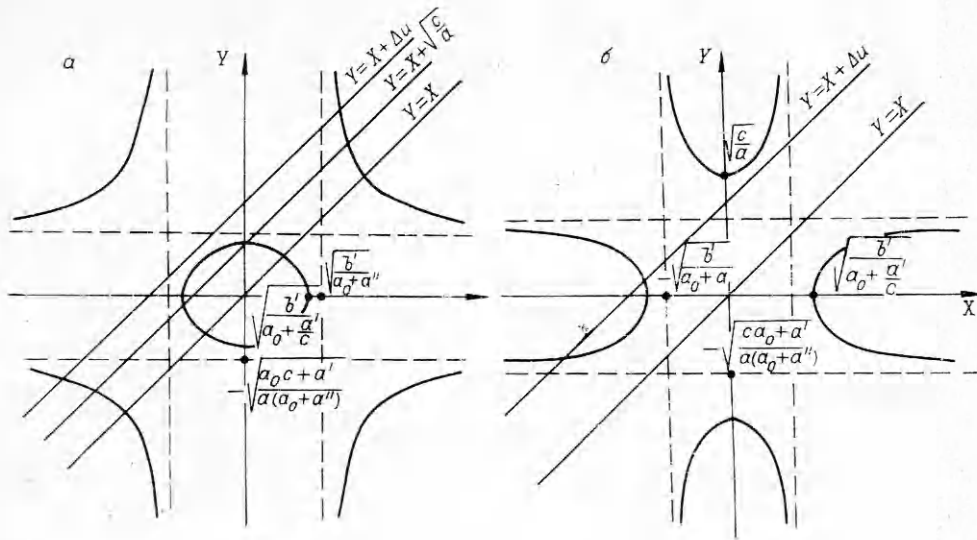


Рис. 2.

альных значениях разности скоростей фаз, меньших скорости звука в конденсированной фазе

$$|\Delta u| \leq \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{E}{\rho_2^0 (1-v^2)} \left[ 1 + \frac{\Delta p v (1+v)}{E} \right]},$$

система (32) имеет четыре различных решения, что говорит о гиперболичности исходной системы дифференциальных уравнений в рассматриваемом диапазоне изменения  $\Delta p$ . Неравенство (37), выражающее условие гиперболичности системы для реальных скоростей проскальзывания, может быть записано в виде

$$-\frac{E}{v(1+v)} < \Delta p < \frac{vE}{(1+v)(1-2v)}. \quad (38)$$

Далее, когда  $a'/c < a''$ , т. е. при

$$\Delta p > -\frac{1}{b} + \frac{a^2}{(a^2 - b^2)b^2} \quad \left( \Delta p > \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \right), \quad (39)$$

график характеристической кривой принимает вид, изображенный на рис. 2, б.

При этом с увеличением разности давлений в фазах  $\Delta p$  кривые на рис. 2, б все больше удаляются от асимптот, так что для небольшой (реальной) разницы скоростей фаз система (15)–(18) опять становится негиперболичной. Для достаточно больших значений скорости проскальзывания сохраняются четыре точки пересечения кривой (34) с прямой  $Y - X + \Delta u$ , т. е. система остается гиперболичной.

В случае  $\Delta p = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} \left( \frac{a'}{c} = a'' \right)$  кривые на рис. 2, б превращаются в две пары прямых, совпадающих с асимптотами. Характеристическое уравнение при этом для любых значений  $|\Delta u|$  имеет четыре действительных корня. Следует отметить, что полученные области гиперболичности системы зависят от значений определяющих параметров задачи, т. е. от получаемого решения. Поэтому в процессе решения при изменении характеристик потока вид кривых на рис. 1, 2 изменяется.

Таким образом, в работе исследованы малые возмущения в многофазных пористых средах с химическими реакциями. Определен тип основной системы уравнений в зависимости от значений определяющих параметров. Установлены области изменений определяющих параметров, при которых система остается гиперболической.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ.— 1956.— 20, № 2.— С. 184.
2. Клейман Я. З. О методе характеристик в теории движения многокомпонентной среды // Там же.— 1959.— 23, № 2.— С. 391.
3. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // Там же.— 1965.— 29, № 3.— С. 418.
4. Клебанов Л. А., Крошилин А. Е., Нигматулин Б. И. и др. О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши применительно к системе дифференциальных уравнений двухскоростного движения двухфазных сред // Там же.— 1982.— 46, № 1.— С. 83.
5. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред.— М.: Наука, 1987.
6. Казаков Ю. В., Федоров А. В., Фомин В. М. Исследование структур изотермических ударных волн и расчет разлета облака газозвеси.— Новосибирск, 1986.— (Препр./АН СССР. Сиб. отд-ние. ИТПМ; № 8).
7. Ермолаев Б. С., Посвянский В. С. О моделировании конвективного горения уравнениями механики двухфазных реагирующих сред // Химическая физика процессов горения и взрыва. Горение конденсированных систем.— Черноголовка, 1980.
8. Ермолаев Б. С., Новожилов Б. В., Посвянский В. С. и др. Результаты численного моделирования конвективного горения порошкообразных взрывчатых систем при возрастающем давлении // ФГВ.— 1985.— 21, № 5.— С. 3.
9. Смирнов Н. Н. Распространение конвективного горения в двухфазных системах с продольной пористостью и переход в режим недосжатой детонации // Там же.— 1987.— 23, № 3.— С. 58.
10. Вилюнов В. Н., Ищенко А. Н., Хоменко Ю. П. О детерминированной модели конвективного горения пористых систем // Там же.— 1988.— 24, № 5.— С. 40.
11. Khasainov V. A., Attetkov A. V., Borisov A. A. et al. Critical conditions for hot spot evolution in porous explosives // Dynamics of Explosions: AIAA Progr. Astron. Aeron.— Washington, 1988.— Vol. 114.— P. 303.
12. Зверев И. Н., Смирнов Н. Н. Газодинамика горения.— М.: Изд-во МГУ, 1987.
13. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах.— М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
14. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях.— М.: Мир, 1981.

г. Москва

Поступила в редакцию 15/XI 1989,  
после доработки — 10/V 1990

УДК 534.222

Н. Н. Смирнов

### НЕСТАЦИОНАРНОЕ ГЕТЕРОГЕННОЕ ГОРЕНИЕ ТОПЛИВА

Построено автомодельное решение нестационарной одномерной задачи диффузионного горения поверхности топлива в чисто гетерогенном режиме, позволяющее определить скорость выгорания поверхности, распределение температуры в газе и топливе, распределения концентраций в газе и исследовать зависимость полученных характеристик от внешних определяющих параметров.

Нестационарное газофазное горение исследовалось в [1—5]. В данной работе анализируются закономерности чисто гетерогенного режима диффузионного горения на примере нестационарной одномерной плоской задачи.

Будем рассматривать задачу в системе координат, связанной с поверхностью раздела фаз. Введем координаты  $x$  и  $\tilde{x}$ , ориентированные в противоположные от поверхности раздела стороны:  $x$  — для газообразной, а  $\tilde{x}$  — для ж-фазы. Влиянием внешних массовых сил, включая силы инерции, пренебрежем; плотность  $\rho_f$ , удельную теплоемкость  $c_f$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda_f$  для ж-фазы положим постоянными. В этой системе координат горючее по мере выгорания подается к поверхности раздела с неизвестной скоростью  $v_f(t)$ .

Для рассматриваемой задачи, когда реакции в газовой фазе отсутствуют, система уравнений одномерного плоского нестационарного тече-