

Из соображений анализа размерностей

$$\tau = \beta T_1^2 / \kappa Q^2 \text{ при } t_1 \ll \tau \quad (3.10)$$

где β — некоторый постоянный множитель.

Используя формулы (2.4) и (3.10), выражение (3.8) можно привести к виду

$$\beta \kappa / \nu d \ll 1 \quad (3.11)$$

Как видно, условие квазистационарности (3.11) вытекает из основного предположения (1.1)

Поступила 25 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Изд. «Мир», 1964.
2. Черепанов Г. П. О развитии трещин в сжатых телах. ПММ, 1966. т. 30, вып. 1.
3. J m a i J. On the heat transfer to constant-property laminar boundary layer with power function freestream velocity and wall temperature distributions, Quart. Appl. Math., 1958, vol. 16.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

Т. Д. Шермергор (Москва)

Рассматриваются наследственные свойства среды, сдвиговые деформации которой описываются модифицированными моделями Фойгта, Максвелла и стандартного линейного тела, в которых операторы дифференцирования заменены операторами дробного дифференцирования. Обсуждается возможность использования такого описания применительно к различным материалам.

Простейшие реологические модели — Фойгта, Максвелла и стандартного линейного тела — широко используются для качественного описания наследственных свойств различных сред в линейной области. Обладая простотой и наглядностью, эти модели имеют существенный недостаток — они не учитывают размытия релаксационного спектра, которое обычно имеет место для реальных материалов. Учет имеющегося у материала релаксационного спектра может быть проведен в рамках простейших реологических моделей, если несколько модифицировать вязкий элемент, входящий в реологическую схему. Для этого достаточно ньютоновский закон вязкости

$$s_{ik} = 2\mu D e_{ik} \quad \left(D \equiv \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (1)$$

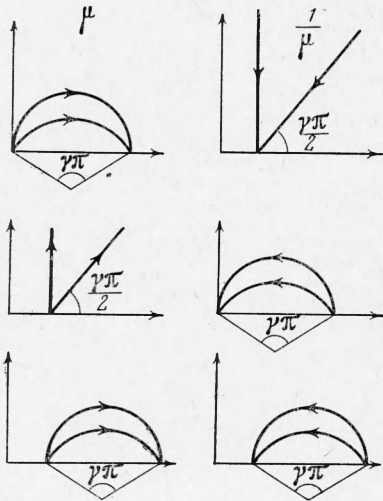
модифицировать, сделав замену $D \rightarrow D^\gamma$. Здесь s_{ik} и e_{ik} — девиаторы тензоров напряжений и деформаций соответственно, μ — модуль сдвига, τ — время релаксации.

Ограничиваясь сдвиговыми деформациями, запишем закон Гука для вязко-упругого тела в виде

$$s_{ik} = 2\mu(t) * e_{ik}, \quad S_{ik} = 2M E_{ik} \quad (2)$$

Здесь символ * означает свертку на отрезке $(0, t)$, а через S_{ik} обозначена трансформанта одностороннего преобразования Лапласа функции s_{ik} и аналогично для других функций. Замена операторов D операторами дробного дифференцирования означает переход в пространстве изображений от сомножителей $p\tau$ к $(p\tau)^\gamma$, где $0 < \gamma \leq 1$. Имея это в виду, запишем соответственно для модифицированных моделей Фойгта, Максвелла и стандартного линейного тела следующие выражения для модулей упругости $M(p)$:

$$M = \mu_0 [1 + (p\tau_\sigma)^\gamma], \quad M = \frac{\mu_\infty}{1 + (p\tau_\epsilon)^{-\gamma}}, \quad M = \mu_0 \frac{1 + (p\tau_\sigma)^\gamma}{1 + (p\tau_\epsilon)^\gamma} \quad (3)$$



Фиг. 1.

Разлагая дроби для M и $1/M$ в ряд по параметру $(p\tau)^{-\gamma}$ и учитывая, что изображению

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (p\tau)^{-\gamma(n+1)} \quad (4)$$

соответствует оригинал

$$\frac{1}{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau)^{\gamma(n+1)-1}}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \equiv \mathcal{E}_{\gamma}(t, \tau) \quad (5)$$

получим:

для модели Фойгта

$$\mu(t) = \mu_0 [\delta(t) + \tau_{\sigma}^{\gamma} \delta^{(\gamma)}(t)], \quad \frac{1}{\mu(t)} = \frac{1}{\mu_0} \mathcal{E}_{\gamma}(t, \tau_{\sigma})$$

для модели Максвелла

$$\mu(t) = \mu_{\infty} [\delta(t) - \mathcal{E}_{\gamma}(t, \tau_{\varepsilon})], \quad \frac{1}{\mu(t)} = \frac{1}{\mu_{\infty}} \left[\delta(t) + \frac{(t/\tau_{\varepsilon})^{\gamma-1}}{\tau_{\varepsilon} \Gamma(\gamma)} \right]$$

для модели стандартного линейного тела

$$\mu(t) = \mu_{\infty} \delta(t) - (\mu_{\infty} - \mu_0) \mathcal{E}_{\gamma}(t, \tau_{\varepsilon})$$

$$\frac{1}{\mu(t)} = \frac{1}{\mu_{\infty}} \delta(t) + \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_{\infty}} \right) \mathcal{E}_{\gamma}(t, \tau_{\varepsilon}) \quad (6)$$

Здесь $\mathcal{E}_{\gamma}(t, \tau)$ — дробно-экспоненциальная функция Ю. Н. Работнова [1], $\delta(t)$ — δ -функция Дирака, $\delta^{(\gamma)}(t)$ — ее производная степени γ . В выражениях (6) использовано соотношение $\mu_{\infty}/\mu_0 = (\tau_{\sigma}/\tau_{\varepsilon})^{\gamma}$. Операторы Ю. Н. Работнова применяются при решении ряда наследственных задач вязко-упругих тел [2, 3]. Однако для описания релаксации напряжений в рамках модифицированной модели Фойгта могут быть использованы более простые операторы. То же относится и к ползучести, рассчитываемой по модифицированной модели Максвелла.

Из соотношений (3) или (6) легко находятся выражения, описывающие реакцию системы на мгновенно созданную деформацию $\dot{e}_{ik} = e_{ik} \circ \delta(t)$ (релаксация напряжений) и мгновенно приложенное напряжение $s_{ik} = s_{ik} \circ \delta(t)$ (ползучесть)

для модели Фойгта

$$s_{ik} = 2\mu_0 e_{ik} \left[1 + \frac{(t/\tau_{\sigma})^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)} \right], \quad e_{ik} = \frac{1}{2\mu_0} s_{ik} \Phi_{\gamma} \left(\frac{t}{\tau_{\sigma}} \right)$$

для модели Максвелла

$$s_{ik} = 2\mu_{\infty} e_{ik} \left[1 - \Phi_{\gamma} \left(\frac{t}{\tau_{\varepsilon}} \right) \right], \quad e_{ik} = \frac{1}{2\mu_{\infty}} s_{ik} \left[1 + \frac{(t/\tau_{\varepsilon})^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \right]$$

для модели стандартного линейного тела

$$s_{ik} = 2e_{ik} \left[\mu_{\infty} - (\mu_{\infty} - \mu_0) \Phi_{\gamma} \left(\frac{t}{\tau_{\varepsilon}} \right) \right], \quad e_{ik} = \frac{1}{2} s_{ik} \left[\frac{1}{\mu_{\infty}} + \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_{\infty}} \right) \Phi_{\gamma} \left(\frac{t}{\tau_{\sigma}} \right) \right]$$

$$\Phi_{\gamma} \left(\frac{t}{\tau} \right) \equiv \mathcal{E}_{\gamma}(t, \tau) * 1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t/\tau)^{\gamma(n+1)}}{\Gamma[\gamma(n+1)+1]} \quad (8)$$

При $\gamma = 1$ дробно-экспоненциальная функция Ю. Н. Работнова вырождается в экспоненту $\mathcal{E}_1(t, \tau) = \tau^{-1} e^{-t/\tau}$, а $\Phi_1(t/\tau) = 1 - e^{-t/\tau}$ и соответствующие уравне-

ния описывают экспоненциальное изменение функций. Ползучесть максвелловской среды при $\gamma = 1$ будет линейной по времени

$$e_{ik} = \frac{1}{2\mu_\infty} s_{ik} \left[1 + \frac{t}{\tau_\varepsilon} \right] \quad (9)$$

Для модели Фойгта при $\gamma = 1$ релаксация напряжений будет отсутствовать, как следует из соотношения

$$s_{ik} = 2\mu_0 [e_{ik} + e_{ik} \circ \tau_\sigma \delta(t)] \quad (10)$$

Здесь использовано представление δ -функции

$$\delta(t) = \lim_{\gamma \rightarrow 1} [t^\gamma \Gamma(1 - \gamma)]^{-1} \quad (11)$$

В случае одноосных деформаций растяжения или сжатия, принимая, что ядра операторов модуля сдвига описываются формулами (6), а объемные деформации не релаксируют и описываются постоянным модулем всестороннего сжатия K , получим следующие выражения для ядер интегральных операторов модулей Юнга:

для модели Фойгта

$$E(t) = E_\infty \delta(t) - (E_\infty - E_0) \mathcal{E}_\gamma(t, \tau_\varepsilon), \quad (\tau_\varepsilon < \tau_\sigma) \quad (12)$$

$$\frac{1}{E(t)} = \frac{1}{E_\infty} \delta(t) + \left(\frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_\infty} \right) \mathcal{E}_\gamma^*(t, \tau_\sigma)$$

$$E_\infty = 9K, \quad E_0 = 9K\mu_0 [3K + \mu_0]^{-1}, \quad (\tau_\varepsilon / \tau_\sigma)^\gamma = E_0 / E_\infty$$

для модели Максвелла

$$E(t) = E_\infty [\delta(t) - \mathcal{E}_\gamma(t, \tau_\sigma)], \quad (E_\infty < 3\mu_\infty, \quad \tau_\varepsilon < \tau_\sigma)$$

$$\frac{1}{E(t)} = \frac{1}{E_\infty} \left[\delta(t) + \frac{1}{\tau_\sigma \Gamma(\gamma)} (t / \tau_\sigma)^{\gamma-1} \right]$$

$$E_\infty = 9K\mu_\infty [3K + \mu_\infty]^{-1}, \quad (\tau_\varepsilon / \tau_\sigma)^\gamma = E_\infty / 3\mu_\infty$$

для модели стандартного линейного тела

$$E(t) = E_\infty \delta(t) - (E_\infty - E_0) \mathcal{E}_\gamma(t, \tau), \quad (E_\infty > E_0, \quad \tau_\varepsilon < \tau < \tau_\sigma)$$

$$\frac{1}{E(t)} = \frac{1}{E_\infty} \delta(t) + \left(\frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_\infty} \right) \mathcal{E}_\gamma(t, \tau_\sigma)$$

$$E_\infty = \frac{9K\mu_\infty}{3K + \mu_\infty}, \quad E_0 = \frac{9K\mu_0}{3K + \mu_0}, \quad \left(\frac{\tau}{\tau_\sigma} \right)^\gamma = \frac{E_0}{E_\infty}, \quad \left(\frac{\tau}{\tau_\varepsilon} \right)^\gamma = \frac{E_0\mu_\infty}{E_\infty\mu_0}$$

Здесь E_∞ и E_0 — нерелаксированное и релаксированное значения модуля Юнга.

Из сопоставления выражений (6) и (12) видно, что если сдвиговые деформации описываются \mathcal{E} -операторами, то и одноосные деформации растяжения или сжатия также описываются \mathcal{E} -операторами. При этом для модели Максвелла происходит замена τ_ε на τ_σ , а для стандартного линейного тела замена $\tau_\varepsilon \rightarrow \tau$ имеет место лишь для прямого оператора E^* , тогда как обратный оператор $1/E^*$ характеризуется по-прежнему временем релаксации τ_σ . Отметим, что для модели Фойгта теперь \mathcal{E} -оператором описываются как прямой, так и обратный операторы модуля Юнга. Лишь оператор $1/E^*$ для модели Максвелла по-прежнему выражается через оператор дробного дифференцирования.

Рассмотрим еще динамические характеристики рассматриваемых моделей при сдвиговых гармонических деформациях. Они могут быть получены заменой $p \rightarrow i\omega$ в выражениях (3). Проводя такую замену и разделяя действительные и мнимые части комплексных модулей упругости и податливости, получим параметрическую запись уравнений, связывающих действительные и мнимые части функций. Соответствующие графики для всех моделей представлены на фигуре (а — Фойгт, б — Максвелл, в — стандартное линейное тело). Стрелками на диаграммах указаны направления роста параметра $\omega\tau$. Из фигуры вытекает, что дробно-экспоненциальным ядрам соответствуют дуги окружности с центральным углом $\pi\gamma$, тогда как дробным производным соответствуют прямые, наклоненные к действительной оси под углом $1/2\pi\gamma$.

Несмотря на то что во всех трех моделях наследственные свойства материала могут быть описаны \mathcal{E} -функцией (в первом случае для ползучести, во втором — для релакса-

ции напряжений, а в последнем — в обоих случаях) область применимости моделей существенно различна.

Наиболее общей является модель стандартного линейного тела, характеризуемая конечными значениями релаксированного и нерелаксированного модулей упругости и податливости. В случае модели Фойгта $\mu_{\infty} \rightarrow \infty$, тогда как для модели Максвелла $\mu_0^{-1} \rightarrow \infty$. По-видимому, нельзя указать материалы, которые обладают неограниченным ростом упругого модуля с увеличением частоты. Поэтому модифицированную модель Фойгта можно принять лишь как грубое приближение для оценки низкочастотной асимптотики некоторых материалов.

Модифицированная модель Максвелла предполагает наличие текучести материала. Обычная модель Максвелла используется для качественного описания фона внутреннего трения металлов [4,5] и релаксации линейных полимеров в области перехода из высокоэластичного в вязко-текучее состояние [6]. Недостатком обычной модели Максвелла является то, что она характеризуется одним временем релаксации, тогда как реальные твердые тела имеют широкий релаксационный спектр. Поэтому, если наличие релаксационного спектра в рассматриваемой области существенно, его можно приближенно учесть модифицированной моделью Максвелла. Такой подход был использован для описания дислокационного фона внутреннего трения металлов [7,8]. По-видимому, этот метод может быть применен и к описанию упруго-вязкого поведения некоторых полимеров. Так, вытекающая из соотношения (3) частотная зависимость динамической вязкости $\text{Re } \eta(\omega) \sim \omega^{-1-\gamma}$ имеет место для сильно закристаллизованного линейного полиэтилена с плотностью 0.965 г/см^3 в области изменения вязкости от 10^{12} до 10^{-2} пуаз [9].

Модифицированная модель стандартного линейного тела может быть использована для описания релаксационных явлений в полимерах в области стеклообразного состояния, когда релаксация обусловлена переориентировкой во внешнем силовом поле боковых звеньев молекул или более мелких кинетических единиц. Соответствующие максимумы тангенса угла механических потерь $\text{tg } \psi$ хорошо выражены и в функции логарифма частоты обычно имеют симметричный колоколообразный вид. Следует, однако, иметь в виду, что им сопутствует довольно высокий уровень фона $\text{tg } \psi \sim 10^{-3}$, почти не зависящего от частоты [9].

Наиболее интересная, с точки зрения наследственных явлений, область главной или α -релаксации полимеров, связанная с конформационным движением основной цепи молекулы, характеризуется сравнительно широким релаксационным спектром. Однако функция распределения логарифмов времен релаксаций в этой области существенно асимметрична — она близка к прямой линии с наклоном $-1/2$. Поскольку после достижения максимума при дальнейшем уменьшении τ функция распределения не имеет тенденции к уменьшению до уровня, характеризуемого большими τ , ее аппроксимация симметричной функцией распределения, которую имеет \mathcal{E} -функция памяти [10], может оказаться недостаточной. Поэтому описание наследственных свойств полимеров в этой области при помощи дробно-экспоненциальных функций во многих случаях может давать лишь качественно правильные реологические зависимости.

Для металлов, у которых релаксационные пики, соответствующие различным механизмам, хорошо разделены, использование модифицированной модели стандартного линейного тела будет ограничиваться лишь требованием линейности системы.

Поступила 18 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
2. Розовский М. И. Некоторые задачи теории неустановившейся ползучести. Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1961, т. 14, № 3.
3. Розовский М. И., Круш И. И. Вынужденные колебания упруго-наследственных систем. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 1.
4. Шермергор Т. Д., Мешков С. И. К описанию фона внутреннего трения при крутильных колебаниях. Физ. металлов и металловедение, 1962, т. 13, № 6.
5. Мешков С. И., Шермергор Т. Д. О температурной зависимости внутреннего трения крутильного маятника. ПМТФ, 1962, № 6.
6. Каргин В. А., Слонимский Г. Л. Краткие очерки по физико-химии полимеров. Изд. МГУ, 1960.
7. Schoeck G., Bisogni E., Shyne J., The activation Energy of High Temperature Internal Friction. Acta Metallurgica, 1964, vol. 12.
8. Мешков С. И., Пачевская Г. Н., Шермергор Т. Д. К описанию внутреннего трения с помощью дробно-экспоненциальных ядер. ПМТФ, 1966, № 3.
9. Ферри Дж. Вязко-упругие свойства полимеров. Изд. иностр. лит., 1963.
10. Шермергор Т. Д. Расчет функции распределения констант релаксаций по дисперсии действительной части комплексной упругости для упруго-вязких тел. Изв. высш. учебн. завед., Физика, 1961, № 1.