

УДК 519.632

Разностная схема для сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности в полярных координатах*

С.Б. Сорокин^{1,2}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090
E-mail: sorokin@sscc.ru

Сорокин С.Б. Разностная схема для сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности в полярных координатах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 3. — С. 297–312.

В полярных координатах построен дискретный аналог сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности, сохраняющий структуру исходной модели. Разностная схема сходится со вторым порядком точности для случаев разрывных параметров среды в законе Фурье и неравномерных сеток. Предложен экономичный алгоритм решения дискретной сопряженно-операторной модели в случае, когда тензор теплопроводности является единичным оператором.

DOI: 10.15372/SJNM20170306

Ключевые слова: задача теплопроводности, математическая модель, дискретный аналог, полярные координаты, сходимость, разностная схема.

Sorokin S.B. A difference scheme for a conjugate-operator model of the heat conduction problem in the polar coordinates // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 3. — P. 297–312.

In the polar coordinates, a discrete analog of the conjugate-operator model of the heat conduction problem preserves the structure of the original model. The difference scheme converges with the second order of accuracy for the cases of discontinuous parameters of the medium in the Fourier law and irregular grids. An efficient algorithm for solving the discrete conjugate-operator model in the case when the thermal conductivity tensor is a single operator.

Keywords: problem of heat conductivity, mathematical model, discrete analog, polar coordinates, convergence, difference scheme.

Введение

При численной реализации математических моделей для описания геометрии тел специальной формы часто используют криволинейные системы координат. Главное преимущество такого подхода состоит в том, что в надлежащем образом выбранной системе координат исходному телу соответствует параллелепипед. Следствием этого является возможность просто строить регулярные прямоугольные сетки.

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы Фундаментальных исследований ОМН РАН “Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач”, программы Фундаментальных исследований Президиума РАН “Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация”.

За упрощение описания области приходится платить усложнением записи действия в криволинейных координатах, присутствующих в модели дифференциальных операторов.

Как правило, при численной реализации модели задачи теплопроводности

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^* \mathbf{w} &\equiv \operatorname{div} \mathbf{w} = f, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{K} \mathbf{q}, \\ \mathbf{q} &= \mathbf{R} u \equiv -\operatorname{grad} u \end{aligned} \quad (1)$$

в криволинейной системе координат исходят из записи ее в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{w} &\equiv \frac{\partial w^1}{\partial x_1} + \frac{\partial w^2}{\partial x_2} + \frac{\partial w^3}{\partial x_3} = f, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{K} \mathbf{q}, \\ \mathbf{q} = -\operatorname{grad} u &\equiv - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Далее, в декартовой же системе координат, исключают неизвестные \mathbf{w}, \mathbf{q} и получают уравнение для температуры u (постановка “в температурах”):

$$-\sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(K_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) = f.$$

После этого производят в нем замену переменных.

Так в цилиндрической системе координат предыдущему уравнению соответствует уравнение

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\bar{k}_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{12}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \bar{k}_{13} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\bar{k}_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{22}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \bar{k}_{23} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}_{31} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\bar{k}_{32}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \bar{k}_{33} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f, \end{aligned} \quad (2)$$

где коэффициенты $\bar{k}_{\alpha\beta}$ выражаются через $K_{\alpha\beta}$.

Аппроксимация столь сложного дифференциального оператора на неравномерной сетке с сохранением свойств, присущих исходному дифференциальному оператору (симметричность и положительная определенность), представляет определенные трудности.

Еще одно обстоятельство, возникающее когда расчетная область, в которой требуется решить (2), является круговым цилиндром, состоит в следующем. В этом случае на его оси $r = 0$ необходимо ставить дополнительное условие для выделения ограниченного решения. В результате аппроксимация оператора в окрестности $r = 0$ требует специального рассмотрения [1–3]. Отметим здесь, что метод сумматорных тождеств, применяющийся в [2, 3], идейно близок к методу опорных операторов, используемому в проведенном исследовании.

В настоящей работе в полярной системе координат строится дискретный аналог *исходной* сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности (1).

В качестве расчетной области выбирается круг или кольцо, являющиеся прямоугольниками в полярной системе координат.

Построение осуществляется для двумерного случая лишь в целях компактности изложения. Обобщение на трехмерный случай (цилиндрическая система координат) не представляет труда.

Аппроксимация (1) производится методом опорных операторов [4–11] (в англоязычной литературе — Mimetic finite difference methods [12, 13]):

- в качестве опорного выбирается оператор \mathbf{R} ;
- строится его аппроксимация \mathbf{R}_h ;
- аппроксимация \mathbf{R}_h^* сопряженного оператора \mathbf{R}^* строится как оператор, сопряженный к построенному в предыдущем пункте: $\mathbf{R}_h^* = (\mathbf{R}_h)^*$;
- производится аппроксимация $\mathbf{w}_h = \mathbf{K}_h \mathbf{q}_h$ второго из уравнений (1): $\mathbf{w} = \mathbf{K} \mathbf{q}$.

В результате для сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности (1) получаем дискретный аналог, сохраняющий ее структуру:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h^* \mathbf{w}_h &= f_h, \\ \mathbf{w}_h &= \mathbf{K}_h \mathbf{q}_h, \\ \mathbf{q}_h &= \mathbf{R}_h u_h. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3), в частности, легко получаем постановку “в температурах” на дискретном уровне — аппроксимацию (2):

$$\mathbf{R}_h^* \mathbf{K}_h \mathbf{R}_h u_h = f_h,$$

в которой оператор $\mathbf{R}_h^* \mathbf{K}_h \mathbf{R}_h$, очевидно, симметричен и, по крайней мере, положительно полуопределен.

Выбор в качестве опорного оператора \mathbf{R} обусловлен двумя причинами.

Во-первых, тем, что в любой криволинейной системе координат y_1, y_2, y_3 его действие на скалярную функцию записывается в виде разложения по кобазису (взаимному базису) \mathbf{e}^i , $i = 1, 2, 3$, с помощью частных производных:

$$\mathbf{R}u = -\text{grad } u \equiv - \left[\frac{\partial u}{\partial y_1} \mathbf{e}^1 + \frac{\partial u}{\partial y_2} \mathbf{e}^2 + \frac{\partial u}{\partial y_3} \mathbf{e}^3 \right],$$

и построение его аппроксимации \mathbf{R}_h на прямоугольной сетке не представляет труда.

В работе ковариантные компоненты $\mathbf{R}u$ аппроксимируются (со вторым порядком точности) в центре каждой прямоугольной ячейки неравномерной сетки посредством суммы центральных разностей по соответствующему координатному направлению.

Тем самым все компоненты дискретного аналога векторной величины $\mathbf{q} = \mathbf{R}u$ задаются в одних и тех же узлах сетки. Это позволяет корректно определить действие дискретного аналога тензора теплопроводности на дискретный аналог градиента температуры и, по сути дела, наряду со способом аппроксимации градиента определяет второй порядок сходимости схемы. На неравномерной сетке для переменных (в том числе и разрывных) параметров среды со вторым порядком сходятся не только скалярные сеточные функции (приближения к температуре), но и сеточные вектор-функции (приближения к потоку тепла).

Во-вторых, это позволяет избежать непосредственной аппроксимации операции ковариантного дифференцирования (∇_i) контравариантных компонент w^α вектора потока тепла [14, 15], содержащихся в операторе дивергенции вектора:

$$\mathbf{R}^* \mathbf{w} = \text{div } \mathbf{w} = \nabla_1 w^1 + \nabla_2 w^2.$$

Итак, в работе на основе метода опорных операторов в полярной системе координат построен дискретный аналог сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности, *сохраняющий структуру исходной модели*:

- компоненты приближенных векторных величин \mathbf{q}_h , \mathbf{w}_h задаются в одних и тех же узлах сетки;
- для случая когда область является кольцом, схема второго порядка точности построена на произвольной неравномерной сетки и для анизотропной среды (смешанные производные);
- со вторым порядком сходятся не только скалярные сеточные функции (приближения к температуре), но *сеточные вектор-функции* (приближения к потоку тепла);
- произведенные в работе построения не зависят от конкретной системы координат. Для другой системы координат надо в соответствующих местах использовать необходимую конкретику: метрический тензор, скалярное произведение и т. д.;
- схема позволяет реализовывать на дискретном уровне постановки “в температурах” и “в потоках” [9];
- в случае когда возможно разделение переменных, для постановки “в температурах” предложен экономичный метод обращения оператора задачи.

1. Формулировка сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности

Рассмотрим математическую модель стационарной задачи теплопроводности: определить параметры:

$u(x)$ — скалярная функция,

$\mathbf{w}(x)$ и $\mathbf{q}(x)$ — векторные поля (тензоры ранга 1),

удовлетворяющие в области Ω уравнениям:

$$\mathbf{R}^* \mathbf{w} \equiv \operatorname{div} \mathbf{w} = f, \quad (4)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad (5)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{R} u \equiv -\operatorname{grad} u, \quad (6)$$

а на границе области $\partial\Omega$ краевому условию

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (7)$$

В (5) \mathbf{K} — тензор теплопроводности — симметричный, равномерно по x положительно определенный тензор ранга два.

Введем в рассмотрение пространства:

L_2 — пространство квадратично суммируемых в Ω скалярных функций u со скалярным произведением

$$(u, v)_{L_2} = \int_{\Omega} uv \, d\Omega \quad \forall u, v \in L_2;$$

\mathbf{L}_2 — пространство квадратично суммируемых в Ω вектор-функций \mathbf{w} со скалярным произведением

$$(\mathbf{w}, \mathbf{q})_{\mathbf{L}_2} = \int_{\Omega} (\mathbf{w}, \mathbf{q}) d\Omega \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{q} \in \mathbf{L}_2,$$

здесь через $(\mathbf{w}, \mathbf{q}) = w^1 q_1 + w^2 q_2$ обозначено скалярное произведение векторов \mathbf{w} и \mathbf{q} , первый из которых представлен своими контравариантными компонентами, а второй — ковариантными компонентами.

Если скалярная функция u и компоненты \mathbf{w} достаточно гладкие функции, например, принадлежат $C^1(\bar{\Omega})$, то для операторов $\operatorname{div} \mathbf{w}$ и $-\operatorname{grad} u$ справедливо интегральное тождество

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \mathbf{w} d\Omega = \int_{\Omega} (-\operatorname{grad} u, \mathbf{w}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \overbrace{u(\mathbf{n}, \mathbf{w})}^0 dS.$$

Используя принятые обозначения для u , удовлетворяющие (7), предыдущее равенство записывается в форме

$$(u, \mathbf{R}^* \mathbf{w})_{L_2} = (\mathbf{R} u, \mathbf{w})_{L_2}.$$

Сохранение этого свойства исходной модели на дискретном уровне будет положено в основу построения ее дискретного аналога.

2. Сопряжено-операторная модель в полярной системе координат

В качестве области Ω выберем множество, описываемое в декартовой системе координат $x = (x_1, x_2)$ следующим образом:

$$\bar{\Omega} = \left\{ x = (x_1, x_2) : l_1 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq L_1 \right\}.$$

Для описания такой области и численной реализации модели естественно выбрать полярную систему координат: $y_1 = r$, $y_2 = \varphi$. Связь между декартовой и полярной системами координат записывается в виде

$$x_1 = y_1 \cos y_2 = r \cos \varphi, \quad x_2 = y_1 \sin y_2 = r \sin \varphi.$$

В выбранной системе координат $\bar{\Omega}$ является прямоугольником

$$\bar{\Omega} = \{l_1 \leq r \leq L_1, l_2 \leq \varphi \leq L_2\}, \quad l_2 = 0, \quad L_2 = 2\pi.$$

При записи модели (4)–(6) в выбранной системе координат $y = (y_1, y_2)$ конкретизации подлежат соотношения (4), (5), поскольку действие оператора grad на скалярную функцию u в любой криволинейной системе координат записывается с помощью частных производных:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = -\operatorname{grad} u = - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y_1} \\ \frac{\partial u}{\partial y_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Здесь q_1, q_2 — ковариантные компоненты вектора \mathbf{q} .

В уравнении (4) операция $\operatorname{div} \mathbf{w}$ записывается в произвольной криволинейной системе координат с помощью ковариантных производных ∇_i от контравариантных компонент w^j вектора \mathbf{w} :

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \nabla_1 w^1 + \nabla_2 w^2.$$

В полярной системе координат имеем:

$$\begin{aligned}\nabla_1 w^1 &= \frac{\partial w^1}{\partial y_1} = \frac{\partial w^1}{\partial r}, \\ \nabla_2 w^2 &= \frac{\partial w^2}{\partial y_2} + \frac{1}{y_1} w^1 = \frac{\partial w^2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} w^1.\end{aligned}\tag{9}$$

Поскольку в (4), (9) использованы контравариантные компоненты w^1, w^2 вектора \mathbf{w} , а в (6), (8) градиент дает ковариантные компоненты q_1, q_2 вектора \mathbf{q} , соотношение (5) необходимо записать таким образом, чтобы в нем вектор \mathbf{w} представлялся контравариантными компонентами.

1. Из ковариантных компонент вектора \mathbf{q} с помощью операции жонглирования индексами получаем его контравариантные компоненты q^1, q^2 :

$$q^i = \sum_{j=1}^2 g^{ij} q_j, \quad i = 1, 2,$$

здесь g^{ij} ($i, j = 1, 2$) — контравариантные компоненты метрического тензора в полярной системе координат:

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}.$$

Составленную из этих компонент матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}$ будем обозначать \mathbf{G}^{-1} . В этих обозначениях формулы жонглирования индексами записываются в виде

$$\begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

2. Из контравариантных компонент вектора \mathbf{q} получаем ковариантные компоненты вектора \mathbf{w} :

$$w_i = \sum_{j=1}^2 \hat{K}_{ij} q^j \Leftrightarrow \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^1 \\ q^2 \end{bmatrix},$$

здесь \hat{K}_{ij} — ковариантные компоненты тензора ранга два \mathbf{K} в криволинейной системе координат $y = (y_1, y_2)$. Они связаны, в соответствии с определением тензора ранга два, с ковариантными компонентами $K_{\alpha\beta}$ этого же тензора в декартовой системе координат соотношениями:

$$\hat{K}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 K_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Для полярных координатах имеем:

$$\begin{aligned}\widehat{K}_{11} &= K_{11} \cos^2 \varphi + (K_{12} + K_{21}) \cos \varphi \sin \varphi + K_{22} \sin^2 \varphi, \\ \widehat{K}_{12} &= (K_{22} - K_{11}) r \sin \varphi \cos \varphi + K_{12} r \cos^2 \varphi - K_{21} r \sin^2 \varphi, \\ \widehat{K}_{21} &= (K_{22} - K_{11}) r \sin \varphi \cos \varphi + K_{21} r \cos^2 \varphi - K_{12} r \sin^2 \varphi, \\ \widehat{K}_{22} &= K_{11} r^2 \sin^2 \varphi - (K_{12} + K_{21}) r^2 \sin \varphi \cos \varphi + K_{22} r^2 \cos^2 \varphi.\end{aligned}$$

3. Наконец, так же, как в **1**, из ковариантных компонент вектора \mathbf{w} получаем его контравариантные компоненты:

$$\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Окончательно

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \widehat{\mathbf{K}} \mathbf{G}^{-1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{K}_{11} & \widehat{K}_{12} \\ \widehat{K}_{21} & \widehat{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \equiv \widetilde{\mathbf{K}} \mathbf{q}, \quad (10)$$

и сопряжено-операторная модель в полярной системе координат записывается в виде

$$\mathbf{R}^* \mathbf{w} \equiv \frac{\partial w^1}{\partial r} + \frac{\partial w^2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} w^1 = f, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R} u \equiv - \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

3. Построение дискретного аналога

3.1. Сетки и конечномерные пространства

Построим произвольные неравномерные сетки (см. рисунок):

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \{ (r_i, \varphi_j) \in \bar{\Omega}, \quad r_i = r_{i-1} + h_{1,i}, \quad 1 \leq i \leq N_1 + 1, \quad r_0 = l_1, \quad r_{N_1+1} = L_1, \\ &\quad \varphi_j = \varphi_{j-1} + h_{2,j}, \quad 1 \leq j \leq N_2 + 1, \quad \varphi_0 = l_2, \quad \varphi_{N_2+1} = L_2 \},\end{aligned}$$

$$\bar{\omega}^* = \{ (r_i, \varphi_j) \in \bar{\omega}, \quad i = \overline{0, N_1 + 1}, \quad j = \overline{0, N_2} \},$$

$$\omega = \{ (r_i, \varphi_j) \in \bar{\omega}, \quad i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2} \},$$

$$\begin{aligned}\omega_{\frac{1}{2}} &= \{ (r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}) \in \bar{\Omega}, \quad r_{i+\frac{1}{2}} = r_i + 0,5 h_{1,i+1}, \quad 0 \leq i \leq N_1, \\ &\quad \varphi_{j+\frac{1}{2}} = \varphi_j + 0,5 h_{2,j+1}, \quad 0 \leq j \leq N_2 \}.\end{aligned}$$

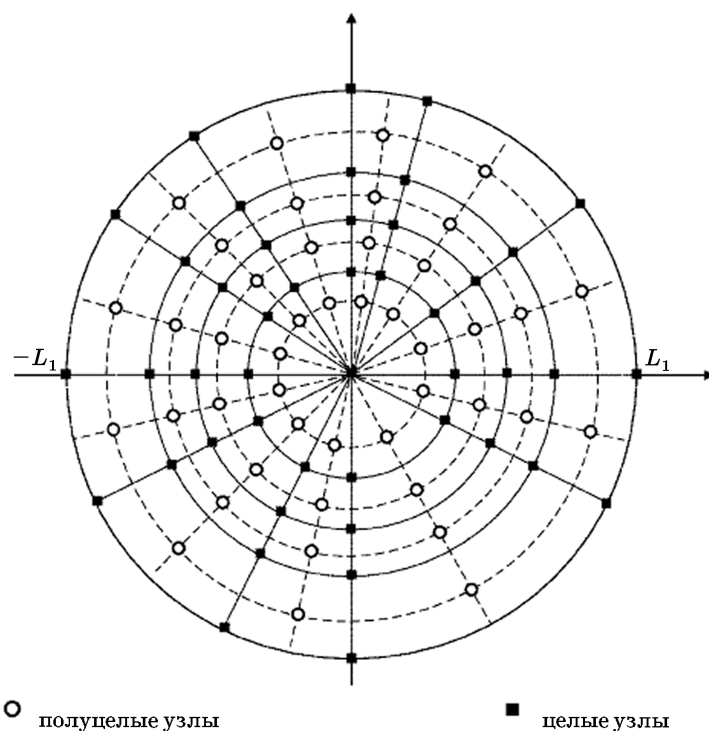


Рис. Расчетная область и сетки

Введем дополнительно:

$$\hat{h}_{1,m} = \begin{cases} 0.5 h_{1,1}, & m = 0, \\ 0.5 [h_{1,m} + h_{1,m+1}], & 1 \leq m \leq N_1, \\ 0.5 h_{1,N_1+1}, & m = N_1 + 1, \end{cases} \quad \hat{h}_{2,j} = \begin{cases} 0.5 [h_{2,1} + h_{2,N_2+1}], & j = 0, \\ 0.5 [h_{2,j+1} + h_{2,j}], & 1 \leq j \leq N_2. \end{cases}$$

Замечание. Если $L_2 < 2\pi$, то следует положить:

$$\hat{h}_{2,j} = \begin{cases} 0.5 h_{2,1}, & j = 0, \\ 0.5 [h_{2,j} + h_{2,j+1}], & 1 \leq j \leq N_2, \\ 0.5 h_{2,N_2+1}, & m = N_2 + 1. \end{cases}$$

Определим сеточные функции:

$$\rho_i = \begin{cases} l_1 + \frac{1}{4} h_{1,1} & i = 0, \\ r_i + \frac{1}{4} [h_{1,i+1} - h_{1,i}], & 1 \leq i \leq N_1, \\ L_1 - \frac{1}{4} h_{1,N_1+1} & i = N_1 + 1. \end{cases}$$

Введем пространства.

Гильбертово пространство H_h — пространство скалярных сеточных функций u^h , заданных на сетке $\bar{\omega}^*$, принимающих нулевое значение на $\partial\Omega$ и удовлетворяющих, если $l_1 = 0$, условию $u^h(0, \varphi_j) = \text{const}$, $0 \leq j \leq N_2$.

Скалярное произведение в H_h определим формулой

$$(u^h, v^h)_{H_h} = \sum_{(r_i, \varphi_j) \in \bar{\omega}^*} u^h(r_i, \varphi_j) v^h dV_{i,j} \quad \forall u^h \in H_h, v^h \in H_h.$$

Здесь $dV_{i,j} = \hat{h}_{1,i} \hat{h}_{2,j} \rho_i$ — площади ячеек, границами для которых являются штриховые линии на рисунке.

Если область есть круг $r_0 = l_1 = 0$, то $\sum_{j=0}^{N_2} \hat{h}_{2,j} = L_2 - l_2 = 2\pi$ и

$$(u^h, v^h)_{H_h} = 2\pi \hat{h}_{1,0} \rho_0 u_0^h v_0^h + \sum_{i=1}^{N_1+1} \sum_{j=0}^{N_2} u^h(r_i, \varphi_j) v^h(r_i, \varphi_j) dV_{i,j},$$

$$u_0^h = u^h(0, \varphi_j), \quad v_0^h = v^h(0, \varphi_j).$$

Гильбертово пространство H_h^* — пространство сеточных вектор-функций \mathbf{w}^h , заданных на сетке $\omega_{\frac{1}{2}}$ своими ковариантными $\mathbf{w}^h = \begin{bmatrix} w_1^h \\ w_2^h \end{bmatrix}$ или контравариантными $\mathbf{w}^h = \begin{bmatrix} w^{1h} \\ w^{2h} \end{bmatrix}$ компонентами со скалярным произведением

$$(\mathbf{w}^h, \boldsymbol{\sigma}^h)_{H_h^*} = \sum_{(r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi_{j-\frac{1}{2}}) \in \omega_{\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^2 w^{kh}(r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi_{j-\frac{1}{2}}) \sigma_k^h(r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi_{j-\frac{1}{2}}) dV_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}$$

$$\forall \mathbf{w}^h \in H_h^*, \boldsymbol{\sigma}^h \in H_h^*.$$

Здесь $dV_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} = h_{1,i} h_{2,j} r_{i-0,5}$ — площади ячеек, границами для которых являются сплошные линии на рисунке.

3.2. Аппроксимация оператора $\mathbf{R} = -\text{grad}$

В качестве аппроксимации опорного оператора \mathbf{R} выберем

$$\mathbf{R}_h : H_h \rightarrow H_h^*,$$

$$\begin{bmatrix} q_1^h \\ q_2^h \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = (\mathbf{R}_h u^h)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j}^h - u_{i,j}^h}{h_{1,i+1}} + \frac{u_{i+1,j+1}^h - u_{i,j+1}^h}{h_{1,i+1}} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{h_{2,j+1}} + \frac{u_{i+1,j+1}^h - u_{i+1,j}^h}{h_{2,j+1}} \right) \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} R_{1h} \\ R_{2h} \end{bmatrix} u^h \right)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}},$$

$$(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}) \in \omega_{\frac{1}{2}},$$

$$u_{i,j}^h = 0, \quad (r_i, \varphi_j) \in \partial\Omega.$$

Здесь и далее

$$u_{i,j}^h = u^h(r_i, \varphi_j), \quad \begin{bmatrix} q_1^h \\ q_2^h \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} q_1^h(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}) \\ q_2^h(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}) \end{bmatrix},$$

а для компактности записи используются соотношения $u_{i, N_2+1}^h = u_{i,0}^h$, $i = \overline{0, N_1+1}$.

3.3. Аппроксимация оператора $\mathbf{R}^* = \operatorname{div}$

В качестве аппроксимации $\mathbf{R}_h^* : H_h^* \rightarrow H_h$ оператора $\mathbf{R}^* = \operatorname{div}$ выбираем сопряженный к построенному в предыдущем пункте оператору \mathbf{R}_h :

$$(\mathbf{R}_h u^h, \mathbf{w}^h)_{H_h^*} = (u^h, \mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h)_{H_h}. \quad (14)$$

Конкретный вид оператора \mathbf{R}_h^* может быть получен непосредственно из (14) с использованием формул суммирования по частям. Однако более конструктивным представляется следующий путь вычисления действия оператора \mathbf{R}_h^* .

Если ввести e_i — ортогональный базис в H_h (в скалярном произведении $(\cdot, \cdot)_{H_h}$), то $\mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h$ — элемент пространства H_h — может быть представлен в виде разложения по этому базису:

$$\mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h = \sum_{j=1}^{\dim H_h} \frac{(\mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h, e_j)_{H_h}}{(e_j, e_j)_{H_h}} e_j. \quad (15)$$

Используя в (15) соотношение (14), получаем

$$\mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h = \sum_{j=1}^{\dim H_h} \frac{(\mathbf{w}^h, \mathbf{R}_h e_j)_{H_h^*}}{(e_j, e_j)_{H_h}} e_j. \quad (16)$$

В качестве базиса в H_h выберем систему сеточных функций $e_{(r_i, \varphi_j)}$, $(r_i, \varphi_j) \in \omega$, каждая из которых равна единице в одной из точек сетки ω , а во всех остальных точках этой сетки равна нулю:

$$e_{(r_i, \varphi_j)}(r_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & (r_i, \varphi_j) \neq (r_k, \varphi_l), \\ 1, & (r_i, \varphi_j) = (r_k, \varphi_l) \end{cases} \quad \forall (r_i, \varphi_j), (r_k, \varphi_l) \in \omega,$$

$$(e_{(r_i, \varphi_j)}, e_{(r_i, \varphi_j)})_{H_h} = dV_{i,j} = \hat{h}_{1,i} \hat{h}_{2,j} \rho_i.$$

В случае $l_1 = 0$ к этому набору функций добавляется функция

$$e_0(r_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq 0 \quad \forall j, \\ 1, & i = 0 \quad \forall j, \end{cases}$$

$$(e_0, e_0)_{H_h} = \pi \left(\frac{1}{2} h_{1,1} \right)^2.$$

Тогда значение $\mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h$ в точке сетки $(r_i, \varphi_j) \in \omega$ вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h(r_i, \varphi_j) &= \sum_{(r_k, \varphi_l) \in \omega} \frac{(\mathbf{w}^h, \mathbf{R}_h e_{(r_k, \varphi_l)})_{H_h^*}}{(e_{(r_k, \varphi_l)}, e_{(r_k, \varphi_l)})_{H_h}} e_{(r_k, \varphi_l)}(r_i, \varphi_j) \\ &= \frac{(\mathbf{w}^h, \mathbf{R}_h e_{(r_i, \varphi_j)})_{H_h^*}}{(e_{(r_i, \varphi_j)}, e_{(r_i, \varphi_j)})_{H_h}} \underbrace{e_{(r_i, \varphi_j)}(r_i, \varphi_j)}_{\substack{\parallel \\ 1}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Сеточная вектор-функция $\mathbf{R}_h e_{(r_i, \varphi_j)}$, $(r_i, \varphi_j) \in \omega$, во всех точках сетки

$$\omega_{\frac{1}{2}} = \left\{ (r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}) \in \Omega, \quad 0 \leq i \leq N_1, \quad 0 \leq j \leq N_2 \right\}$$

принимает нулевое значение, кроме четырех:

$$(r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi_{j-\frac{1}{2}}), \quad (r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j-\frac{1}{2}}), \quad (r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}), \quad (r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}).$$

В этих точках сеточная вектор-функция $\mathbf{R}_h e_{(r_i, \varphi_j)}$ задается ковариантными компонентами следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h e_{(r_i, \varphi_j)}(r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi_{j-\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{h_{1,i}} \\ -1 \\ \frac{1}{h_{2,j}} \end{bmatrix}, & \mathbf{R}_h e_{(r_i, \varphi_j)}(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j-\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{h_{1,i+1}} \\ -1 \\ \frac{1}{h_{2,j}} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{R}_h e_{(r_i, \varphi_j)}(r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{h_{1,i}} \\ 1 \\ \frac{1}{h_{2,j+1}} \end{bmatrix}, & \mathbf{R}_h e_{(r_i, \varphi_j)}(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{h_{1,i+1}} \\ 1 \\ \frac{1}{h_{2,j+1}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь и ниже для компактности записи используются соотношения: $\varphi_{-\frac{1}{2}} = \varphi_{N_2+\frac{1}{2}}$, $h_{2,0} = h_{2,N_2+1}$, $w_{i\pm\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{kh} = w_{i\pm\frac{1}{2},N_2+\frac{1}{2}}^{kh}$.

Подставляя (18) в (17), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h(r_i, \varphi_j) &= \frac{1}{\rho_i} \frac{1}{2} \left[\frac{h_{2,j+1}}{\hat{h}_{2,j}} \frac{r_{i+0,5} w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{1h} - r_{i-0,5} w_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{1h}}{\hat{h}_{1,i}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{h_{2,j}}{\hat{h}_{2,j}} \frac{r_{i+0,5} w_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{1h} - r_{i-0,5} w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{1h}}{\hat{h}_{1,i}} \right] + \\ &\quad \frac{1}{\rho_i} \frac{1}{2} \left[\frac{h_{1,i+1}}{\hat{h}_{1,i}} r_{i+0,5} \frac{w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{2h} - w_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{2h}}{\hat{h}_{2,j}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{h_{1,i}}{\hat{h}_{1,i}} r_{i-0,5} \frac{w_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{2h} - w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{2h}}{\hat{h}_{2,j}} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

$(r_i, \varphi_j) \in \omega.$

В случае $l_1 = 0$ к (19) следует добавить аппроксимацию дивергенции в центре круга

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h(r_0, \varphi_j) &= \left[\frac{(\mathbf{w}^h, \mathbf{R}_h e_0)_{H_h^*}}{(e_0, e_0)_{H_h}} e_0 + \sum_{(r_k, \varphi_l) \in \omega} \frac{(\mathbf{w}^h, \mathbf{R}_h e_{(r_k, \varphi_l)})_{H_h^*}}{(e_{(r_k, \varphi_l)}, e_{(r_k, \varphi_l)})_{H_h}} e_{(r_k, \varphi_l)} \right] (r_0, \varphi_j) \\ &= \frac{(\mathbf{w}^h, \mathbf{R}_h e_0)_{H_h^*}}{(e_0, e_0)_{H_h}} \underbrace{e_0(r_0, \varphi_j)}_{\parallel 1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Сеточная вектор-функция $\mathbf{R}_h e_0$ задается ковариантными компонентами следующим образом:

$$(\mathbf{R}_h e_0)_{\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ h_{1,1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, N_2. \quad (21)$$

В остальных точках сетки $\omega_{\frac{1}{2}}$ она равна нулю.

Подставляя (21) в (20), имеем

$$\mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h(r_0, \varphi_j) = \frac{1}{2\pi \rho_0 \hat{h}_{1,0}} \sum_{j=0}^{N_2} r_{0,5} w_{\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{1h} h_{2, j+1}.$$

3.4. Аппроксимация тензора \mathbf{K} и разностная схема

В качестве аппроксимации тензора $\widetilde{\mathbf{K}}$ из (10), (12) выберем оператор $\widetilde{\mathbf{K}}_h : H_h^* \rightarrow H_h^*$, действующий по правилу

$$\begin{bmatrix} w^{1h} \\ w^{2h} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = [\widetilde{\mathbf{K}}_h \mathbf{q}^h]_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \widehat{K}_{11} & \frac{1}{r^2} \widehat{K}_{12} \\ \frac{1}{r^2} \widehat{K}_{21} & \frac{1}{r^4} \widehat{K}_{22} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} q_1^h \\ q_2^h \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}.$$

Окончательно дискретная сопряженно-операторная модель задачи теплопроводности имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h &= f^h, \\ \mathbf{w}^h &= \widetilde{\mathbf{K}}_h \mathbf{q}^h, \\ \mathbf{q}^h &= \mathbf{R}_h u^h, \\ u^h &\in H_h, \quad \mathbf{w}^h \in H_h^*. \end{aligned}$$

Здесь векторзначные сеточные функции \mathbf{q}^h , \mathbf{w}^h представлены своими ковариантными и контравариантными компонентами соответственно.

Обоснование сходимости построенной схемы со вторым порядком точности для случая, когда расчетная область является кольцом или кольцевым сектором ($l_1 > 0$), можно осуществить аналогично [10]. Обоснование сходимости для $l_1 = 0$ требует дополнительного исследования.

4. Экономичный алгоритм для случая однородной среды

В этом пункте представлен экономичный алгоритм получения решения построенной дискретной сопряженно-операторной модели в случае, когда тензор теплопроводности является единичным оператором, $\mathbf{K} = \mathbf{G}$ (метрический тензор), а сетка по угловой переменной равномерная: $h_{2,j} = h_2$.

В качестве расчетной области выберем, ради простоты изложения алгоритма, часть кольца: $l_1 > 0$, $L_2 < 2\pi$. Для областей другой формы можно использовать методы, описанные в [16]. В частности, в случае $l_1 = 0$ применим принцип суперпозиции.

В принятых ограничениях дискретная модель записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{R}_h^* \mathbf{w}^h(r_i, \varphi_j) \\
& \equiv \frac{1}{\rho_i} \frac{1}{2} \left[\frac{r_{i+0,5} w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{1h} - r_{i-0,5} w_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{1h}}{\hat{h}_{1,i}} + \frac{r_{i+0,5} w_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{1h} - r_{i-0,5} w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{1h}}{\hat{h}_{1,i}} \right] + \\
& \frac{1}{\rho_i} \frac{1}{2} \left[\frac{h_{1,i+1}}{\hat{h}_{1,i}} r_{i+0,5} \frac{w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{2h} - w_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{2h}}{h_2} + \frac{h_{1,i}}{\hat{h}_{1,i}} r_{i-0,5} \frac{w_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{2h} - w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{2h}}{h_2} \right] \\
& = f(r_i, \varphi_j), \\
& (r_i, \varphi_j) \in \omega,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^h & = \begin{bmatrix} w^{1h} \\ w^{2h} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = [\mathbf{G}^{-1} \mathbf{q}^h]_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} q_1^h \\ q_2^h \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \\
& (r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}) \in \omega_{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^h & = \begin{bmatrix} q_1^h \\ q_2^h \end{bmatrix}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = (\mathbf{R}_h u^h)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \equiv - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j}^h - u_{i,j}^h}{h_{1,i+1}} + \frac{u_{i+1,j+1}^h - u_{i,j+1}^h}{h_{1,i+1}} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h}{h_2} + \frac{u_{i+1,j+1}^h - u_{i+1,j}^h}{h_2} \right) \end{bmatrix}, \\
& (r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+\frac{1}{2}}) \in \omega_{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{24}$$

$$u_{i,j}^h = 0, \quad (r_i, \varphi_j) \in \partial\Omega.$$

Выберем в качестве первоначально определяемого параметра температуру u^h (постановка “в температурах”). После нахождения u^h параметры \mathbf{q}^h , \mathbf{w}^h могут быть вычислены из (24), (23).

При выборе такой последовательности определения неизвестных ($u^h \rightarrow \mathbf{q}^h \rightarrow \mathbf{w}^h$) требуется выписать уравнение для u^h . Оно получается из (22)–(24) последовательным исключением \mathbf{w}^h и \mathbf{q}^h :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_h^* \mathbf{G}_h^{-1} \mathbf{R}_h u^h(r_i, \varphi_j) & \equiv -\frac{1}{\rho_i} \frac{1}{4} \left[(\bar{r}_i u_{\bar{r}}^h)_{\hat{r},i,j-1} + 2(\bar{r}_i u_{\bar{r}}^h)_{\hat{r},i,j} + (\bar{r}_i u_{\bar{r}}^h)_{\hat{r},i,j+1} \right] - \\
& \frac{1}{\rho_i} \frac{1}{\hat{h}_{1,i}} \frac{1}{4} \left[a_i (u_{\bar{\varphi}\varphi}^h)_{i-1,j} + (a_i + a_{i+1}) (u_{\bar{\varphi}\varphi}^h)_{i,j} + a_{i+1} (u_{\bar{\varphi}\varphi}^h)_{i+1,j} \right] \\
& = f(r_i, \varphi_j),
\end{aligned} \tag{25}$$

$$1 \leq i \leq N_1, \quad 1 \leq j \leq N_2,$$

$$u_{i,j}^h = 0, \quad (r_i, \varphi_j) \in \partial\Omega.$$

Здесь

$$\bar{r}_i = r_{i-\frac{1}{2}} = r_i - 0.5h_{1,i}, \quad a_i = \frac{h_{1,i}}{r_{i-\frac{1}{2}}}.$$

Для его решения применим метод разложения в однократный ряд [16].

Введем в рассмотрение $\mu_{k_2}(j) = \sqrt{\frac{2}{L_2}} \sin \frac{k_2 \pi j}{N_2 + 1}$, $1 \leq k_2 \leq N_2$, $0 \leq j \leq N_2 + 1$, — собственные функции одномерного оператора

$$-(v_{\bar{\varphi}\varphi}^h)(j) = \frac{-v^h(\varphi_j - h_2) + 2v^h(\varphi_j) - v^h(\varphi_j + h_2)}{h_2^2}, \quad v^h(\varphi_0) = v^h(\varphi_{N_2+1}) = 0,$$

отвечающие собственным числам $\lambda_{k_2} = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{k_2 \pi}{2(N_2 + 1)}$, $1 \leq k_2 \leq N_2$.

Рассматривая сеточные функции $u^h(r_i, \varphi_j) = u_{i,j}^h$ и $f(r_i, \varphi_j) = f_{i,j}$ при фиксированном i как сеточные функции аргумента j , разложим их по базису μ_{k_2} , $1 \leq k_2 \leq N_2$:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^h &= \sum_{k_2=1}^{N_2} u^{k_2}(i) \mu_{k_2}(j), \quad 0 \leq i \leq N_1 + 1, \quad 0 \leq j \leq N_2 + 1, \\ f_{i,j} &= \sum_{k_2=1}^{N_2} f^{k_2}(i) \mu_{k_2}(j), \quad 1 \leq i \leq N_1, \quad 1 \leq j \leq N_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя (26) в (25) и учитывая равенства

$$\begin{aligned} -((\mu_{k_2})_{\bar{\varphi}\varphi})(j) &= \lambda_{k_2} \mu_{k_2}(j), \\ \mu_{k_2}(0) &= \mu_{k_2}(N_2 + 1) = 0, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k_2=1}^{N_2} \left\{ -\frac{1}{\rho_i} \frac{1}{4} (\bar{r}_i u_{\bar{r}}^{k_2})_{\hat{r},i} \left[\mu_{k_2}(j-1) + 2\mu_{k_2}(j) + \mu_{k_2}(j+1) \right] + \right. \\ \left. \frac{1}{\rho_i} \frac{1}{\hat{h}_{1,i}} \frac{1}{4} \left[a_i u_{i-1}^{k_2} + (a_i + a_{i+1}) u_i^{k_2} + a_{i+1} u_{i+1}^{k_2} \right] \lambda_{k_2} \mu_{k_2}(j) \right\} = \sum_{k_2=1}^{N_2} f^{k_2}(i) \mu_{k_2}(j). \end{aligned} \quad (27)$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$\mu_{k_2}(j-1) + 2\mu_{k_2}(j) + \mu_{k_2}(j+1) = \tilde{\lambda}_{k_2} \mu_{k_2}(j),$$

где $\tilde{\lambda}_{k_2} = 4 \cos^2 \frac{k_2 \pi}{2(N_2 + 1)}$, $k_2 = 1, 2, \dots, N_2$.

Учитывая это в (27) и пользуясь линейной независимостью $\mu_{k_2}(j)$, получаем для каждого k_2 трехточечное уравнение на $u^{k_2}(i) = u_i^{k_2}$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_i} \frac{1}{4} (\bar{r}_i u_{\bar{r}}^{k_2})_{\hat{r},i} \tilde{\lambda}_{k_2} + \frac{1}{\rho_i} \frac{1}{\hat{h}_{1,i}} \frac{1}{4} \left[a_i u_{i-1}^{k_2} + (a_i + a_{i+1}) u_i^{k_2} + a_{i+1} u_{i+1}^{k_2} \right] \lambda_{k_2} = f^{k_2}(i), \\ 1 \leq i \leq N_1, \end{aligned} \quad (28)$$

$$u_0^{k_2} = u_{N_1+1}^{k_2} = 0.$$

Суммируя вышесказанное, алгоритм решения задачи (22)–(24) выглядит следующим образом: находим коэффициенты $f^{k_2}(i)$ (БПФ); решаем для каждого $k_2 = 1, 2, \dots, N_2$ краевую задачу (28) (метод прогонки); по формуле (26) находим решение $u_{i,j}^h$ задачи (25) (БПФ); из (24) и (23) определяем \mathbf{q}^h и \mathbf{w}^h .

Литература

1. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1976.
2. Карчевский М.М., Ляшко А.Д. Разностные схемы для квазилинейных эллиптических уравнений на полярной сетке // Численные методы механики сплошной среды. — 1972. — Т. 3, № 4. — С. 77–88.
3. Глушенкова В.Д., Ляшко А.Д. Разностные схемы для квазилинейных эллиптических уравнений в полярных координатах // Дифф. уравнения. — 1976. — Т. 12, № 6. — С. 1052–1060.
4. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Разностные аналоги основных дифференциальных операторов первого порядка. — Москва, 1981. — (Препринт / ИПМ АН СССР; 8).
5. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы // Дифф. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 7. — С. 1317–1321.
6. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. О представлении разностных схем математической физики в операторной форме // ДАН СССР. — 1981. — Т. 258, № 5. — С. 1092–1096.
7. Samarski A.A., Tishkin V.F., Favorksii A.P., and Shashkov M. Employment of the reference-operator methods in the construction of finite difference analog of tensor operations // Differ. Equ. — 1983. — Vol. 18, № 7. — P. 881–885.
8. Коновалов А.Н., Сорокин С.Б. Структура уравнений теории упругости. Статическая задача. — Новосибирск, 1986. — (Препринт ВЦ СО АН СССР; 665).
9. Коновалов А.Н. Сопряженно-факторизованные модели в задачах математической физики // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 1998. — Т. 1, № 1. — С. 25–57.
10. Сорокин С.Б. Обоснование дискретного аналога сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности // Сиб. журн. индустр. математики — 2014. — Т. 60, № 4. — С. 98–110.
11. Сорокин С.Б. Разностная схема для сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности на несогласованных сетках // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 429–439.
12. Beirao da Veiga L., Lipnikov K., and Manzini G. The Mimetic Finite Difference Method for Elliptic Problems. — Berlin: Springer-Verlag, 2014. — (Modeling, Simulation and Applications; Vol. 11).
13. Lipnikov K., Manzini G., and Shashkov M. Mimetic finite difference method // J. of Comput. Physics. — 2014. — Vol. 257. — P. 1163–1227.
14. Карчевский М.М., Волошановская С.Н. Об аппроксимации тензора деформации в криволинейных координатах. Разностная схема для задачи о равновесии упругого цилиндра // Изв. вузов. Математика. — 1977. — Т. 10. — С. 70–80.
15. Цуриков Н.В. Об аппроксимации ковариантных производных компонент векторов и тензоров в произвольной криволинейной системе координат // Вариационные методы в задачах численного анализа. — Новосибирск, 1986. — С. 150–157.
16. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.

*Поступила в редакцию 26 января 2017 г.,
в окончательном варианте 4 апреля 2017 г.*

Литература в транслитерации

1. **Samarskiy A.A., Andreev V.B.** Raznostnye metody dlya ellipticheskikh uravneniy. — M.: Nauka, 1976.
2. **Karchevskiy M.M., Lyashko A.D.** Raznostnye skhemy dlya kvazilineynykh ellipticheskikh uravneniy na polyarnoy setke // Chislennyye metody mekhaniki sploshnoy sredy. — 1972. — Т. 3, № 4. — S. 77–88.
3. **Glushenkova V.D., Lyashko A.D.** Raznostnye skhemy dlya kvazilineynykh ellipticheskikh uravneniy v polyarnykh koordinatah // Diff. uravneniya. — 1976. — Т. 12, № 6. — S. 1052–1060.
4. **Samarskiy A.A., Tishkin V.F., Favorskiy A.P., Shashkov M.Yu.** Raznostnye analogi osnovnykh differentsial'nykh operatorov pervogo poryadka. — Moskva, 1981. — (Preprint / IPM AN SSSR; 8).
5. **Samarskiy A.A., Tishkin V.F., Favorskiy A.P., Shashkov M.Yu.** Operatornye raznostnye skhemy // Diff. uravneniya. — 1981. — Т. 17, № 7. — S. 1317–1321.
6. **Samarskiy A.A., Tishkin V.F., Favorskiy A.P., Shashkov M.Yu.** O predstavlenii raznostnykh skhem matematicheskoy fiziki v operatornoy forme // DAN SSSR. — 1981. — Т. 258, № 5. — S. 1092–1096.
7. **Samarskiy A.A., Tishkin V.F., Favorskiy A.P., and Shashkov M.** Employment of the reference-operator methods in the construction of finite difference analog of tensor operations // Differ. Equ. — 1983. — Vol. 18, № 7. — P. 881–885.
8. **Konovalov A.N., Sorokin S.B.** Struktura uravneniy teorii uprugosti. Statischezhaya zadacha. — Novosibirsk, 1986. — (Preprint VTS SO AN SSSR; 665).
9. **Konovalov A.N.** Sopryazhenno-faktorizovannyye modeli v zadachah matematicheskoy fiziki // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 1998. — Т. 1, № 1. — S. 25–57.
10. **Sorokin S.B.** Obosnovanie diskretnogo analoga sopryazhenno-operatornoy modeli zadachi teploprovodnosti // Sib. zhurn. industr. matematiki — 2014. — Т. 60, № 4. — S. 98–110.
11. **Sorokin S.B.** Raznostnaya skhema dlya sopryazhenno-operatornoy modeli zadachi teploprovodnosti na nesoglasovannykh setkakh // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2016. — Т. 19, № 4. — S. 429–439.
12. **Beirao da Veiga L., Lipnikov K., and Manzini G.** The Mimetic Finite Difference Method for Elliptic Problems. — Berlin: Springer-Verlag, 2014. — (Modeling, Simulation and Applications; Vol. 11).
13. **Lipnikov K., Manzini G., and Shashkov M.** Mimetic finite difference method // J. of Comput. Physics. — 2014. — Vol. 257. — P. 1163–1227.
14. **Karchevskiy M.M., Voloshanovskaya S.N.** Ob approksimatsii tenzora deformatsii v krivolineynykh koordinatah. Raznostnaya skhema dlya zadachi o ravnovesii uprugogo tsilindra // Izv. vuzov. Matematika. — 1977. — Т. 10. — S. 70–80.
15. **Tsurikov N.V.** Ob approksimatsii kovariantnykh proizvodnykh komponent vektorov i tenzorov v proizvol'noy krivolineynoy sisteme koordinat // Variatsionnyye metody v zadachah chislennogo analiza. — Novosibirsk, 1986. — S. 150–157.
16. **Samarskiy A.A., Nikolaev E.S.** Metody resheniya setochnykh uravneniy. — M.: Nauka, 1978.