К ЗАДАЧЕ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

Ф. М. Мухаметзянов (*Казань*)

В статье решается задача нахождения функции давления в однородном полосообразном пласте переменной мощности при упругом режиме эксплуатации.

Рассмотрим неустановившуюся фильтрацию жидкости в однородном пласте переменной мощности H, ограниченном контурами питания $y = 0$, $y = L$. Пласт вскрыт n совершенными скважинами, представляемыми в виде вертикальных источников и стоков в точках $A_i\ (x_i, y_i)$ с заданными дебитами $Q_i\ (i = 1,\ldots,n)$. Найдем функцию распределения давления в этом пласте. Аналогичная задача при эксплуатации галереями решена [3]. Известно [1], что эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(H\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(H\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{H}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad \left(\varkappa=\frac{k}{\mu\,(m\beta_1+\beta_2)}\right) \tag{1}$$

имеющего особенности типа тепловых источников (стоков) в точках $A_i\,(x_i, y_i)$ заданной интенсивности $Q_i\ (i = 1, \ldots, n)$ и удовлетворяющего условиям:

$$p\,|_{y=0}=p_0, \qquad p\,|_{y=L}=p_1, \qquad p\,|_{t=0}=p_0 \qquad (p_0,\ p_1=\mathrm{const}) \tag{2}$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности, k — коэффициент проницаемости, m — пористости, μ — вязкости, β_1 — упругости жидкости, β_2 — упругости среды.

Следуя работе [2], введем новую искомую функцию $V\,(x, y, t)$ по формуле

$$p=p_0+\frac{V\,(x,y,t)}{\sqrt{H\,(x,y)}} \tag{3}$$

Уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}-\frac{\Delta\sqrt{H}}{\sqrt{H}}\,V=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial V}{\partial t} \tag{4}$$

где Δ — оператор Лапласа, а условия (2) перепишутся в виде

$$V\,|_{y=0}=0, \qquad V\,|_{y=L}=(p_1-p_0)\sqrt{H\,(x,L)}, \qquad V\,|_{t=0}=0 \tag{5}$$

Решение уравнения (4) при условиях (5) и произвольном $H\,(x, y)$ представляет большие трудности. Остановимся на случае, когда $H\,(y)$ удовлетворяет условию

$$\Delta\sqrt{H}=\pm\alpha^2\sqrt{H} \qquad (\alpha=\mathrm{const}) \tag{6}$$

При выполнении (6) уравнение (4) запишется в форме

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\mp\alpha^2 V=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial V}{\partial t} \tag{7}$$

Введем новую переменную U, положив

$$V=U\,(x,y,t)\exp\,(\mp\alpha^2\varkappa t) \tag{8}$$

Тогда уравнение (7) приведется к виду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial U}{\partial t} \tag{9}$$

Граничными и начальными условиями для $U\,(x, y, t)$ будут соотношения

$$U\,|_{y=0}=0, \qquad U\,|_{y=L}=(p_1-p_0)\sqrt{H\,(L)}\exp\,(\pm\alpha^2\varkappa t) \tag{10}$$

Для простоты выкладок предположим, что в пласте имеется лишь одна скважина в точке $A\,(0, y_0)$. Случай n скважин получим методом суперпозиции. Найдем вначале решение V^* уравнения (9), удовлетворяющее более простым условиям:

$$V^*\,|_{y=0}=0, \qquad V^*\,|_{y=L}=1, \qquad V^*\,|_{t=0}=0$$

Искомую функцию $V^*\,(x, y, t)$ представим в виде суммы двух функций

$$V^*=U_1\,(y,t)+U_2\,(x,y,t)$$

из которых первая удовлетворяет условиям

$$U_1\,|_{y=0}=0, \qquad U_1\,|_{y=L}=1, \qquad U_1\,|_{t=0}=0$$

а вторая является функцией источника для полосы $(0, L)$ мощности $H = 1$ с интенсивностью, равной $C_1\exp\,(\pm\alpha^2\varkappa t)$ $(C_1 = \mathrm{const})$. Отыскивая $U_1\,(y, t)$ в виде ряда из частных решений (9), найдем, что

$$U_1=\frac{y}{L}-\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\exp\left(-\frac{m^2\pi^2}{L^2}\varkappa t\right)\sin\frac{\pi m}{L}\,y \tag{11}$$

Функция $U_2^*(x, y, t)$ при постоянном дебите C_1 известна [4] и дается формулой

$$U_2^*(x, y, t) = \frac{C_1\mu}{kL}\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa\tau} - \frac{\varkappa\pi^2 m^2}{L^2}\tau\right) \sin\frac{\pi m}{L} y_0 \sin\frac{\pi m}{L} y d\tau \tag{12}$$

Из (12) по принципу Дюгамеля для $U_2(x, y, t)$ получим следующее выражение

$$U_2(x, y, t) = \frac{C_1\mu}{kL}\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}} \exp(\pm\alpha^2\varkappa t) \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\varkappa\tau} - \left(\frac{\pi^2 m^2}{L^2} \pm \alpha^2\right)\varkappa\tau\right] \times$$

$$\times \sin\frac{\pi m}{L} y_0 \sin\frac{\pi m}{L} y \cdot d\tau$$

или

$$U_2(x, y, t) = \frac{C_1\mu}{4kL}\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}} \exp(\pm\alpha^2\varkappa t) \int_0^t \vartheta_3\left(\frac{y_0 - y}{2}, \frac{\varkappa\tau}{L^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{y + y_0}{2}, \frac{\varkappa\tau}{L^2}\right)\Bigg] \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa\tau} + \alpha^2\varkappa\tau\right) d\tau$$

Здесь $\vartheta_3(z, q)$ — эллиптическая функция, являющаяся суммой ряда

$$\vartheta_3(z, q) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\pi^2 m^2 q) \cos 2\pi m z$$

Таким образом, для функции V^* получаем формулу

$$V^* = \frac{y}{L} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2}{L^2}\varkappa t\right) \sin\frac{\pi m}{L} y +$$

$$+ \frac{C_1\mu}{4kL}\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}} \exp(\pm\alpha^2\varkappa t) \int_0^t \left[\vartheta_3\left(\frac{y_0 - y}{2}, \frac{\varkappa\tau}{L^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{y + y_0}{2}, \frac{\varkappa\tau}{L^2}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa\tau} \mp\right.$$

$$\left.\mp \alpha^2\varkappa\tau\right) d\tau \tag{13}$$

Теперь по тому же принципу Дюгамеля, исходя из (13), нетрудно показать, что решением уравнения (9) при условии (10) является функция

$$U(x, y, t) = (p_1 - p_0)\sqrt{H(L)}\,\Phi(y) \exp(\pm\alpha^2\varkappa t) -$$

$$- \frac{2\pi}{L}(p_1 - p_0)\sqrt{H(L)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} m \sin\pi m y/L}{\pi^2 m^2/L^2 \pm \alpha^2} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\pi^2 m^2}{L^2} \pm \alpha^2\right)\varkappa t + \frac{C_1\mu}{4kL}\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}} \exp(\pm\alpha^2\varkappa t) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[\vartheta_3\left(\frac{y_0 - y}{2}, \frac{\varkappa\tau}{L^2}\right) -\right.$$

$$\left. - \vartheta_3\left(\frac{y + y_0}{2}, \frac{\varkappa\tau}{L^2}\right)\right] \exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa\tau} \mp \alpha^2\varkappa\tau\right) d\tau$$

где

$$\Phi(y) = \begin{cases} \operatorname{sh}\alpha y/\operatorname{sh}\alpha L & \text{для знака плюс в формуле (6)} \\ \sin\alpha y/\sin\alpha L & \text{для знака минус в формуле (6)} \end{cases}$$

Зная $U(x, y, t)$ и учитывая (8), найдем, что

$$V = (p_1 - p_0)\sqrt{H(L)}\,\Phi(y) - \frac{2\pi}{L^2}(p_1 - p_0)\sqrt{H(L)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} m}{\pi^2 m^2/L^2 \pm \alpha^2} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{-\pi^2 m^2}{L^2}\varkappa t\right) \sin\frac{\pi m}{L} y +$$

$$+ \frac{C_1\mu}{4kL}\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}} \int_0^t \left[\vartheta_3\left(\frac{y_0 - y}{2}, \frac{\varkappa\tau}{L^2}\right) - \vartheta_3\left(\frac{y + y_0}{2}, \frac{\varkappa\tau}{L^2}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa\tau} \mp \alpha^2\varkappa\tau\right) d\tau$$

Следовательно, для искомого распределения давления получаем выражение

$$p-p_0=\frac{1}{\sqrt{H(y)}}\Big\{(p_1-p_0)\sqrt{H(L)}\,\Phi(y)-\frac{2\pi}{L^2}(p_1-p_0)\sqrt{H(L)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}m}{\pi^2m^2/L^2\pm\alpha^2}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\pi^2m^2}{L^2}\varkappa t\right)+$$

$$+\frac{C_1\mu}{4kL}\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}}\int_0^t\left[\vartheta_3\left(\frac{y_0-y}{2},\frac{\varkappa\tau}{L^2}\right)-\vartheta_3\left(\frac{y+y_0}{2},\frac{\varkappa\tau}{L^2}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{\tau}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa\tau}\mp\alpha^2\varkappa\tau\right)d\tau\Big\} \quad (14)$$

Здесь C_1 пока неизвестная постоянная.

Из условия задания дебита скважины Q и формулы

$$Q=-\frac{k}{\mu}\lim_{r_0\to 0}\int_0^{2\pi}H\frac{\partial p}{\partial r}r\Big|_{r=r_0}d\varphi \quad (15)$$

где r_0 — радиус окружности с центром в точке $A(0, y_0)$, следует, что

$$C_1=-\frac{Q}{\sqrt{H(y_0)}}$$

Внося это значение в (14), найдем искомую функцию распределения давления

$$p-p_0=\frac{1}{\sqrt{H(y)}}\Big\{(p_1-p_0)\sqrt{H(L)}\,\Phi(y)-\frac{2\pi}{L^2}(p_1-p_0)\sqrt{H(L)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m m\sin\frac{\pi m}{L}y}{\pi^2m^2/L^2\pm\alpha^2}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\pi^2m^2}{L^2}\varkappa t\right)-$$

$$-\frac{Q}{4\sqrt{H(y_0)}}\frac{\mu}{k}\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}}\int_0^t\left[\vartheta_3\left(\frac{y_0-y}{2},\frac{\varkappa\tau}{L^2}\right)-\vartheta_3\left(\frac{y+y_0}{2},\frac{\varkappa\tau}{L^2}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{\tau}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\varkappa\tau}+\alpha^2\varkappa\tau\right)d\tau\Big\} \quad (16)$$

Полагая в (15) $t\to\infty$, получим функцию распределения давления p^* при стационарном режиме

$$p^*=p_0+\frac{1}{\sqrt{H(y)}}\Big[(p_1-p_0)\sqrt{H(L)}\,\Phi(y)-$$

$$-\frac{Q\mu}{2kL\sqrt{H(y_0)}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi^2m^2}{L^2}\pm\alpha^2\right)^{-1/2}\exp\left(-|x|\sqrt{\frac{\pi^2m^2}{L^2}\pm\alpha^2}\right)\Big]$$

при этом предполагается, что когда в формуле (6) берется $-\alpha^2$, то $\alpha L<\pi$.

Если еще и $\alpha\to 0$, то находим

$$p^*=p_0+\frac{1}{\sqrt{H(y)}}\left[(p_1-p_0)\sqrt{H(L)}\,\frac{y}{L}-\frac{Q\mu}{2k\pi\sqrt{H(y_0)}}\ln\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{L}x-\cos\frac{\pi}{L}(y-y_0)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{L}x-\cos\frac{\pi}{L}(y+y_0)}}\right] \quad (17)$$

В заключение отметим, что условиям (16) удовлетворяет семейство функции

$$H(y)=\begin{cases}\left[\dfrac{\sqrt{H_0}\sin\alpha(L-y)+\sqrt{H_1}\sin\alpha y}{\sin\alpha L}\right]^2 & \text{при } -\alpha^2\\[2ex] \left[\dfrac{\sqrt{H_0}\operatorname{sh}\alpha(L-y)+\sqrt{H_1}\operatorname{sh}\alpha y}{\operatorname{sh}\alpha L}\right]^2 & \text{при } +\alpha^2\end{cases} \quad (18)$$

$$H_0=H(0),\qquad H_1=H(L)$$

В работе [3] приведены графики этого семейства и показано, что при $\alpha\cdot L=0.28$ выражение (18) с погрешностью в ординатах 0,05% изображает прямую

$$H(y)=H_0\left(1-\frac{H_0-H_1}{H_0L}y\right)$$

так что практически формулами (15), (16), (17) можно пользоваться и в случае линейного закона изменения мощности.

Поступила 28 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. П. и др. Научные основы разработки нефтяных месторождений. Гостоптехиздат, 1948.
2. Ким В. Ю. К задаче определения функции давления при упругом режиме. Изв. КФАН СССР, 1959, № 13.
3. Ким В. Ю. К задаче неустановившейся фильтрации жидкости в пласте переменной мощности. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностр., 1959, № 1.
4. Нумеров С. Н. О неустановившейся фильтрации в полосообразном пласте к прямолинейной цепочке скважин. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 1.

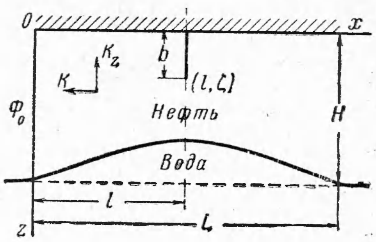
ПРИТОК К ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ДРЕНЕ И НЕСОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЕ В ПОЛОСООБРАЗНОМ АНИЗОТРОПНОМ ПЛАСТЕ. РАСЧЕТ ПРЕДЕЛЬНЫХ БЕЗВОДНЫХ ДЕБИТОВ

Ю. И. Стклянин, А. П. Телков

(*Москва*)

Рассматривается решение задачи о притоке к точечному стоку, горизонтальной дрене и скважине в полосообразном анизотропном пласте конечных размеров; изложен метод определения предельных безводных дебитов.

§ 1. **Потенциал точечного стока и несовершенной скважины.** Рассмотрим приток к точечному стоку с координатами (l, ζ), расположенному несимметрично в полосообразном горизонтальном пласте с подошвенной водой (фиг. 1). Введем обозначения: H — нефтеносная или газоносная мощность пласта, L — рассматриваемая ширина участка залежи, k и k_z — горизонтальная и вертикальная проницаемости, μ — вязкость вытесняемой жидкости, q — мощность точечного стока; ось x направим по кровле пласта, ось z — вниз. Требуется найти распределение давления p (потенциал φ) в пласте. За исходное примем уравнение



Фиг. 1

$$\frac{k}{\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{k_z}{\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = q\delta(z-\zeta)\,\delta(x-l) \qquad (1.1)$$

где $\delta(z-\zeta)$ и $\delta(x-l)$ — функции Дирака [1].

Введем потенциал φ и характеристику анизотропии $\varkappa$, согласно работы [2]. Уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = q\delta(z-\zeta)\,\delta(x-l) \qquad \left(\varphi = \frac{k}{\mu}p, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{k}{k_z}}\right) \qquad (1.2)$$

Будем считать кровлю и подошву непроницаемой:

$$\partial\varphi/\partial z = 0 \quad \text{при } z = 0,\ z = H \qquad (1.3)$$

На контуре питания для простоты принимаем

$$\varphi = 0 \quad \text{при } x = 0,\ x = L \qquad (1.4)$$

Используя последовательно косинус- и синус-преобразование Фурье с конечными пределами [1], применяя дважды формулу обращения ([1], стр. 93—94, 591) и учитывая (1.3) и (1.4), получим решение уравнения (1.2):

$$\varphi_{z>\zeta} = -\frac{2q\varkappa}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}[m\pi\varkappa(H-z)/L]\operatorname{ch}(m\pi\varkappa\zeta/L)}{m\operatorname{sh}(m\pi\varkappa H/L)}\sin\frac{m\pi l}{L}\sin\frac{m\pi x}{L} \qquad (1.5)$$

$$\varphi_{z<\zeta} = -\frac{2q\varkappa}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}[m\pi\varkappa(H-\zeta)/L]\operatorname{ch}(m\pi\varkappa z/L)}{m\operatorname{sh} m\pi(\varkappa H/L)}\sin\frac{m\pi l}{L}\sin\frac{m\pi x}{L} \qquad (1.6)$$

Формулы (1.5) и (1.6) дают распределение потенциала, вызванного точечным стоком или источником в анизотропном полосообразном пласте. Их можно использовать при экспериментировании на щелевом лотке и для горизонтальной дрены.

Получим потенциал для несовершенной скважины в том же пласте. При этом скважину будем рассматривать как линию стоков (фиг.1), расположенных вдоль