О СОПРОТИВЛЕНИИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ГИПЕРЗВУКОВОМУ ПОТОКУ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

О. Г. Фридлендер

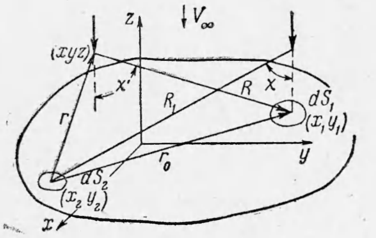
(*Москва*)

Рассматривается течение, близкое к свободномолекулярному, с учетом первых столкновений отраженных и набегающих молекул. Формула для распределения давления по плоским пластинам произвольной формы в плане получена в виде однократного интеграла, а для круглой и многоугольных пластин — в явном виде. Численным интегрированием найдено значение C_x для круглой пластины.

Учету первых столкновений отраженных и набегающих молекул в течениях, близких к свободномолекулярным, посвящены работы [1–4] и др. Исходя из предположений, принятых в этих работах, воспользуемся методом, предложенным в работе [5].

Рассмотрим в потоке, близком к свободномолекулярному (число Кнудсена $K \gg 1$) при больших скоростях (число Маха $M \gg 1$), влияние первых столкновений на аэродинамические характеристики пластин, имеющих один характерный линейный размер. Будем предполагать температуру стенки порядка температуры в невозмущенном потоке и постоянной ($T_w \sim T_\infty$, $T_w = \text{const}$), а коэффициент аккомодации $\alpha \approx 1$, тогда можно считать, что налетающие со скоростью V_∞ молекулы сталкиваются с неподвижными отраженными молекулами (так как $V_w \ll V_\infty$); столкновениями между отраженными молекулами можно пренебречь. Из-за столкновений часть молекул, ранее попадавших на какой-либо элемент ds_1 поверхности, теперь не будет попадать на него, и наоборот, часть ранее не попадавших теперь будет рассеиваться и попадет на этот элемент.

Рассмотрим влияние элемента ds_2 плоской пластины на другой ее элемент ds_1. Пусть на эти элементы падает поток, перпендикулярный пластине. Считая, что отраженные молекулы имеют максвелловское распределение, получим плотность отраженных молекул у пластины, равную



Фиг. 1

$$n = n_\infty V_\infty \pi^{1/2} \beta, \qquad \beta = (2RT_w)^{-1/2}$$

Это следует из закона сохранения массы

$$n_\infty V_\infty = 2n \int_{-\infty}^{\infty}\int\int_{0}^{\infty} \pi^{-3/2}\beta^3 \times$$

$$\times \exp\left[-\beta^2 (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)\right] V_z\, dV_z\, dV_x\, dV_y$$

По предположению число Кнудсена $K \gg 1$ и, следовательно, при определении числа столкновений можно считать число набегающих и отраженных молекул в любой точке пространства тем же, что и в свободномолекулярном потоке.

Для определения влияния нескольких элементов поверхности на элемент ds_1 можно просуммировать влияние каждого из них, вычисленное независимо. Число молекул, не попавших в единицу времени на элемент ds_1 из-за столкновений с молекулами, отраженными от элемента ds_2, равно

$$dN_{12}^- = \int_0^\infty \pi\sigma^2 n_\infty n_2 V_\infty ds_1 dz, \qquad n_2 = \frac{n}{2\pi} d\omega, \qquad d\omega = \frac{\cos\chi}{R_1^2} ds_2$$

$$R_1^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + z^2$$

Здесь $\pi\sigma^2$ — поперечное сечение столкновения эквивалентных твердых шариков; ds_1 имеет координаты (x_1, y_1); n_2 — плотность молекул в точке (x_1, y_1, z), отраженных элементом ds_2; $d\omega$ — телесный угол, под которым виден элемент ds_2 из точки (x_1, y_1, z); χ — угол между осью z и направлением (фиг. 1) на элемент ds_2 с координатами (x_2, y_2) из точки (x_1, y_1, z). Тогда

$$dN_{12}^- = A ds_1 ds_2 \int_0^\infty \frac{z}{R_1^3} dz = \frac{A}{r_0} ds_1 ds_2 \qquad \left(\begin{array}{l} A = 0.5\pi^{1/2}\sigma^2 n_\infty^2 V_\infty^2 \beta \\ r_0^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \end{array}\right)$$

Импульс, который несли эти молекулы, равен

$$dP_{12}^- = AmV_\infty r_0^{-1} ds_1 ds_2$$

Определим число молекул, которые, рассеиваясь на молекулах, отраженных элементом ds_2, попадают в единицу времени на элемент ds_1. Оно равно

$$dN_{12}^{+} = 2\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty\int V_\infty n_\infty n_2\sigma^2 \cos\chi' d\omega' dxdydz = \frac{2A}{\pi} ds_1 ds_2 \int\limits_{0-\infty}^{\infty\,\infty}\int\int \frac{z^3 dxdydz}{r^3 R^4}$$

$$(R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2, \quad r^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + z^2)$$

Здесь χ' — угол между направлением на элемент ds_1 и осью z, а $d\omega'$ — телесный угол, под которым виден элемент ds_1 из точки (xyz).

Определение непосредственно dN_{12}^{+} приводит к громоздким вычислениям. Они существенно упрощаются, если оперировать не с функцией dN_{12}^{+}, а с $dN_{12,21}^{+} = dN_{12}^{+} + dN_{21}^{+}$, где dN_{21}^{+} — число молекул, попавших на элемент ds_2 в единицу времени из-за рассеяния на молекулах, отраженных от ds_1. (Заметим, что в силу симметрии $dN_{12}^{+} = dN_{21}^{+}$ и, следовательно, $dN_{12,21} = 2dN_{12}^{+}$.) Тогда

$$dP_{12,21}^{+} = \frac{2AmV_\infty}{\pi} ds_1 ds_2 \int\limits_{0-\infty}^{\infty\,\infty}\int\int \left(\frac{z^5}{r^3 R^6} + \frac{z^5}{r^6 R^3}\right) dxdydz$$

Введем сферические координаты

$$x - x_i = r\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad y - y_i = r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\vartheta$$

$$x_1 - x_2 = r_0\cos\varphi_0, \qquad y_1 - y_2 = r_0\sin\varphi_0$$

Здесь i равно 1 или 2 для первого и второго интеграла, соответственно. Интегрируя по r и по φ, получим

$$dP_{12,21}^{+} = 8AmV_\infty \frac{ds_1 ds_2}{r_0} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = 1.6AmV_\infty \frac{ds_1 ds_2}{r_0}$$

Так как $dP_{12,21}^{+} = 2dP_{12}^{+}$, то

$$dP_{12}^{+} = 0.4\pi^{1/2}\sigma^2 m n_\infty^2 V_\infty^3 \beta \frac{ds_1 ds_2}{r_0}$$

Итак, импульс, получаемый элементом ds_1 в единицу времени, уменьшится из-за столкновения с молекулами, рассеянными элементом ds_2 на величину $dP_{12}^{-} - dP_{12}^{+}$. Полное же уменьшение давления, по сравнению с давлением в свободномолекулярном потоке, в любой точке произвольной плоской пластины, обтекаемой потоком, перпендикулярным ее плоскости, за счет первых столкновений есть

$$\Delta P = k_p \iint\limits_D \frac{ds_2}{r_0} = k_p \int\limits_0^{2\pi} R_i(\varphi)\, d\varphi, \quad k_p = 0.1\pi^{1/2}\sigma^2 m n_\infty{}^2 V_\infty{}^3\beta = \tag{1}$$

$$= 0.0797 \frac{mn_\infty V_\infty{}^2}{2} \frac{S}{\lambda} \left(\frac{T_\infty}{T_w}\right)^{1/2}, \quad S = \beta V_\infty = M\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{1/2}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\sigma^2 n_\infty}$$

Здесь φ — угол полярной системы координат с центром в точке, где вычисляем поправку, $R_i^3 = R_i(\varphi)$ — уравнение границы пластины в той же системе координат. Заметим, что при вычислении поправки к энергии, приносимой на единицу поверхности в единицу времени, получим

$$\Delta E = 0.5\, V_\infty \Delta P$$

Переходя в (1) к системе координат r_1, φ_1 не зависящий от того, где вычисляем поправку, получим

$$\Delta P = k_p \int\limits_0^{2\pi} R_i(\varphi(\varphi_1)) \frac{d\varphi}{d\varphi_1} d\varphi_1 \tag{2}$$

Связь между R_i, φ и φ_1 дается выражениями (фиг.2)

$$R_i{}^2(\varphi(\varphi_1)) = r_1{}^2(\varphi_1) + r_0{}^2 - 2r_1(\varphi_1) r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{r_1(\varphi_1)\sin\varphi_1 - r_0\sin\varphi_0}{r_1(\varphi_1)\cos\varphi_1 - r_0\cos\varphi_0}$$

Здесь $(r_0\varphi_0)$ — координаты точки, в которой вычисляются поправки, а $r_1(\varphi_1)$ — граница пластины в новой системе координат. Рассмотрим примеры.

1. Взяв для круглой пластины радиуса a за неподвижную систему координат систему с началом в центре круга, преобразуем выражение (2) к виду

$$\Delta P(r_0) = k_p \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - a\, r_0 \cos \varphi_1}{\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2ar_0 \cos \varphi_1}}\, d\varphi_1$$

В точках $r_0 = 0$ и $r_0 = a$ соответственно имеем

$$\Delta P(0) = 2\pi a k_p, \qquad \Delta P(a) = 4ak_p$$

В остальных же заменой $\varphi_1 = 2\vartheta - \pi$ сведем его к хорошо известным стандартным формам Лежандра эллиптических интегралов

$$\Delta P(r_0) = 2k_p\left[(a - r_0)\, K(b, {}^{\pi}/_2) + (a + r_0)\, E(b, {}^{\pi}/_2)\right], \qquad \left(b^2 = \frac{4ar_0}{(a + r_0)^2}\right)$$

Для C_x пластины расчеты дают

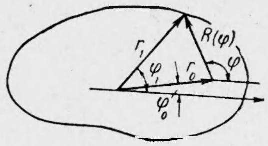
$$C_x = C_{x0} - 0.239\, \frac{M}{K} \sqrt{\frac{\pi \varkappa T_\infty}{2T_w}} \qquad \left(K = \frac{\lambda}{a}\right)$$

Здесь C_{x0} — коэффициент сопротивления в свободномолекулярном потоке. Это совпадает с результатами, которые ранее были получены в работе [6] при тех же предположениях, но несколько иным методом.

2. В случае пластин-многоугольников выражение (1) интегрируется в явном виде. Так как уравнение стороны многоугольника или ее продолжения есть

$$R_i(\varphi) = \left|\frac{\mathbf{h}_i}{\sin(\varphi - \alpha_i)}\right| \tag{3}$$

где $|\mathbf{h}_i|$ — расстояние от начала координат до стороны или ее продолжения, а вектор $\mathbf{h}_i$ направлен от начала координат к границе и α_i — угол наклона грани, то для n-угольника имеем (4)



Фиг. 2

$$\Delta P = k_p \sum_{s=0}^{n'} |\mathbf{h}_s| \left[\ln \operatorname{tg} 0.5\, (\varphi_{s+1} - \alpha_s) - \ln \operatorname{tg} 0.5\, (\varphi_s - \alpha_s)\right] -$$

$$- k_p \sum_{q=n'}^{n} |\mathbf{h}_q| \left[\ln \operatorname{tg} 0.5\, (\varphi_{q+1} - \alpha_q) - \ln \operatorname{tg} 0.5\, (\varphi_q - \alpha_q)\right]$$

где индекс s относится к граням, для которых ${}^1/_2\pi \leqslant \arg \mathbf{h}_s < {}^3/_2\pi$, а индекс q — к граням, для которых ${}^3/_2\pi \leqslant \arg \mathbf{h}_q < {}^5/_2\,\pi$, кроме того, считаем, что $0 \leqslant \varphi_s$, $\varphi_q < 2\pi$ (здесь φ_i — аргумент радиуса-вектора, направленного к вершинам n-угольника) и $0 \leqslant \alpha_s$, $\alpha_q < 2\pi$.

Автор признателен М. Н. Когану за постоянное руководство и многочисленные советы и А. В. Жбаковой, сделавшей большинство расчетов.

Поступила 23 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Heineman M. Theory of drag in highly rarefied gases. Comm. Appl. Math., 1948, vol. 1, No. 3. (Русск. пер.: Гейнеман М. К теории лобового сопротивления в сильно разреженных газах. ИЛ, Сб. «Механика», 1951, вып. 2).
2. Lunc M., Lubonski I. La perturbation de lécoulement moleculaire libre, produite par un obstacle. Bull. Acad. Polon. sci., Cl. IV, 1957, t. 5, No. 1. (Русск. пер.: Лунц М., Любонский А. Возмущение свободномолекулярного течения препятствием. Сб. «Механика», 1958, вып. 2).
3. Liu V. C. On Pitot pressure in an almost free molecule flow. A physical theory for rarefied gas flow. J. Aero-Space Sci., 1958, vol. 25, No. 2. (Русск. пер.: Лю В. К. О давлении в трубке Пито в почти свободном молекулярном течении. Сб. «Механика», 1959, вып. 4.)
4. Liu V. C. On the drag of a flat plate at zero incidence in an almost free molecule flow. J. Fluid Mec., 1959, vol. 5, No. 3. (Русск. пер.: Лю В. К. О сопротивлении плоской пластины под нулевым углом атаки в почти свободном молекулярном течении. Сб. «Механика», 1960, вып. 1.)
5. Коган М. Н. Теорема обратимости для течений, близких к свободномолекулярным. ДАН СССР, 1962, т. 144, № 6.
6. Перепухов В. А. О сопротивлении плоской пластинки в потоке сильно разреженного газа. ЖВМ и МФ, 1961, т. 1, № 4.