

## АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ИЗГИБА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ПЛАСТИН

Динамическим задачам о деформациях нелинейно-упругих тел посвящено большое число работ. Математическая сложность изучаемых в них вопросов обуславливает широкое применение приближенных методов решений или использование численных процедур, реализуемых на ЭВМ. Автомодельные решения в ряду этих задач занимают особое место. Их удается получить, сделав некоторые допущения в исходных условиях задачи. Однако последующий ход решения требует выполнения операций, которые могут быть осуществлены с большой степенью точности. Иногда удается получить решение в квадратурах или в общем случае задача сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, алгоритмы решения которых на ЭВМ хорошо известны. С этой точки зрения автомодельные решения могут быть названы точными и занимают соответствующее место.

В настоящей работе рассмотрен осесимметричный изгиб нелинейно-упругой пластины, подвергнутой воздействию нестационарной динамической нагрузки. Используется степенной закон для описания зависимости между напряжениями и деформациями.

1. Направим ось  $z$  по оси симметрии перпендикулярно срединной плоскости недеформированной пластины. Положение любой точки может быть определено цилиндрическими координатами  $r, \theta, z$ , где  $r$  — длина радиуса-вектора, расположенного в срединной плоскости недеформированной пластины и имеющего начало на оси симметрии;  $\theta$  — угол, определяющий направление вектора;  $z$  — возвышение точки над концом радиуса-вектора. При осесимметричной деформации элементы изгиба не зависят от угла  $\theta$ .

Обозначим  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  нормальные напряжения, действующие по кольцевым и радиальным сечениям пластины. Третья компонента напряжения, действующая по нормали к сечениям, параллельным срединной поверхности, соизмерима по величине давлению от поперечной нагрузки и при анализе напряженного состояния пластины не учитывается. Часть касательных напряжений в радиальных и кольцевых сечениях равна нулю в силу симметрии деформаций. Влияние касательных напряжений, вызываемых действием перерезывающих сил, на деформацию пластины не учитывается.

Напряжения в упругом изотропном теле представлены как сумма компонентов тензоров среднего напряжения и девиатора напряжений [1—3]. Первый тензор зависит от шарового тензора деформаций, второй — от девиатора тензора деформаций. Вытекающие из этой связи соотношения между напряжениями и деформациями для рассматриваемого случая могут быть записаны так:

$$(1.1) \quad \sigma_j - \sigma = 2G(\varepsilon_j - \varepsilon) \quad (j = 1, 2);$$

$$(1.2) \quad \sigma = 3K\varepsilon.$$

Здесь  $\sigma$  — среднее напряжение:  $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/3$ ;  $\varepsilon$  — среднее удлинение:  $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3$ ;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  — удлинения в направлении нормалей к кольцевым, радиальным сечениям и срединной поверхности пластины;  $K$  — обобщенный модуль объемного расширения, зависящий от  $\varepsilon$ ;  $G$  — обобщенный модуль сдвига, зависящий от интенсивности деформаций  $\varepsilon_*$ :  $G = \sigma_*/(3\varepsilon_*)$ ;  $\sigma_*$  — интенсивность напряжений:

$$(1.3) \quad \sigma_* = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2},$$

$$\varepsilon_* = (\sqrt{2}/3) [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{1/2}.$$

В дальнейшем принимается степенная зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций

$$(1.4) \quad \sigma_* = E\varepsilon_*^\mu \quad \text{или} \quad G = (E/3)\varepsilon_*^{\mu-1}$$

( $E, \mu$  — задаваемые константа и показатель степени). Перепишем равенства (1.1), подставив в них (1.2):

$$(1.5) \quad \sigma_j - \sigma[1 - 2G/(3K)] = 2G\varepsilon_j \quad (j = 1, 2).$$

В автомодельном решении напряжения и деформации должны иметь следующую структуру:  $\sigma_j = t^x \Phi_j(\eta)$ ,  $\varepsilon_j = t^y e_j(\eta)$  ( $j = 1, 2$ ), где  $t$  — время,  $\Phi_j(\eta)$ ,  $e_j(\eta)$  — функции безразмерной переменной  $\eta$ :  $\eta = r/(bt^\beta)$ ,  $b$  — размерная константа,  $x, y, \beta$  — показатели степени, подбираемые в процессе решения. При подстановке этих выражений в (1.5) получаются уравнения, объединяющие функции  $\Phi_j(\eta)$  и  $e_j(\eta)$ , причем время явно присутствует в уравнениях не должно. Это обеспечивается заданием степенной зависимости (1.4), связывающей напряжения и деформации, и варьированием значений  $x$  и  $y$ . Однако исключение времени из комбинации  $G/K$ , входящей в (1.5), может вызвать затруднения, и автомодельность решения нарушится. Решение наверняка автомодельное, если задача линейная ( $G/K = \text{const}$ ) или материал считается несжимаемым ( $K \rightarrow \infty$ ).

Изучим последний случай. Из (1.1) для несжимаемого материала ( $\varepsilon = 0$ )

$$(1.6) \quad \sigma_1 = 4G(\varepsilon_1 + 0,5\varepsilon_2), \quad \sigma_2 = 4G(\varepsilon_2 + 0,5\varepsilon_1).$$

При рассмотрении изгиба используется гипотеза прямых нормалей. Положительному значению прогиба  $w$  соответствует отклонение в положительном направлении оси  $z$ . При осесимметричной деформации удлинения в радиальном и кольцевом направлениях определяются выражениями [1]

$$(1.7) \quad \varepsilon_1 = -z_* \kappa_1, \quad \varepsilon_2 = -z_* \kappa_2, \quad \kappa_1 = \partial^2 w / \partial r^2, \quad \kappa_2 = r^{-1} \partial w / \partial r$$

( $z_*$  — отстояние рассматриваемой точки от срединной поверхности пластины,  $\kappa_1, \kappa_2$  — кривизны деформированной поверхности пластины в радиальном и кольцевом направлениях). С помощью двух первых формул (1.7) можно выразить (1.3) и (1.4) через  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  для любой точки пластины:

$$\varepsilon_* = (4H/3)^{1/2} |z_*|, \quad G = (E/3) (4H/3)^{(\mu-1)/2} |z_*|^{\mu-1}$$

( $H = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_1 \kappa_2$ ). Напряжения (1.6) также выражаются через  $\kappa_1, \kappa_2$  и подставляются в формулы для изгибающих моментов  $M_j = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_j \cdot z_* dz_*$  ( $j = 1, 2$ ) ( $h$  — толщина пластины). Окончательно имеем

$$(1.8) \quad M_1 = DH^{(\mu-1)/2} (\kappa_1 + 0,5\kappa_2), \quad M_2 = DH^{(\mu-1)/2} (\kappa_2 + 0,5\kappa_1),$$

где  $M_1$  и  $M_2$  — изгибающие моменты, приходящиеся на единицу ширины кольцевого и радиального сечений;  $D = Eh^{\mu+2} 3^{-(1+\mu)/2} (\mu+2)^{-1}$ . По известным моментам (1.8) найдем напряжения изгиба

$$\sigma_j = -M_j |z_*|^\mu h^{-(\mu+2)} 2^{1+\mu} (\mu+2) \text{sgn } z_* \quad (j = 1, 2).$$

Из условий динамического равновесия элемента пластины для осесимметричного изгиба получим

$$(1.9) \quad \partial M_1 / \partial r + (M_1 - M_2) / r = Q, \quad \partial Q / \partial r + Q / r = q - m \partial^2 w / \partial t^2.$$

Здесь  $Q$  — перерезывающая сила, приходящаяся на единицу ширины кольцевого сечения;  $q$  — поперечная нагрузка (принимается положительной при действии в направлении оси  $z$ );  $m$  — масса единицы площади пластины. Уравнения (1.8), (1.9) совместно с двумя последними равенствами (1.7) решают поставленную задачу.

Автомодельное решение ищется в виде [4, 5]

$$(1.10) \quad w = w_* n_1 t^\alpha \varphi(\xi), \quad Q = Q_* n_4 t^\gamma \chi(\xi), \\ M_1 = M_* n_3 t^\delta \psi_1(\xi), \quad M_2 = M_* n_3 t^\delta \psi_2(\xi), \quad \xi = r / (n_2 b t^\beta),$$

где  $w_*$ ,  $Q_*$ ,  $M_*$ ,  $b$  — размерные константы;  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — неизвестные пока числовые коэффициенты и показатели степени;  $\varphi(\xi)$ ,  $\psi_1(\xi)$ ,  $\psi_2(\xi)$ ,  $\chi(\xi)$  — искомые безразмерные функции переменной  $\xi$ . Нагрузка

$$(1.11) \quad q = q_* t^\omega f(\xi)$$

( $q_*$  — размерная константа,  $\omega$  — задаваемый показатель степени,  $f(\xi)$  — задаваемая безразмерная функция от  $\xi$ ). Используя анализ размерностей, все размерные константы выразим через  $q_*$ ,  $m$ ,  $D$ :

$$(1.12) \quad w_* = q_* m, \quad b = (Dq_*^{\mu-1} m^{-\mu})^{1/(2\mu+2)}, \\ M_* = (Dq_*^{2\mu} m^{-\mu})^{1/(\mu+1)}, \quad Q_* = (Dq_*^{1+3\mu} m^{-\mu})^{1/(2\mu+2)}.$$

Переменные (1.10), (1.11) подставляются в уравнения (1.8), (1.9) и два последних выражения (1.7). При этом учитываются формулы (1.12). В процессе подстановки в уравнениях в явном виде появляется время  $t$ . Для его исключения показатели степени при  $t$  приравниваются нулю. Это дает соотношения  $(\alpha - 2\beta)\mu - \delta = 0$ ,  $\delta - \gamma - \beta = 0$ ,  $\gamma - \beta - \alpha + 2 = 0$ ,  $\omega - \alpha + 2 = 0$ , из которых получаем значения показателей степени в (1.10):

$$(1.13) \quad \alpha = \omega + 2, \quad \beta = \frac{2\mu + \omega(\mu - 1)}{2(1 + \mu)}, \quad \gamma = \frac{2\mu + \omega(3\mu + 1)}{2(1 + \mu)}, \quad \delta = 2\mu \frac{\omega + 1}{1 + \mu}.$$

Окончательно приходим к системе уравнений

$$(1.14) \quad \psi_1 = n_3^{-1} (n_1 n_2^{-2})^\mu (\xi \varphi'' + 0,5 \varphi') \xi^{-\mu} L^{\mu-1}, \\ \psi_2 = n_3^{-1} (n_1 n_2^{-2})^\mu (\varphi' + 0,5 \xi \varphi'') \xi^{-\mu} L^{\mu-1}, \\ n_3 (n_4 n_2)^{-1} [\psi_1' + (\psi_1 - \psi_2)/\xi] = \chi, \\ n_4 n_2^{-1} (\chi' + \chi/\xi) = f(\xi) - n_1 [\beta^2 \xi^2 \varphi'' - \beta(2\alpha - \beta - 1) \xi \varphi' + \alpha(\alpha - 1) \varphi]$$

( $L = [(\xi \varphi'')^2 + \xi \varphi' \varphi'' + (\varphi')^2]^{1/2}$ , штрихами обозначено дифференцирование по  $\xi$ ).

2. Используя полученные уравнения, рассмотрим изгиб безграничной пластины при действии нагрузки, приложенной в некоторой области пластины. Известно [6], что при воздействии сосредоточенной силы в окрестности ее приложения изгибающий момент и перерезывающая сила обращаются в бесконечность. Причина этого — неточность технической теории изгиба, не учитывающей локальных деформаций материала под силой. Точные решения теории упругости дают бесконечно большие напряжения лишь непосредственно в точке приложения силы. Наличие этих напряжений также не всегда можно считать физически оправданным. Поэтому часто сила заменяется нагрузкой, распределенной по малой, но конечной площади [6], что приводит к конечному значению напряжений. Такой подход естественно использовать и при решении динамической задачи, изучающей локальное воздействие силы на пластину. Однако фиксирование размера площадки, на которую действует нагрузка, вводит дополнительный линейный размер, что нарушает автомодельность задачи. Для сохранения автомодельности необходимо считать  $q$  функцией переменной  $\xi$  (1.11). В этом случае нагрузка не фиксирована относительно координат  $r$  пластины, а как бы растекается по ее поверхности с течением времени. Примем нагрузку в виде (1.11), взяв

$$(2.1) \quad f(\xi) = \exp(-k \xi^2).$$

Меняя  $k$ , можно изменять площадь, охватываемую основной частью нагрузки к определенному моменту времени. При этом нагрузка делается более или менее сосредоточенной. Суммарная сила, создаваемая нагрузкой (1.11), (2.1),

$$(2.2) \quad S = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty q r dr d\theta = S_* t^\lambda \quad (S_* = \pi q_* (n_2 b)^2 k^{-1}, \quad \lambda = (\omega + 1) 2\mu / (\mu + 1)).$$

Можно задавать воздействие на пластину, пользуясь (2.2) вместо  $q_{\pm}$  и  $\omega$ . Коэффициенты (1.13) выражаются через  $\lambda$  (2.2):

$$(2.3) \quad \alpha = 1 + \lambda(\mu + 1)(2\mu)^{-1}, \quad \beta = 0,5 + \lambda(\mu - 1)(4\mu)^{-1}, \quad \gamma = -0,5 + \lambda(3\mu + 1)(4\mu)^{-1}, \quad \delta = \lambda.$$

Эти формулы показывают, что при  $\lambda \geq 0$  моменты  $M_1, M_2$  не обращаются в бесконечность ( $\delta \geq 0$ ). Коэффициент  $\gamma$  может иметь отрицательное значение, т. е. перерезывающая сила  $Q$  (1.10) в окрестности оси симметрии пластины при  $t \rightarrow 0$  может быть весьма велика. Это связано с тем, что в начальный момент времени ( $t \rightarrow 0$ ) распределение нагрузки по пластине, определяемое (1.11), (2.1), носит характер импульсной функции [7] ( $\omega < 0$ ).

Рассмотрим случай, когда суммарная сила не меняется с течением времени ( $\lambda = 0$ ). Из (2.3) и (2.2) вытекает

$$(2.4) \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0,5, \quad \gamma = -0,5, \quad \delta = 0, \quad \omega = -1.$$

Из формул (2.4) выпал коэффициент  $\mu$ . Это означает, что показатели степеней при  $t$  в (1.10) будут одинаковыми независимо от упругих свойств материала. В частности, изгибающий момент в центре пластины остается неизменным ( $\delta = 0$ ). Подставляем  $\alpha$  и  $\beta$  из (2.4) в (1.14), при этом подбираем такие  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), которые упрощают вид уравнений:  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 2^{\mu/(\mu+1)}$ ,  $n_3 = 2^{2\mu/(\mu+1)}$ ,  $n_4 = 2^{\mu/(\mu-1)}$ . В результате из (1.14)

$$(2.5) \quad \psi_1 = (\xi\varphi'' + 0,5\varphi')\xi^{-\mu}L^{\mu-1}, \quad \psi_2 = (\varphi' + 0,5\xi\varphi'')\xi^{-\mu}L^{\mu-1}, \\ \psi_1' + (\psi_1 - \psi_2)/\xi = \chi, \quad \chi' + \chi/\xi = f(\xi) - \xi^2\varphi'' + \xi\varphi',$$

где  $f(\xi)$  задается формулой (2.1). Два первых уравнения (2.5) переписываются в форме

$$(2.6) \quad \varphi'' = [(\varphi'')^2 + \varphi''A + A^2]^{(1-\mu)/2}\psi_1 - 0,5A, \\ \psi_2 = \psi_1(2A + \varphi'')/(2\varphi'' + A) \quad (A = \varphi'/\xi).$$

Рассмотрим граничные условия. В силу симметрии изгиба относительно центра пластины при  $r = 0$  угол поворота равен нулю,  $Q = 0$ , а  $M_1 = M_2$ . На основании (1.10) получаем

$$(2.7) \quad \xi = 0: \quad \varphi'(0) = 0, \quad \chi(0) = 0, \quad \psi_1(0) = \psi_2(0).$$

Для безграничной пластины при  $\xi \rightarrow \infty$  все элементы изгиба стремятся к нулю. Начальные условия нулевые. К этим условиям необходимо добавить выражения, раскрывающие неопределенность членов, входящих в (2.5), (2.6), при  $\xi \rightarrow 0$ . Очевидно,  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \chi/\xi = \chi'(0)$ ,  $\lim_{\xi \rightarrow 0} A = \lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi'/\xi = \varphi''(0)$ . Используя эти соотношения в последнем уравнении (2.5) и первом уравнении (2.6), при  $\xi = 0$  находим

$$(2.8) \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \chi/\xi = 0,5f(0), \quad A(0) = |3^{-(1+\mu)/2}2\psi_1(0)|^{1/\mu} \operatorname{sgn} \psi_1(0).$$

По соображениям симметрии,  $\lim_{\xi \rightarrow 0} (\psi_1 - \psi_2)/\xi = 0$ .

Интегрирование уравнений можно выполнить методом сведения решения к задаче Коши. Для этого наряду с применением условий (2.7) необходимо при  $\xi = 0$  задать значение  $\psi_1(0)$ , входящее в (2.8), и  $\varphi(0)$ , а затем произвести интегрирование. По величине незамыкания решения при  $\xi \rightarrow \infty$  следует откорректировать ранее принятые  $\psi_1(0)$  и  $\varphi(0)$  и снова повторить процесс. Варьирование двумя величинами  $\psi_1(0)$  и  $\varphi(0)$  приводит к большому объему вычислений. Однако для рассматриваемого значения  $\lambda = 0$  система уравнений не содержит явно функции  $\varphi(\xi)$ , что снижает ее порядок и позволяет использовать только одно условие  $\psi_1(0)$  для выполнения прогонки. После их завершения для поиска  $\varphi(\xi)$  достаточно интегрировать  $d\varphi/d\xi = \varphi'(\xi)$  (здесь правая часть уже найдена). Это линейная задача, которая для нахождения  $\varphi(0)$  требует одной прогонки.

Фактически оба интегрирования объединены в одной программе и производятся одновременно. Для интегрирования применялась подпрограмма, основанная на методе Рунге — Кутты, с автоматическим выбором шага интегрирования, требующая разрешения системы уравнений относительно высших производных. Между тем первое уравнение (2.6) не решается при произвольном  $\mu$  аналитически относительно  $\varphi''$ . В процессе счета  $\varphi''$  определялась из (2.6) методом последовательных приближений. В качестве первого приближения бралось значение, полученное на предыдущем шаге. Во всех выполненных на ЭВМ СМ-4 расчетах процесс последовательных приближений оказался сходящимся. На рис. 1 представлены графики величин, характеризующих изгиб пластины, для  $\mu = 1/3$  и  $k = 1$ .

Целесообразно сравнить полученное решение с решением для линейно-упругой пластины ( $\mu = 1$ ). Изгиб линейно-упругих пластин при динамическом воздействии сосредоточенных сил изучался в [8—10]. Найдем решение при воздействии нагрузки (1.11). Для линейно-упругой пластины можно найти автомодельное решение, считая материал сжимаемым. В этом случае зависимость между изгибающими моментами и кривизнами имеет вид [11]

$$M_1 = D_* (\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad M_2 = D_* (\kappa_2 + \nu \kappa_1),$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $D_*$  — цилиндрическая жесткость линейно-упругой пластины:  $D_* = E_* h^3 / [12(1 - \nu^2)]$ ;  $E_*$  — модуль нормальной упругости. Из этих равенств получим

$$(2.9) \quad \psi_1 = \varphi'' + \nu \varphi' / \xi, \quad \psi_2 = \varphi' / \xi + \nu \varphi''.$$

В (1.12)  $D$  заменяется на  $D_*$  для  $\mu = 1$ .

Снова рассмотрим случай, в котором суммарная сила  $S$  (2.2) сохраняет постоянное значение ( $\lambda = 0$ ). Решение сведется к интегрированию системы (2.5), в которой первые два уравнения заменяются на (2.9). Эта система, записанная для  $\lambda = 0$ , позволяет в линейном случае ввести новую переменную

$$(2.10) \quad \Phi = \varphi'' - \varphi' / \xi.$$

Из (2.9) и двух последних уравнений (2.5) имеем

$$(2.11) \quad \psi_1 = \Phi + (1 + \nu) \varphi' / \xi, \quad \psi_2 = -\Phi + (1 + \nu) \varphi'',$$

$$\psi_1 - \psi_2 = (1 - \nu) \Phi, \quad \chi = \Phi' + 2\Phi / \xi;$$

$$(2.12) \quad \Phi'' + 3\Phi' / \xi + \xi^2 \Phi = f(\xi).$$

Из третьего и четвертого уравнений (2.11), учитывая (2.7), после раскрытия неопределенности при  $\xi \rightarrow 0$  найдем  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi'(0) = 0$ . Кроме того, на основании (2.12)  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \Phi' / \xi = \Phi''(0) = 0,25f(0)$ . Записанные условия

достаточны для интегрирования (2.12). Функция  $\Phi$  не зависит от заранее неизвестных граничных условий  $\varphi(0)$ ,  $\psi_1(0)$  и получается с помощью однократного интегрирования. Для определения других величин интегрируется уравнение (2.10) при найденной  $\Phi(\xi)$  и используются равенства (2.11). Входящая в (2.10) неопределенность раскрывается при  $\xi = 0$  с помощью первого выражения (2.11):

$$(2.13) \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \varphi' / \xi = (1 + \nu)^{-1} \psi_1(0).$$

Значения  $\psi_1(0)$ , а также  $\varphi(0)$  должны быть заданы в процессе выполнения прогонки при интегрировании (2.10). Как и в нелинейном случае, расчеты облегчаются тем, что в (2.10) входят только производные от  $\varphi$ , поэтому достаточно варьировать одним граничным условием  $\psi_1(0)$ , а при определении функции  $\varphi$  окончательно уточняется значение  $\varphi(0)$ . Практически все операции интегрирования осуществляются в программе счета одновременно. Как следует из (2.12), функция  $\Phi$  не зависит от  $\nu$ . Он входит лишь в выражение (2.13), используемое при интегрировании (2.10). Это позволяет

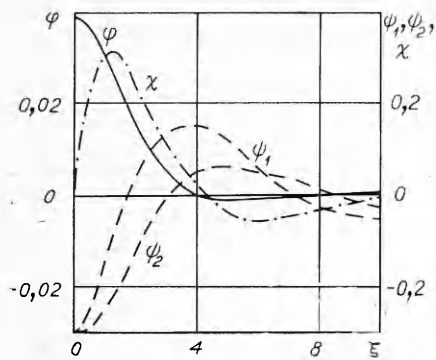


Рис. 1

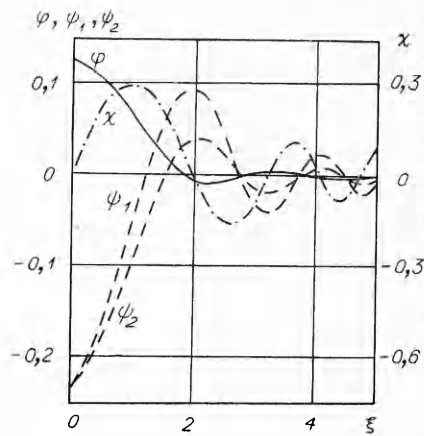


Рис. 2

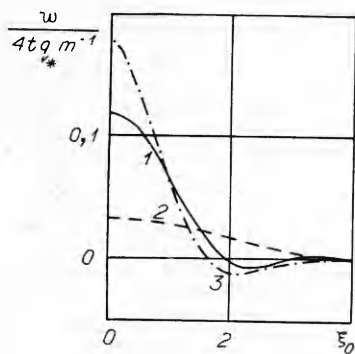


Рис. 3

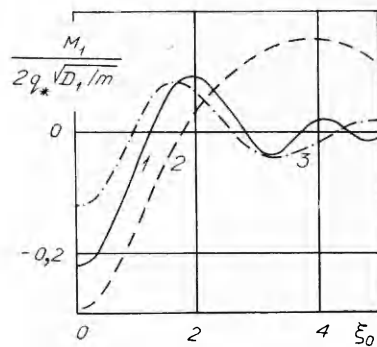


Рис. 4

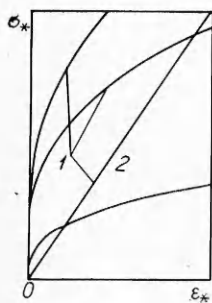


Рис. 5

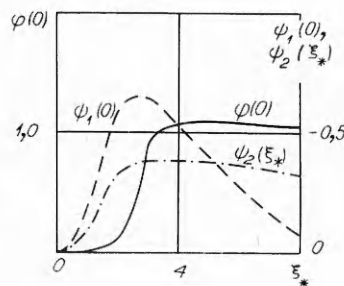


Рис. 6

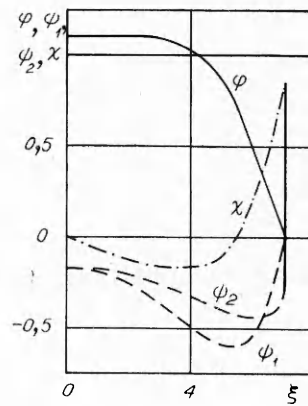


Рис. 7

путем несложного пересчета находить результаты при разных  $\nu$  (при  $\nu = 0,3$  и  $0,5$  разница в прогибах и моментах для  $\xi = 0$  около 7—11 %).

На рис. 2 построены графики величин, рассчитанных для линейно-упругой пластины при  $k = 1$ . Они показывают, что как в линейном, так и в нелинейном случае (см. рис. 1)  $\psi_2$  по абсолютной величине больше  $\psi_1$  в области пластины, примыкающей к оси симметрии ( $\xi = 0$ ), т. е. в этой части пластины  $|M_2| \geq |M_1|$ . Волны изгибающих моментов и перерезывающей силы, распространяясь, образуют предвестник, опережающий расширение области существенных прогибов пластины.

Количественное сопоставление величин (1.10) для линейного и нелинейного случаев затруднено тем, что входящие в них коэффициенты (1.12)

будут неодинаковыми для материалов с разными упругими свойствами. Поэтому коэффициенты приводятся к другой форме. Они выражаются через величины, определяемые для линейной пластины, и некоторый параметр  $a$ , зависящий от соотношения характеристик в линейном и нелинейном случаях:

$$b = (D_1/m)^{1/4} a^{-1/2}, \quad M_* = q_* (D_1/m)^{1/2} a^{-1}, \quad Q_* = q_* (D_1/m)^{1/4} a^{-1/2},$$

где  $a = D_1^{1/2} D^{-1/(\mu+1)} (q_*^2/m)^{(1-\mu)/(2\mu+2)} = (E_1/3)^{1/2} [(\mu+2)/E]^{1/(1+\mu)} (q_*^2 \times m^{-1} h^{-1})^{(1-\mu)/(2\mu+2)}$ ;  $D_1 = E_1 h^3/9$ ;  $E_1$  — коэффициент в формуле (1.4) для линейного случая  $\mu = 1$  (он несколько отличен от модуля упругости  $E_*$ , определяемого при одноосном растяжении:  $E_1 = 3(2+2\nu)^{-1} E_*$ ). При последующем сопоставлении линейной и нелинейной задач материал считается несжимаемым ( $\nu = 0,5$ ). Для сравнения решений нужно, чтобы они были рассчитаны при одинаковых нагрузках (1.14), (2.1). Учитывая, что переменная  $\xi$  (1.10), входящая в (2.1), связана с упругими свойствами материала, необходимо при расчете нелинейной пластины брать значение коэффициента  $k$  в  $(2^{(1-\mu)/(1+\mu)} a)$  раз меньшим, чем в линейном случае.

На рис. 3, 4 представлены графики  $w/(4tq_*m^{-1})$  и  $M_1/(2q_*\sqrt{D_1/m})$ , характеризующих прогиб и изгибающий момент при  $\lambda = 0$ . По оси абсцисс отложена  $\xi_0 = r/(4t^2 D_1/m)^{1/4}$ . Линия 1 соответствует линейному случаю, рассчитанному при  $k = 1$  (2.1). Линии 2 и 3 построены для нелинейной пластины при  $\mu = 1/3$  для  $a = 0,707$  и  $2,83$ . Этим параметрам отвечают значения  $k = 1$  и  $0,25$ , при которых сохраняется эквивалентность нагрузки (2.1) для линейной и нелинейной пластин. При больших  $a$  (линия 3) прогиб больше локализуется вблизи оси симметрии и растет интенсивнее, чем в линейном случае, при этом момент оказывается меньше. Для малых  $a$  (линия 2) имеет место обратная картина. Можно считать, что  $a$  характеризует податливость пластины и, в свою очередь, зависит от соотношения  $E_1$  и  $E$ .

На рис. 5 даны графики (линии 1), иллюстрирующие зависимость (1.4) от  $E$  при фиксированном  $\mu$  ( $\mu < 1$ ). Там же проведена прямая (линия 2) для линейно-упругого материала при некотором  $E_1$ . С увеличением  $E$  кривые 1 занимают более высокое положение, увеличивая тем самым диапазон деформаций, при которых рассматриваемый нелинейный материал оказывается более жестким, чем линейный. Этим объясняются результаты сопоставления решений.

3. Большой интерес представляет изучение изгиба пластин ограниченных размеров. Однако решение может быть автомодельным только в частном случае, когда показатель степени  $\beta$  в  $\xi$  (1.10) равен нулю. Тогда  $\xi$  будет зависеть только от пространственной координаты  $r$ , что позволит удовлетворить граничным условиям, заданным на конечном расстоянии от центра. Соответствующее решение назовем вырожденным [12]. Для него из (1.13) при  $\beta = 0$   $\alpha = 2/(1-\mu)$ ,  $\gamma = \delta = \omega = 2\mu/(1-\mu)$ . Значение  $\mu$  здесь предопределяет величину  $\omega$ , задающую характер изменения нагрузки во времени (1.14). Для  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), входящих в (1.14), целесообразно принять значения, отличающиеся от ранее взятых:

$$n_1 = [\alpha(\alpha-1)]^{-1}, \quad n_2 = n_4 = [\alpha(\alpha-1)]^{-\mu/(2\mu+2)}, \quad n_3 = [\alpha(\alpha-1)]^{-\mu/(\mu+1)}.$$

В этом случае останутся справедливыми первые три уравнения (2.5) и уравнения (2.6). Вместо последнего уравнения (2.5) получим

$$(3.1) \quad \chi' + \chi'\xi = f(\xi) - \varphi.$$

Второе условие (2.8) сохраняется, а первое заменяется на  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \chi/\xi = \chi'(0) = 0,5[f(0) - \varphi(0)]$ . Граничные условия (2.7) в центре пластины остаются прежними.

Рассмотрим воздействие равномерно распределенной нагрузки на пластину, свободно опертую при  $r = R$  на кольцевую опору. Имеем

$\xi = \xi_*$ :  $\varphi(\xi_*) = 0$ ,  $\psi_1(\xi_*) = 0$ , где  $\xi_* = R/(n_2 b)$ , и в (3.1)  $f(\xi) = 1$ . При интегрировании используются уравнения (2.6), (3.1) и третье уравнение (2.5). Процесс интегрирования аналогичен описанному в п. 2. Однако теперь приходится одновременно варьировать при  $\xi = 0$  двумя заранее неизвестными условиями  $\varphi(0)$  и  $\psi_1(0)$ , чтобы добиться выполнения граничных условий при  $\xi = \xi_*$ . Это приводит к большому объему вычислений. Но возможны упрощения. Пусть порядок величин  $\varphi(0)$  и  $\psi_1(0)$  известен. Фиксируем значение одной из них, например  $\varphi(0)$ , и решаем серию задач Коши, изменяя в каждом решении  $\psi_1(0)$ . При этом определяются  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , при которых обращаются в нуль  $\varphi(\xi_1)$  и  $\psi_1(\xi_2)$ . Цель процесса заключается в том, чтобы найти такое значение  $\psi_1(0)$ , когда  $\xi_1$  совпадает с  $\xi_2$ . Значение  $\xi_1 = \xi_2$  может рассматриваться как координата опирания пластины  $\xi_*$ , где одновременно выполняются граничные условия  $\varphi(\xi_*) = 0$ ,  $\psi_1(\xi_*) = 0$ . В данной процедуре искомой является  $\xi_*$ , т. е. радиус пластины  $R$ . Взяв другое значение  $\varphi(0)$ , можно рассчитать деформацию пластины при другом радиусе опирания. Серия подобных вычислений, выполненных для  $\mu = 1/3$  ( $\omega = 1$ ), позволила построить на рис. 6 графики зависимостей  $\varphi(0)$ ,  $\psi_1(0)$ ,  $\psi_2(\xi_*)$  от  $\xi_*$ , характеризующих величину прогиба и изгибающих моментов  $M_1$  в центре пластины и  $M_2$  на ее опоре в зависимости от ее размера.

Динамически приложенные нагрузки уравновешиваются силами упругости и силами инерции. При малых размерах пластины ( $\xi_* < 2$ ) преобладают силы упругости. При  $\xi_* \rightarrow \infty$  пластина сопротивляется только силами инерции и  $\varphi(0) \rightarrow 1$ . Для коротких пластин ( $\xi_* < 3$ ) максимальные значения  $M_1$  и  $M_2$  наблюдаются в центре. При этом  $M_2$  мало изменяется (до 10 %) вдоль радиального сечения до значения  $r = 0,6 R$  и лишь на опоре оказывается на 40 % меньше, чем в центре пластины. При возрастании радиуса пластины деформации начинают локализоваться возле опор, поэтому максимум  $M_1$  и  $M_2$  перемещается из центра пластины ближе к опоре. Рис. 7 показывает распределение вдоль радиуса пластины величин, характеризующих элементы изгиба, при  $\xi_* = 7,05$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность.— М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948.
2. Новожилов В. В. Теория упругости.— Л.: Судпромгиз, 1958.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика.— М.: ИЛ, 1961.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1977.
5. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
6. Доннел Л. Г. Балки, пластины и оболочки.— М.: Наука, 1982.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1984.
8. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики.— М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
9. Зегжда С. А., Улитин М. И. Сравнение колебаний конечной и бесконечной пластины при поперечном ударе // Прикл. механика.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1975.— Вып. 2.
10. Алешин Л. Н., Приходько И. А., Себеккина В. И. О напряженно-деформированном состоянии упругой бесконечной пластины при ударном нагружении // Исследования по теории и методам расчета строительных конструкций.— М.: ЦНИИ строит. конструкций, 1984.
11. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки.— М.: Наука, 1966.
12. Ястребов В. П. Вырожденные автомодельные решения в динамических задачах о расчете деформаций в нелинейно-упругих телах // ПМТФ.— 1988.— № 1.

г. Ленинград

Поступила 9/VII 1987 г.